A. El Kolli

n^{ime} épaisseur dans les espaces de Sobolev avec poids

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 17, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

$n^{\text{ième}}$ EPAISSEUR DANS LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

par A. El KOLLI

Exposé N°XVII

16 Février 197.

. DEFINITIONS

1) $n^{\text{ième}}$ épaisseur dans un espace vectoriel normé

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, on appelle, selon Kolmogorov, $n^{\text{ième}}$ épaisseur de A dans E le nombre

$$d_n(A,E) = \inf_{E_n \in \mathcal{G}_n(E)} \sup_{x \in A} \inf_{y \in E_n} \|x-y\|_E$$

où $\mathcal{G}_n(E)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de E.

On a les propriétés suivantes :

1- $d_o(A,E)$ est le rayon de la plus petite boule centrée à l'origine contenant A.

2- $d_n(\alpha A,E) = \alpha . d_n(A,E) \quad (\alpha \geq 0)$

3- $A \subset B \Rightarrow d_n(A,E) \leq d_n(B,E)$

4- $d_n(A,E) = 0 \Leftrightarrow$ {Il existe un sous-espace vectoriel de dimension n de E contenant A }.

5- La suite d_n est décroissante. De plus, pour que $d_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ il faut et il suffit que A soit précompact. Un résultat fondamental : le

Théorème de Krein : Soit E_{n+1} un sous-espace de dimension (n+1) d'un espace de Banach E et U_{n+1} la boule unité de E_{n+2}. Alors

$$d_n(U_{n+1},E) = 1$$

Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration de ce théorème dans l'ouvrage de G. G. Lorentz [11].

2) Espaces de Sobolev avec poids

On notera J le pavé ouvert $]0\ 1[^m$ de $\mathbb{R}^m$, $J = J' \times]0\ 1[$, $x = (x',t)$ où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-2}$. Pour tout multi-indice $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)\ \mu_i \in \mathbb{N}$, $|\mu| = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$ et $D^\mu = \dfrac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1}\ldots\partial x_m^{\mu_m}}$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $L^p_{-\beta}(J)$ est l'espace des (classes de) fonctions $u : J \to \mathbb{C}$ telles que $t^{-\beta}u \in L^p(J)$.

k étant un entier positif, on appelle espace de Sobolev $W^{k,p}_\alpha(J)$ l'espace des (classes de) fonctions $u : J \to \mathbb{C}$ telles que $t^\alpha D^\mu u$ appartienne à $L^p(J)$ pour $|\mu| \leq k$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|^p_{W^{k,p}_\alpha(J)} = \sum_{|\mu|\leq k} \|t^\alpha D^\mu u\|^p_{L^p(J)}$$

$\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(J)$ dans $W^{k,p}_\alpha(J)$. Sur $\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)$ $\left(\sum_{|\mu|=k} \|t^\alpha D^\mu u\|^p_{L^p(J)}\right)^{1/p}$ est une norme équivalente à $\|u\|_{W^{k,p}_\alpha(J)}$ si $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,2,\ldots,k\}$ - [4].

Etant donné deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ on dit que $u_n \approx v_n$ s'il existe deux constantes positives A et B telles que $Au_n \leq v_n \leq Bu_n$ pour "n assez grand".

SE désignera la boule unité d'un espace normé E.

II . $n^{\text{ième}}$ EPAISSEUR DANS LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

Lemme II.1 : Pierre Grisvard [6]

Pour $1 < p < +\infty$, k entier positif, α réel tel que $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,2,\dots,k\}$ on a

$$\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J) \hookrightarrow L^{p}_{\alpha-k}(J)$$

Démonstration par récurrence

1- k = 1 pour $u \in \mathscr{D}(J)$ on a

$$|u(x',t)| \le \int_o^t \left|\frac{\partial}{\partial s} u(x',s)\right| ds \qquad \text{si } \alpha+\frac{1}{p} < 1$$

$$|u(x',t)| \le \int_t^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial s} u(x',s)\right| ds \qquad \text{si } \alpha+\frac{1}{p} > 1$$

$$\int_o^1 dx' \int_o^1 t^{(\alpha-1)p} |u(x',t)|^p dt = \int_o^{+\infty} dx' \int_o^{+\infty} t^{(\alpha-1)p} |u(x',t)|^p dt$$

$$\le \int_o^{+\infty} dx' \left(\frac{p}{|\alpha p+1-p|}\right)^p \int_o^{+\infty} t^{\alpha p} \left|\frac{\partial}{\partial t} u(x',t)\right|^p dt \text{ (Inégalité de Hardy)}$$

$$\le \left(\frac{p}{|\alpha p+1-p|}\right)^p \int_o^1 dx' \int_o^1 t^{\alpha p} \left|\frac{\partial}{\partial t} u(x',t)\right|^p dt$$

$$\le C.\ \|u\|^p_{\overset{o}{W}{}^{1,p}_{\alpha}(J)}$$

Comme $\mathscr{D}(J)$ est dense dans $\overset{o}{W}{}^{1,p}_{\alpha}(J)$ cette inégalité se prolonge à $\overset{o}{W}{}^{1,p}_{\alpha}(J)$.

2- Soit u un élément de $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)$.

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\ (j = 1,..,n-1),\ \frac{\partial u}{\partial t} \text{ sont des éléments de } \overset{o}{W}{}^{k-1,p}_{\alpha}(J)$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, de $L^p_{\alpha-k+1}(J)$; ce qui implique que u appartient à $\overset{o}{W}{}^{1,p}_{\alpha-k+1}(J)$.

$$u \in \overset{o}{W}{}^{1,p}_{\alpha-k+1}(J) \hookrightarrow L^p_{\alpha-k}(J)$$

<u>Lemme II.2</u> P. Bolley et J. Camus [4]

Pour $1 < p < +\infty$, k entier positif, α réel tel que $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,2,\dots,k\}$, ρ réel l'application

$$u \longmapsto t^{\rho} u$$

est un isomorphe de $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)$ sur $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha-\rho}(J)$

<u>Démonstration</u>

Posons $\mu = (\mu', \mu_m)$ $\quad D^{\mu} = \dfrac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} D^{\mu'}$

$$D^{\mu}(t^{\rho}u) = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} D^{\mu'} t^{\rho} u = \frac{\partial^{\mu_m}}{\partial t^{\mu_m}} t^{\rho} D^{\mu'} u$$

$$= \sum_{j=0}^{\mu_m} A_j\ t^{\rho-j} \frac{\partial^{\mu_m - j}}{\partial t^{\mu_m - j}} D^{\mu'} u$$

Pour $u \in \overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)$ $\quad \dfrac{\partial^{\mu_m - j}}{\partial t^{\mu_m - j}} D^{\mu'} u \in \overset{o}{W}{}^{k-|\mu'|-\mu_m+j,p}(J) \hookrightarrow L^p_{\alpha-k+|\mu'|+\mu_m-j}(J)$

$$\text{et } t^{\rho-j} \frac{\partial^{\mu_m - j}}{\partial t^{\mu_m - j}} D^{\mu'} u \in L^p_{\alpha-k+|\mu'|+\mu_m-\rho}(J) \hookrightarrow L^p_{\alpha-\rho}(J)$$

Ce qui implique que

$$D^{\mu}(t^{\rho}u) \in L^p_{\alpha-\rho}(J) \quad \text{pour } |\mu| \leq k$$

Il est clair que l'application est injective et que la bijection réciproque est l'application $u \longmapsto t^{-\rho}u$.

Théorème II.1 : Pour $1 < p < +\infty$, k entier positif, α et β réels tels que $\alpha + \beta < k$ posons $d_n = d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J),\ L^p_{-\beta}(J))$, alors :

1. Si $\alpha + \beta < \frac{k}{m}$ $\quad d_n \approx n^{-\frac{k}{m}}$
2. Si $\alpha + \beta = \frac{k}{m}$ et $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,2,\ldots k\}$ il existe une constante positive B telle que

$$d_n \leq B \left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)^{\frac{k}{m}}$$

3. Pour $\frac{k}{m} < \alpha+\beta < k$ et si $\beta < 0$, $\alpha+\frac{1}{p} \notin \{1,2,\ldots,k\}$

$$d_n \approx n^{-\frac{k-(\alpha+\beta)}{m-1}}$$

Démonstration

1ère partie : Nous commençons par ramener le problème au cas où α et β sont de même signe

1. $\alpha < 0$ et $\beta \geq 0$

$\alpha + \frac{1}{p} < 1$ et l'application

$$u \longmapsto t^{\alpha}u$$

est un isomorphisme de $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)$ sur $\overset{o}{W}{}^{k,p}(J)$ et de $L^p_{-\beta}(J)$ sur $L^p_{-(\alpha+\beta)}($

ce qui implique :

$$d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J), L^p_{-\beta}(J)) \approx d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}(J), L^p_{-(\alpha+\beta)}(J))$$

2. $\alpha \geq 0$ et $\beta < 0$

Si $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,2,\ldots,k\}$ l'application $u \longmapsto t^{-\beta}u$ est un isomorphisme simultané de $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)$ sur $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha+\beta}(J)$ et de $L^p_{-\beta}(J)$ sur $L^p(J)$: ce qui implique :

$$d_r(S\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J),\ L^p_{-\beta}(J)) \approx d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha+\beta}(J), L^p(J))$$

Si $\alpha+\frac{1}{p} \in \{1,2\ \ldots,k\}$ il existe α' et α'' tels que $\alpha' < \alpha < \alpha''$ $\alpha' + \frac{1}{p} \notin \{1,2,..,k\}$, $\alpha'' + \frac{1}{p} \notin \{1,2,..,k\}$, vérifiant les mêmes inégalités que α. Les inclusions

$$\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha'}(J) \hookrightarrow \overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J) \hookrightarrow \overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha''}(J)$$

nous permettent de conclure.

<u>2ème partie</u> Démonstration du théorème pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

1. Majoration

Dans toute la démonstration C désigne une constante positive qui dépend de α, β, k, p, qui ne sera pas toujours la même.

1.a Soit δ un nombre réel tel que $0 < \delta < 1$. On approche u par 0 sur le pavé $J' \times]0\ \delta[$.

Si $\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,2,..,k\}$ d'après le lemme II.1

$$\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J) \hookrightarrow L^p_{\alpha-k}(J) \hookrightarrow L^p_{-\beta}\ (J)$$

alors :

$$\int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{-\beta p}|u(x)|^p dt = \delta^{1-\beta p} \int_{J'} dx' \int_0^1 s^{-\beta p}|u(x',\delta s)|^p ds$$

$$\leq C.\delta^{1-\beta p}\int_{J'} dx \int_0^1 s^{(\alpha-k)p}|u(x',\delta s)|^p ds$$

$$= C.\ \delta^{kp-(\alpha+\beta)p}\int_{J'} dx' \int_0^{\delta} t^{(\alpha-k)p}|u(x',t)|^p dt$$

$$\leq C.\delta^{kp-(\alpha+\beta)p}\|u\|^p_{L^p_{\alpha-k}(J)}$$

$$\leq C.\delta^{kp-(\alpha+\beta)p}\|u\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)} \qquad (1)$$

si $\alpha + \frac{1}{p} \in \{1,2,\dots,k\}$ il existe $\alpha' > \alpha$ tel que $\alpha' + \frac{1}{p} \notin \{1,\dots,k\}$ et $\alpha + \beta < \alpha' + \beta < k$. Alors $\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J) \hookrightarrow \overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha'}(J)$ implique

$$\int_J dx' \int_0^\delta t^{-\beta p}|u(x)|^p dt \leq C.\delta^{kp-(\alpha'+\beta)p}\|u\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)} \qquad (1')$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, (1) ou (1') implique

$$\int_{J'} dx' \int_0^\delta t^{-\beta p}|u(x)|^p dt \leq \varepsilon^p\|u\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)} \qquad (2)$$

en prenant

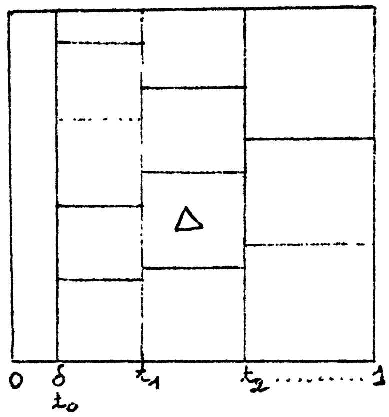
$$C.\delta^{kp-(\alpha+\beta)p} = \varepsilon^p \quad \text{si } \alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,\dots,k\}$$

$$C.\delta^{kp-(\alpha'+\beta)p} = \varepsilon^p \quad \text{si } \alpha + \frac{1}{p} \in \{1,\dots,k\}$$

1.b On partage maintenant $J' \times]\delta \ \ 1[$ en cubes Δ. Sur chaque cube Δ on approche la fonction u par un polynome $P_\Delta u$ de degré $(k-1)$ tel que

$$\int_\Delta (D^\mu u(x) - D^\mu P_\Delta u(x))dx = 0 \text{ pour } |\mu| < k.$$

On obtient les cubes Δ de la manière suivante :
on divise $]\delta \ \ 1[$ par des points $t_o = \delta \ t_1 \dots t_h = 1$; si $l_j = t_j - t_{j-2}$, pour $t_{j-1} < t < t_j$ le cube Δ a pour côté l_j.



On détermine l_j de manière à avoir

$$\int_\Delta |u-P_\Delta u|^p \ t^{-\beta p} \ dx'dt \leq C. \ \varepsilon^p \int_\Delta \sum_{|\mu|=k} |D^\mu \ u(x)|^p t^{\alpha p} dx'dt$$

Alors si on appelle Ξ la subdivision de J obtenue et P_Ξ l'opération qui, à u, fait correspondre 0 pour $t < \delta$, $P_\Delta u$ pour $t > \delta$

$$\int_J |u - P_\Xi \ u|^p t^{-\beta p} \ dx'dt \leq C. \varepsilon^p \sum_{|\mu|=k} \|t^\alpha \ D^\mu u\|^p_{L^p(J)}$$

soit $\|u-P_\Xi \ u\|_{L^p_{-\beta}(J)} \leq C. \varepsilon \ \|u\|_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)}$

<u>Détermination de l_j</u>

$\int_\Delta |u(x)-P_\Delta \ u(x)|^p t^{-\beta p} \ dx \leq t_{j-1}^{-\beta p} \int_\Delta |u(x)-P_\Delta u(x)|^p dx$

On utilise l'inégalité de Poincaré. Comme $\int_\Delta (u(x)-P_\Delta u(x))dx = 0$

$$\int_\Delta |u(x) - P_\Delta u(x)|^p \, dx \le C.\ (t_j - t_{j-1})^p \int_\Delta \sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} P_s u(x)\right|^p dx$$

$$(x_m = t)$$

On applique à nouveau l'inégalité de Poincaré autant de fois que cela est nécessaire et on obtient

$$\int_\Delta |u(x) - P_\Delta u(x)|^p t^{-\beta p} dx \le C.t_{j-1}^{-\beta p}\ l_j^{kp} \int_\Delta \sum_{|\mu|=k} |D^\mu\ u(x)|^p dx$$

$$\le C.t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)p} l_j^{kp} \int_\Delta \sum_{|\mu|=k} t^{\alpha p} |D^\mu (x)|^p dx$$

On veut que

$$\max_j\ C\ t_{j-1}^{-(\alpha+\beta)p} l_j^{kp} \le \varepsilon^p \text{ soit } l_j \le C.\varepsilon^{\frac{1}{k}}\ t_{j-1}^{\frac{\alpha+\beta}{k}} \quad \forall\ j$$

Posons à priori $l_j = a.\varepsilon^\sigma.j^\gamma$ où a est une constante

$$\sigma = \frac{1}{k - (\alpha+\beta)} \text{ et } \gamma = (\alpha+\beta)\sigma. \text{ Alors}$$

$$t_j = \sigma + a.\varepsilon^\sigma. \sum_{r=1}^j r^\gamma$$

Comme

$$\sum_{r=1}^j r^\gamma \approx j^{\gamma+1} = j^{k\sigma} \quad \text{et} \quad \delta \approx \varepsilon^\sigma \text{ si } \alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,..,k\}$$

$$\delta \approx \varepsilon^{\frac{1}{k-(\alpha'+\beta)}} \text{ si } \alpha + \frac{1}{p} \in \{1,..,k\}$$

$$\alpha' > \alpha$$

$$t_j \approx \varepsilon^{\sigma} . j^{k\sigma}$$

et $l_j \; t_{j-1}^{-\frac{\alpha+\beta}{k}} \approx \varepsilon^{\frac{1}{k}} \quad \forall j$

Soit h tel que $t_{h-1} < 1 \leq t_h$

$$t_h \approx 1 \approx \varepsilon^{\sigma} h^{k\sigma}$$

$$\text{soit } h^{-k} \approx \varepsilon \qquad (3)$$

* Pour m = 1 on a approché tout élément de la boule unité de $\overset{o}{W}{}_{\alpha}^{k,p}(J)$ par un sous-espace vectoriel de dimension n = h+1 et il existe une constante B positive telle que

$$d_n(S\overset{o}{W}{}_{\alpha}^{k,p}(J),\ L^p_{-\beta}(J)) \leq B, n^{-k}$$

** Pour m > 1, évaluons le nombre n de cubes Δ de la subdivision Ξ

$$n = \sum_{j=1}^{h} l_j^{-(m-1)} + 1 \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)}} \sum_{j=1}^{h} j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}}$$

si $\alpha+\beta < \frac{k}{m}$ $\quad \sum_{j=1}^{h} j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}} \approx h^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)} + 1} = h^{\frac{k-m(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}}$

$$\text{soit } n \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)} - \frac{k-m(\alpha+\beta)}{k[k-(\alpha+\beta)]}} = \varepsilon^{-\frac{m}{k}}$$

et $d_n(S\overset{o}{W}{}_{\alpha}^{k,p}(J),\ L^p_{-\beta}(J)) \leq B . n^{-\frac{k}{m}}$

si $\alpha+\beta > \frac{k}{m}$ $\quad \sum_{j=1}^{h} j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}} \approx 1$

$$\text{soit } n \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)}}$$

et $d_n(\overset{o}{SW}{}^{k,p}_{\alpha}(J), L^p_{-\beta}(J)) \leq B.\ n^{-\frac{k-(\alpha+\beta)}{m-1}}$

si $\alpha+\beta = \frac{k}{m}$ $\qquad \sum_{j=1}^{h} j^{-\frac{(m-1)(\alpha+\beta)}{k-(\alpha+\beta)}} = \sum_{j=1}^{h} j^{-1} \sim \text{Log } h$

$$n \approx \varepsilon^{-\frac{m-1}{k-(\alpha+\beta)}} \text{Log } h = \varepsilon^{-\frac{m}{k}} \text{Log } h \approx \varepsilon^{-\frac{m}{k}} \text{Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$$

$$\text{Log } n \sim -\frac{m}{k} \text{Log } \varepsilon + \text{Log Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\text{Log } n}{n} \approx \varepsilon^{\frac{m}{k}} + \frac{\text{Log Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}}{\text{Log } \varepsilon^{-\frac{1}{k}}}$$

$$\frac{\text{Log } n}{n} \approx \varepsilon^{\frac{m}{k}} \quad ; \quad \left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)^{\frac{k}{m}} \approx \varepsilon$$

et $d_n(\overset{o}{SW}{}^{k,p}_{\alpha}(J),\ L^p_{-\beta}(J)) \leq B.\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{k}{m}}$

Remarque

Dans certains cas, par exemple $\alpha=0$, $\beta < \frac{1}{p}$ et $m < kp$ ou bien $\alpha=0$ et $m \geq kp$ on retrouve des cas particuliers de résultats de M. Birman et M.Z. Solomjak [3]

2. Minoration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(J)$. On partage $]0\ 1[$ en s sous-intervalles et on obtient une partition de J en s^m cubes J_l de côté $\frac{1}{s}$. On définit φ_l par $\varphi_l(x) = \varphi(sx-l)$ $\quad l = (l_1,\ldots,l_m)$. Alors $\varphi_l \in \mathcal{D}(J_l)$.

* Pour $0 \leq \alpha+\beta < \frac{k}{m}$.

Soit E_{n+1} le sous-espace de $L^p_{-\beta}(J)$ engendré par les fonctions φ_l. Si $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$; $E_{n+1} = \{f_\gamma = \sum_l \gamma_l\ \varphi_l\}$; dim $E_{n+1} = n+1 = s^m$

$$\|f_\gamma\|^p_{L^p_{-\beta}(J)} = \int_J |\sum_l \gamma_l \varphi_l(x)|^p \, t^{-\beta p} dx \geq \int_J |\sum_l \gamma_l \cdot \varphi_l(x)|^p dx$$

$$\geq \sum_l |\gamma_l|^p \int_{J_l} |\varphi_l(x)|^p dx = s^{-m} \sum_l |\gamma_l|^p \, \|\varphi\|^p_{L^p(J)}$$

$$\|f_\gamma\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)} = \sum_{|\mu|\leq k} \|t^\alpha D^\mu f_\gamma\|^p_{L^p(J)} = \sum_{|\mu|\leq k} \int_J t^{\alpha p} |\sum_l \gamma_l D^\mu \varphi_l(x)|^p dx$$

$$\leq \sum_{|\mu|\leq k} \int_J |\sum_l \gamma_l \, D^\mu \varphi_l(x)|^p dx = \sum_{|\mu|\leq k} \sum_l |\gamma_l|^p \int_{J_l} |D^\mu \varphi_l(x)|^p dx$$

$$= \sum_{|\mu|\leq k} \sum_l |\gamma_l|^p \int_{J_l} s^{|\mu|p} |(D^\mu \varphi)_l(x)|^p dx$$

$$= s^{-m} \sum_l |\gamma_l|^p \sum_{|\mu|\leq k} s^{|\mu|p} \int_J |D^\mu \varphi(x)|^p dx$$

$$\leq C_\circ \, s^{-m} \sum_{|\mu|\leq k} s^{|\mu|p} = C \, s^{-m} \sum_{r=0}^{k} s^{rp}$$

$$\sum_{r=0}^{k} s^{rp} \sim s^{kp}$$

$$\|f_\gamma\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k.p}_\alpha(J)} \leq C_\circ s^{kp-m}$$

et $\|f_\gamma\|_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)} \leq C_\circ s^k \, \|f_\gamma\|_{L^p_{-\beta}(J)}$

La boule B_r de rayon $r = C^{-1} s^{-k}$ de E_{n+1} est donc contenue dans la boule unité de $\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)$. En utilisant le théorème de Krein et les propriétés de la $n^{\text{ième}}$ épaisseur, on obtient :

$$d_n(\overset{o}{SW}{}^{k,p}_{\alpha}(J),\ L^p_{-\beta}(J) \geq d_n(B_r, L^p_{-\beta}(J)) = C^{-1}s^{-k}$$

Comme $(n+1) = s^m$, $n \sim s^m$. Il existe donc une constante positive A telle que

$$d_n(\overset{o}{SW}{}^{k,p}_{\alpha}(J),\ L^p_{-\beta}(J)) \geq A.n^{-\frac{k}{m}}$$

** Pour $\frac{k}{m} < \alpha+\beta < k$

Soit E_{n+1} le sous-espace de $L^p_{-\beta}(J)$ engendré par les fonctions φ_l telles que $l_m = 0$

$$E_{n+1} = \{f_\gamma = \sum_{l_m=0} \gamma_l\ \varphi_l\} \quad \dim E_{n+1} = n+1 = s^{(m-1)}$$

$$\|f_\gamma\|_{L^p_{-\beta}(J)} = \int_J |\sum_{l_m=0} \gamma_l\ \varphi_l(x)|^p t^{-\beta p} dx \geq s^{\beta p}\int_J |\sum_{l_m=0} \gamma_l\ \varphi_l(x)|^p dx$$

$$\|f_\gamma\|^p_{L^p_{-\beta}(J)} \geq s^{\beta p} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_l} |\varphi_l(x)|^p dx = s^{\beta p-m} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \|\varphi\|^p_{L^p(J)}$$

$$\|f_\gamma\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(J)} = \sum_{|\mu|\leq k} \int_J |\sum_{l_m=0} \gamma_l\ D^\mu\varphi_l(x)|^p t^{\alpha p} dx$$

$$= \sum_{|\mu|\leq k} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_l} t^{\alpha p}|D^\mu\varphi_l(x)|^p dx$$

$$\leq s^{-\alpha p} \sum_{|\mu|\leq k} \sum_{l_m=0} |\gamma_l|^p \int_{J_l} |D^\mu\varphi_l(x)|^p dx$$

Un calcul identique au précédent (cas $\alpha+\beta < \frac{k}{m}$) donne

$$\|f_\gamma\|^p_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)} \leq C.s^{kp-\alpha p-m}$$

$$\text{et } \|f_\gamma\|_{\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J)} \leq C.s^{k-(\alpha+\beta)}\|f_\gamma\|_{L^p_{-\beta}(J)}$$

En utilisant le théorème de Krein

$$d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J),\ L^p_{-\beta}(J)) \geq A.\ n^{-\frac{k-(\alpha+\beta)}{m-1}}$$

<u>3ème partie</u> : démonstration du théorème pour $\alpha < 0$, $\beta < 0$

La majoration est une conséquence de

$$\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J) \hookrightarrow \overset{o}{W}{}^{k,p}(J) \hookrightarrow L^p(J) \hookrightarrow L^p_{-\beta}(J)$$

$$d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}_\alpha(J), L^p_{-\beta}(J)) \leq d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}(J),\ L^p_{-\beta}(J) \leq d_n(S\overset{o}{W}{}^{k,p}(J), L^p(J))$$

<u>Minoration</u>

Soient $a = (\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$, $Q = \frac{1}{2}J + a$

On reprend la démonstration faite dans le cas $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta < \frac{k}{m}$ en substituant le cube Q au cube J.

2- <u>Généralisation</u>

Soient $\overline{\Omega}$ une variété à bord C^∞, compacte, de dimension m et φ une fonction de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$, positive dans Ω, nulle à l'ordre 1 au bord.

On appelle espace de Sobolev $W^{k,p}_\alpha(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\varphi^\alpha.D^\mu u \in L^p(\Omega)$ pour $|\mu| \leq k$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|^p_{W^{k,p}_\alpha(\Omega)} = \sum_{|\mu|\leq k} \|\varphi^\alpha . D^\mu u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$\overset{o}{W}{}^{k,p}_{\alpha}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathscr{D}s(\Omega)$ dans $W^{k,p}_\alpha(\Omega)$.

$L^p_{-\beta}(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions $u : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\varphi^{-\beta}\mu \in L^p(\Omega)$.

Le théorème II.1 est encore valable si on substitue Ω à J. La démonstration se fait par cartes locales et partition de l'unité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn, R. Adams, K. T. Smith : Theory of Bessel Potentials Part II, Annales de l'Institut Fourier Tome XVII Fasc.2 1967.

[2] M. S. Baouendi, C. Goulaouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés ; Archive for Rat. Mech. and Anal. Vol.34, N°5, 1969, p.361.

[3] M. Birman, M. Z. Solomjak : Approximation polynomiale par morceaux des fonctions de classe $W^{\alpha,p}$, Math. Sbornik t.73 (115) 3 1967 § 3.

[4] P. Bolley, J. Camus : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids, Séminaire d'analyse fonctionnelle , Université de Rennes 1968-69

[5] L. Boutet de Monvel, P. Grisvard : Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un problème aux limites, C. R. Acad. Sc.

[6] P. Grisvard : Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids, Scuola Normale Superiore, Pisa Serie III, Vol.XVII, Fasc.3 (1963)

[7] A. N. Kolmogorov : Uber die beste Annäherung von functionen einer gegebenen Funktionenklasse, Ann. of Math. (2) 37, 1936 p.107-111

[8] J. L. Lions : Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Séminaire de Math. Sup. Montréal 1962

[9] J. L. Lions, E. Magenes : Scuola Normale Superiore, Pisa 15, 1961 p.39-101

[10] J. L. Lions, J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation I.H.E.S. N°19, 1964

[11] G. G. Lorentz : Approximation of functions, Holt Rienhart and Winston 1966 p.137-139

[12] J. Marcinkievicz : Sur les multiplicateurs des séries de Fourier Studia Mathematica, 8, 1939

[13] Mihlin : Intégrales singulières à plusieurs variables et équations intégrales, Moscou 1962

[14] R. T. Seeley : Extension of C^{∞} functions defined in a half space Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 15 N°4 August 1964

[15] M. Z. Solomjak, V. H. Tihomirov : Geometric characteristics of imbedding of the classes $W^{\alpha,p}$ in C, Izo Vysš Učebn Zaved Matematica Tome 10, N°65, 1967, p.76 à 82

[16] A. El Kolli : $n^{\text{ième}}$ épaisseur dans les espaces de Sobolev , Thèse Alger 1969

[17] A. Mostefaï : ε-entropie dans les espaces de Sobolev, Thèse Alger 1970.