

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. UNTERBERGER

J. UNTERBERGER

Opérateurs pseudo-différentiels (suite 1)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 4,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A4_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 0 - 1 9 7 1

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS (Suite 1)

par A. et J. UNTERBERGER

§ 2. COMPOSITION - CARACTERE PSEUDO-LOCAL - TRANSPOSITION

Théorème (II.1) : Soient $a \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m_1)$ et $b \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m_2)$; posons $(a \# b)(x, \eta) = \int e^{2i\pi x\theta} a(x, \theta + \eta) \widehat{b^1}(\theta, \eta) d\theta$. Alors $a \# b$ appartient à $\mathcal{L}(X \times \Xi; m_1 + m_2)$ et $(Op a) \circ (Op b) = Op(a \# b)$.

De plus, pour tout entier $k \geq 1$,

$$a \# b - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} \partial_{\xi}^r a D_x^r b \text{ appartient à } \mathcal{L}(X \times \Xi; m_1 + m_2 - k).$$

Preuve : En effet

$$\widehat{(Op a) \circ (Op b) u}(\xi) = \int \widehat{a^1}(\xi - \zeta, \zeta) d\zeta \int \widehat{b^1}(\zeta - \eta, \eta) \widehat{u}(\eta) d\eta .$$

En appliquant Fubini et en posant $\zeta = \eta + \theta$ cela s'écrit encore :

$$\int f(\xi - \eta, \eta) \widehat{u}(\eta) d\eta$$

avec $f(\xi, \eta) = \int \widehat{a^1}(\xi - \theta, \eta - \theta) \widehat{b^1}(\theta, \eta) d\theta = \widehat{(a \# b)^1}(\xi, \eta) .$

Rappelons que la transformation de Fourier par rapport à la première variable est, pour tout m , un isomorphisme de $\mathcal{L}(X \times \Xi; m)$ sur $\mathcal{L}(\Xi \times \Xi; m)$.

On laisse au lecteur éventuel le soin de démontrer que $a \# b \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m_1 + m_2)$ en utilisant deux fois l'inégalité de Peetre.

Pour obtenir le développement limité annoncé, posons

$$F(\xi, \eta) = \mathfrak{F}^1 \left[a \# b - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} \partial_2^r a D_1^r b \right] (\xi, \eta) ,$$

où ∂_1^r (resp. ∂_2^r) signifient que l'on prend les dérivées d'un symbole par rapport à celles des coordonnées qui sont dans X (resp. Ξ) : cette notation permet de changer le nom des variables sans risquer de confusion. Il s'agit de montrer que $F(\xi, \eta)$ appartient à $\mathcal{L}(\Xi \times \Xi; m_1 + m_2 - k)$.

IV.2

On peut écrire

$$F(\xi, \eta) = \int [\hat{a}^1(\xi - \theta, \eta + \theta) - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} \theta^r \partial_2^r \hat{a}^1(\xi - \theta, \eta)] \hat{b}^1(\theta, \eta) d\theta .$$

Grâce à la formule de Taylor, le crochet se majore par

$$C |\theta|^k (1 + |\eta + \lambda \theta|^2)^{\frac{(m_1 - k)/2}{2}} (1 + |\xi - \theta|^2)^{-M}$$

pour tout M , avec $0 < \lambda < 1$.

Comme, pour tout N , $|\hat{b}^1(\theta, \eta)| \leq C(1 + |\eta|^2)^{\frac{m_1}{2}} (1 + |\theta|^2)^{-N}$, l'inégalité de Peetre appliquée deux fois permet d'écrire

$$|F(\xi, \eta)| \leq C \int (1 + |\theta|^2)^{-N + \frac{k}{2} + M + \frac{|m_1 - k|}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{(m_1 + m_2 - k)/2}{2}} (1 + |\xi|^2)^{-M} d\theta$$

$$\leq C(1 + |\eta|^2)^{\frac{(m_1 + m_2 - k)/2}{2}} (1 + |\xi|^2)^{-M} .$$

On voit aisément qu'une telle majoration vaut aussi pour une dérivée mixte d'ordre quelconque de F , ce qui démontre la théorème (II.1).

Remarque (II.1) : Le même développement asymptotique est valable lorsque a et b appartiennent à S^{m_1} et S^{m_2} respectivement, encore qu'il soit préférable de noter autrement, si l'on en a l'usage, l'expression "sans reste" de $a \# b$.

Théorème (II.2) ; (Caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels) : Soient $a \in S^m$ et $u \in \mathcal{E}'(X)$ de classe C^∞ dans un ouvert Ω de X . Alors $Op(a)(u)$ est de classe C^∞ dans Ω .

Preuve : Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u \in \mathcal{E}'(X)$: u appartient donc à un certain espace de Sobolev $H^s(X)$ et $Op(a)u \in H^{s-m}(X)$. D'après la formule de composition et le fait que φu est de classe C^∞ :

$$\varphi Op(a)(u) + \sum_{1 \leq |r| \leq k-1} Op(\partial_\xi^r a D_x^r \varphi)u \in H^{s-m+k}(X), \text{ pour tout } k \geq 1 .$$

IV.3

Par récurrence sur j , on démontre que

$$\varphi^j \text{Op}(a)(u) + (-1)^{j+1} \sum \frac{1}{r^1! \dots r^j!} \text{Op}(\partial_{\xi}^{r^1 + \dots + r^j} a D^{r^1} \varphi \dots D^{r^j} \varphi)(u)$$

appartient à $H^{s-m+k}(X)$ pour tout $k \geq 1$, la somme étant étendue à une partie $J_{j,k}$ de l'ensemble des j -uplets ordonnés (r^1, \dots, r^j) de multi-indices satisfaisant toutes les inégalités

$$\begin{cases} |r^l| \geq 1 & , \quad l = 1, 2, \dots, j . \\ |r^1| + \dots + |r^j| \leq k-1 . \end{cases}$$

Comme $J_{j,k}$ est vide pour tout j , il en résulte que $\varphi^j \text{Op}(a)(u)$ appartient à $H^{s-m+j}(X)$: φ étant un élément arbitraire de $\mathcal{D}(\Omega)$, il s'ensuit que $\text{Op}(a)(u)$ est de classe C^∞ dans Ω .

Autre preuve : Il est facile de montrer que $\hat{a}^2(x, z)$ est une fonction C^∞ pour $z \neq 0$, autrement dit que le noyau de $\text{Op}(a)$ est C^∞ dans le complémentaire de la diagonale : on conclut par un cas du théorème des noyaux de L. Schwartz.

Proposition (II.1) : Soit $a \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m)$; définissons a_* par

$$a_*(x, \eta) = \int e^{2i\pi x \zeta} \hat{a}^1(\zeta, \zeta + \eta) d\zeta .$$

Alors $a_* \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m)$ et de plus, pour tout $k \geq 1$,

$$a_*(x, \eta) - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} \partial_{\eta}^r D_x^r a(x, \eta) \text{ appartient à } \mathcal{L}(X \times \Xi; m-k) .$$

Si $b \in \mathcal{E}(\Xi; m)$, on pose $b_* = b$, ce qui étend au cas où $a \in S^m$ la proposition, sans que l'on ait bien sûr rien de plus à démontrer.

IV.4

Preuve : On laisse au lecteur le soin de montrer que a_* appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; m)$ et d'écrire le développement de Taylor nécessaire ; les inégalités recherchées s'obtiendront à l'aide de l'inégalité de Peetre.

Remarque (II.2) : On a donc pourvu l'espace vectoriel $S^\infty = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S^m$ d'une part d'une structure d'algèbre (associative) graduée au moyen de l'opération $\#$, d'autre part d'un endomorphisme $*$.

Il est intéressant de remarquer que si $a(x, \xi) = \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha$ est le symbole d'un opérateur différentiel, à savoir $\sum a_\alpha(x) D^\alpha$, a_* n'est autre que le symbole de l'opérateur différentiel $\sum D^\alpha (a_\alpha)$.

Il existe par ailleurs sur cette algèbre une involution \vee , définie par

$$\vee a(x, \xi) = a(x, -\xi).$$

Les endomorphismes \vee et $*$ ne commutent pas entre eux, mais chacun des deux endomorphismes $*\vee$ et $\vee*$ est involutif.

Proposition (II.2) : Soit $a \in S^m$. Le transposé ${}^t A$ de l'opérateur $A = Op(a)$ (noter que ${}^t A$ est a priori bien défini en tant qu'opérateur de $\mathcal{S}'(X)$ dans $\mathcal{S}'(X)$) coïncide sur l'espace $\mathcal{S}(X)$ avec l'opérateur $Op[(\vee a)_*]$.

Preuve : On obtient ce résultat grâce à la formule de Parseval qui donne lorsque u et v appartiennent à $\mathcal{S}(X)$ la formule

$$\begin{aligned} \int \widehat{{}^t A u}(\xi) \widehat{v}(-\xi) d\xi &= \int \widehat{u}(-\eta) \widehat{Av}(\eta) d\eta \\ &= \int \widehat{u}(-\eta) d\eta \int \widehat{a}^1(\eta-\zeta, \zeta) \widehat{v}(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{{}^t A u}(\xi) = \int \widehat{a}^1(\eta+\xi, -\xi) \widehat{u}(-\eta) d\eta,$$

IV.5

ou encore, après le changement de variable $\eta \mapsto -\eta$ et l'introduction du symbole $b = \check{a}$,

$$\begin{aligned} \widehat{t_A u}(\xi) &= \int \widehat{b^1}(\xi - \eta, \xi) \widehat{u}(\eta) \, d\eta \\ &= \int \widehat{b_*^1}(\xi - \eta, \eta) \widehat{u}(\eta) \, d\eta \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

Corollaire : Soit $a \in S^m$: $Op(a)$ s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{S}'(X)$ dans $\mathcal{S}'(X)$.

On est alors en mesure de donner un sens à la formule suivante, qui montre comment un symbole a peut être reconstruit à partir de l'opérateur $A = Op(a)$:

$$a(x, \xi) = e^{-2i\pi x \xi} A(y \mapsto e^{2i\pi \xi y})(x) \quad .$$

Remarque (II.2) : Sur l'algèbre S^m , il existe encore une autre involution $-$, à savoir la conjugaison complexe : $-$ et $*$ ne commutent pas entre eux, et les endomorphismes $-*$ et $*-$ sont involutifs.

Cela étant, si $a \in S^m$, l'adjoint de l'opérateur $Op(a)$ est l'opérateur $Op[(\bar{a})_*]$.

§ 3. TRANSFORMATION DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS PAR CHANGEMENT DE COORDONNEES.

Rappelons la formule

$$\text{Op}(a)(u)(x) = \int d\xi \int a(x, \xi) e^{-2i\pi \langle y-x, \xi \rangle} u(y) dy .$$

Il est utile (et essentiel pour la théorie du changement de coordonnées) de voir quels opérateurs on obtient si l'on remplace dans cette formule le symbole $a(x, \xi)$ par une fonction de trois variables $a(x, y, \xi)$: une telle fonction sera appelée un symbole-noyau.

L'objet de la proposition (III.1) sera de montrer que, moyennant certaines hypothèses sur $a(x, y, \xi)$, cette généralisation n'est qu'illusoire.

Appelons symbole-noyau d'ordre $\leq m$ toute fonction a à valeurs complexes et de classe C^∞ sur $X \times X \times \Xi$ satisfaisant la condition :

$\forall p, q, r \in \mathbb{N}^D, \forall M, N \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ telle que

$$(1+|x|^2)^M (1+|y|^2)^N |D_x^p D_y^q \partial_\xi^r a(x, y, \xi)| \leq C (1+|\xi|^2)^{\frac{m-|r|}{2}} .$$

A un tel symbole-noyau on associe l'opérateur A défini par

$$A(u)(x) = \int d\xi \int a(x, y, \xi) e^{-2i\pi \langle y-x, \xi \rangle} u(y) dy .$$

Proposition (III.1) : Soit A l'opérateur associé à un symbole-noyau $a(x, y, \xi)$ d'ordre $\leq m$. Posons

$$b(x, \xi) = a_{*2,3}(x, x, \xi) = \int e^{2i\pi x \zeta} \hat{a}^2(x, \zeta, \zeta + \xi) d\zeta ,$$

(l'opération $*$ pour les fonctions de deux variables a été définie au chapitre II : l'indice 2,3 signifie qu'elle s'effectue ici par rapport aux variables y et ξ).

IV.7

Alors :

- 1) $b(x, \xi) \in \mathcal{D}(X \times \Xi; m)$
- 2) $\Lambda = Op(b)$.
- 3) Pour tout $k \geq 1$,

$$b(x, \xi) - \sum_{0 \leq |r| \leq k-1} \frac{1}{r!} (D_2^r \partial_3^r a)(x, x, \xi)$$

appartient à $\mathcal{D}(X \times \Xi; m-k)$.

Preuve : Le premier point résulte de l'égalité

$$\hat{b}^1(\eta, \xi) = \int \hat{a}^{1,2}(\eta - \zeta, \zeta, \zeta + \xi) d\zeta$$

et d'applications répétées de l'inégalité de Peetre.

Le troisième point résulte du développement de Taylor

$$\hat{a}^2(x, \zeta, \zeta + \xi) \sim \sum \frac{1}{r!} (\partial_3^r \hat{a}^2(x, \zeta, \xi)) \zeta^r .$$

Pour le second point, posons $y = x+z$ dans l'intégrale définissant Au :

$$\begin{aligned} (Au)(x) &= \int d\xi \int a(x, x+z, \xi) e^{-2i\pi x \cdot \xi} u(x+z) dz \\ &= \int d\xi \int \hat{a}^2(x, \xi - \zeta, \xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} \hat{u}(\zeta) d\zeta . \end{aligned}$$

L'intégrale double étant sommable, cela s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\int d\xi \int \hat{a}^2(x, \xi, \xi + \zeta) e^{2i\pi x \cdot (\xi + \zeta)} \hat{u}(\zeta) d\zeta \\ &= \int b(x, \xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

avec
$$b(x, \zeta) = \int \hat{a}^2(x, \xi, \xi + \zeta) e^{2i\pi x \xi} d\xi ,$$

ce qui termine la preuve.

Soit Ω un ouvert de X et soit A un opérateur de $\mathfrak{D}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$. Nous dirons que A a son support à gauche compact dans Ω s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour toute fonction $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$, le support de Au soit contenu dans K (noter sans y attacher d'importance que l'on ne suppose pas la même conclusion si u appartient à $\mathfrak{D}(X)$).

Par exemple, appelons support en x d'un symbole $a(x, \xi)$ la projection sur X du support (dans $X \times \Xi$) de a : alors si a a son support en x contenu dans un compact de Ω , $Op(a)$ a son support à gauche compact dans Ω , réciproquement, si tel est le cas, $Op(a)$ coïncide sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ avec un opérateur $Op(b)$, où b a son support en x compact dans Ω .

Cela étant, soit ϕ un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert Ω de X sur un ouvert Ω_1 de X , et soit A un opérateur de $\mathfrak{D}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ ayant son support à gauche compact dans Ω_1 , de sorte que A opère de $\mathfrak{D}(\Omega_1)$ dans $\mathfrak{D}(\Omega_1)$.

Si $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et $u \circ \phi^{-1} \in \mathfrak{D}(\Omega_1)$, $A(u \circ \phi^{-1}) \in \mathfrak{D}(\Omega_1)$ et $[A(u \circ \phi^{-1})] \circ \phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. On peut donc définir, en tant qu'opérateur de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, l'opérateur

$$B = [A(\cdot \circ \phi^{-1})] \circ \phi ,$$

que l'on appelle transformé de A par le difféomorphisme ϕ et que l'on note $B = \phi^*A$.

Théorème (III.1) : Soit ϕ un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert Ω de X sur un ouvert Ω_1 de X et soit $a \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m)$ ayant son support en x contenu dans un compact K de Ω_1 .

Posons $A = Op(a)$.

Il existe alors $b \in \mathcal{L}(X \times \Xi; m)$ ayant son support en x contenu dans le compact $\phi^{-1}(K) \subset \Omega$, telle que l'opérateur $\phi^*A - Op(b)$ opère continûment de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire ait un noyau C^∞).

IV.9

Preuve : Elle est basée sur une idée de Kuranishi.

Il existe un voisinage ouvert V de la diagonale de $\Omega \times \Omega$ et une fonction M de classe C^∞ définie dans V et à valeurs dans le groupe linéaire de X tels que l'on ait, quel que soit $(x,y) \in V$, l'égalité

$$\phi(y) - \phi(x) = M(x,y)(y-x) .$$

Par exemple, si l'on appelle J la différentielle de ϕ , on peut écrire

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_0^1 J((1-t)x + ty)(y-x) dt$$

lorsque x et y sont assez voisins, et l'on peut prendre

$M(x,y) = \int_0^1 J((1-t)x + ty) dt$ en notant que $M(x,y) = J(x)$ et que M est donc inversible dans un voisinage de la diagonale.

Posons $B = \phi^*A$, et soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soient y et y^1 les points courants dans Ω et Ω_1 respectivement. On a

$$\begin{aligned} B u(x) &= \int a(\phi(x), \xi) d\xi \int e^{-2i\pi \langle y^1 - \phi(x), \xi \rangle} u(\phi^{-1}(y^1)) dy^1 \\ &= \int a(\phi(x), \xi) d\xi \int e^{-2i\pi \langle \phi(y) - \phi(x), \xi \rangle} u(y) |\det J(y)| dy . \end{aligned}$$

Soit α une fonction de classe C^∞ dans $\Omega \times \Omega$, à support contenu dans V , égale à 1 dans un voisinage de la diagonale et satisfaisant en outre la propriété suivante :

pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un compact $L \subset \Omega$ tel que les conditions $x \in K$ et $\alpha(x,y) \neq 0$ entraînent $y \in L$.

Comme l'opérateur B , transformé de A , est pseudo-local, B diffère par un opérateur à noyau C^∞ de l'opérateur C défini par

$$\begin{aligned}
Cu(x) &= \int a(\phi(x), \xi) d\xi \int \alpha(x, y) e^{-2i\pi \langle \phi(y) - \phi(x), \xi \rangle} u(y) |\det J(y)| dy \\
&= \int a(\phi(x), \xi) d\xi \int \alpha(x, y) e^{-2i\pi \langle y-x, {}^tM(x, y) \xi \rangle} u(y) |\det J(y)| dy .
\end{aligned}$$

On fait alors le changement de variable

$$\xi = ({}^tM(x, y))^{-1} \zeta .$$

Notons que cela pose certaine difficulté étant donné que l'intégrale double n'est pas sommable en général. On s'en tire, par exemple, en multipliant sous l'intégrale par une fonction $\beta_j(\xi)$ à support compact, la suite (β_j) tendant vers 1.

On obtient alors

$$\begin{aligned}
Cu(x) &= \int d\zeta \int a(\phi(x), {}^tM(x, y)^{-1} \zeta) |\det M(x, y)|^{-1} \alpha(x, y) \dots \\
&\dots e^{-2i\pi \langle y-x, \zeta \rangle} u(y) |\det J(y)| dy .
\end{aligned}$$

La proposition (III.1) permet alors de conclure, en remarquant que la fonction

$$b(x, y, \zeta) = a(\phi(x), {}^tM(x, y)^{-1} \zeta) |\det M(x, y)|^{-1} \alpha(x, y) |\det J(y)|$$

est un symbole-noyau d'ordre $\leq m$ (remarque, pour établir ce point, que les supports de b en x et en y sont compacts, étant données les propriétés de la fonction α).

Remarque (III.1) : Si l'on veut se débarrasser du reste qui figure dans l'énoncé du théorème (III.1), c'est-à-dire l'écrire sous la forme $Op(c)$, on peut le faire, tout au moins dans le cas où A est à bisupport compact : ce reste est en effet, dans ce cas, un opérateur dont le noyau est C^∞ et à bisupport compact, et se laisse définir sous la forme pseudo-différentielle.