Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Hanouzet

Caractérisation de classes de fonctions C^∞ par des itères d'opérateurs elliptiques dégénérés sur des ouverts irréguliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 2, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

CARACTERISATION DE CLASSES DE FONCTIONS C^∞ PAR DES ITERES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES SUR DES OUVERTS IRREGULIERS

par B. HANOUZET

Exposé N° II

20 Octobre 1971

On se propose de généraliser les résultats de M.S. Baouendi et C. Goulaouic [2] à des ouverts dont le bord est C^∞ (ou analytique) par morceaux. Donnons tout de suite un exemple des résultats obtenus : soit $\Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 ; -1 < x_1 < +1,\ -1 < x_2 < +1\}$ et soit $\mathcal{A}$ l'opérateur :

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial x_1}((1-x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}((1-x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}) + I .$$

$\mathcal{A}$ réalise un automorphisme de $C^\infty(\overline{\Omega})$, de $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ et on a un théorème du type de Kotake et Narasimhan [6] : soit $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$; pour que u soit analytique sur $\overline{\Omega}$ il faut et il suffit qu'il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\quad \|\mathcal{A}^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{k+1}(2k)\,!$$

Dans la suite on étudie des opérateurs permettant d'obtenir ces résultats (entre autres) pour des ouverts "à frontière voisine du cube" c'est-à-dire des ouverts qui peuvent se représenter localement au bord sur $(\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Le plan de l'étude est le suivant :

§ 1. Notations. Description des opérateurs.
§ 2. Domaine des itérés. Régularité C^∞.
§ 3. Théorème des itérés. Régularité analytique.
§ 4. Théorie spectrale. Applications.

§ 1. NOTATIONS. DESCRIPTION DES OPERATEURS.

1°) On donne p fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et on suppose que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \varphi_i(x) > 0, \quad i = 1,2,\ldots,p\}$$

est un ouvert <u>borné</u> de $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \Gamma = \partial\Omega$ on note

$$I(x) = \{i \in \{1,\dots,p\},\ \varphi_i(x) = 0\}$$

$|I(x)|$ le nombre d'éléments de $I(x)$

On suppose que :

. $\forall\, x \in \Gamma,\quad |I(x)| \leq n$

. si $|I(x)| = k$, le système $\{\operatorname{grad} \varphi_i(x)\}_{i \in I(x)}$ est de rang k.

Un tel ouvert peut être représenté localement sur un morceau de cube ; plus précisément, si $x_o \in \Gamma$ avec $I(x_o) = \{1,2,\dots,k\}$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de x_o et un difféomorphisme θ de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\theta(\mathcal{O} \cap \Omega) = \mathcal{O}' \cap ((\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k})$$

$$\theta(\mathcal{O} \cap \Gamma) = \mathcal{O}' \cap \partial((\mathbb{R}_+)^k \times \mathbb{R}^{n-k})$$

On peut prendre par exemple

$$(1.1) \qquad \theta \begin{cases} x_i' = \varphi_i(x) & i = 1,2,\dots,k \\ x_i' = \theta_i(x) & i = k+1,\dots,n \end{cases}$$

où les θ_i sont n-k solutions indépendantes du système :

$$\sum_{l=1}^{n} (D_l \varphi_j)(D_l \theta_i) = 0, \qquad j = 1,\dots,k.$$

2°) Nous construisons un opérateur attaché à la nature géométrique de l'ouvert Ω. On pose

$$J = \{I(x)\ ;\ x \in \Gamma\},$$

$$\Phi = \varphi_1 \cdots \varphi_p ,$$

pour $(i_1,\dots,i_k) \in J$, $\quad \Phi_{i_1 \dots i_k} = \dfrac{\Phi}{\varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_k}}$.

On construit un opérateur généralisant celui de [2] en superposant à celui étudié dans [5] des opérateurs tangentiels ou dégénérés au bord. Pour cela nous a avons besoin du résultat suivant :

<u>Lemme 1.1</u> : Pour chaque $(i_1 \dots i_k) \in J$ avec $k \leq n-1$, il existe un système $\mathfrak{X}_{i_1 \dots i_k}$ de vecteur C^∞ de rang inférieur ou égal à $n-k$ et tel que l'on ait pour $x \in \Gamma$:

1 - Si $I(x) \subset (i_1, \dots, i_k)$, le champ $\mathfrak{X}_{i_1, \dots, i_k}$ est tangent aux surfaces $\{\varphi_j(x) = 0\}$ pour $j \in I(x)$.

2 - Si $I(x) \supset (i_1, \dots, i_k)$, le rang de $\mathfrak{X}_{i_1, \dots, i_k}$ est $n-k$.

Pour $X = (X_1, \dots, X_n)$ vecteur de $\mathbb{R}^n$ on note

$$X.D = \sum_{i=1}^{n} X_i \, D_i$$

l'opérateur de dérivation suivant X.

On introduit une forme intégro-différentielle sur $(\mathcal{F}(\Omega))^2$:

$$(1.2) \quad \begin{cases} a(u,v) = \int_\Omega u \, \bar{v} \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \Phi \, D_i \, u \, \overline{D_i v} \, dx \\ + \sum\limits_{\substack{(i_1 \dots i_k) \in J \\ 1 \leq k \leq n-1}} \int_\Omega \Phi_{i_1 \dots i_k} \sum\limits_{X \in \mathfrak{X}_{i_1 \dots i_k}} X.D \, u \, \overline{X.Dv} \, dx \end{cases}$$

à laquelle on associe l'opérateur

$$(1.3) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(x,D) = I + \sum_{i=1}^{n} D_i (\Phi \, D_i) \\ + \sum\limits_{\substack{(i_1 \dots i_k) \in J \\ 1 \leq k \leq n-1}} \sum\limits_{X \in \mathfrak{X}_{i_1 \dots i_k}} (X.D)^* (\Phi_{i_1 \dots i_k} \, X.D) \end{cases}$$

Remarque : dans le cas de l'exemple donné dans l'introduction, ce procédé de construction donne

$$\mathcal{A} = I + \sum_{i=1,2} D_i((1-x_1^2)(1-x_2^2)\, D_i)$$

$$+ D_2((1-x_2)(1+x_1)(1+x_2)D_2) + D_1((1-x_1)(1+x_1)(1+x_2)D_1)$$

$$+ D_2((1-x_1)(1-x_2)(1+x_2)D_2) + D_1((1-x_1)(1-x_2)(1+x_1)D_1).$$

Par la suite nous aurons besoin essentiellement de la forme locale de l'opérateur $\mathcal{A}$:

<u>Proposition 1.1</u> : Soit $x_0 \in \Gamma$ tel que $I(x_0) = (1,.,k)$. L'opérateur $\mathcal{A}(x.D)$ se transforme par difféomorphisme du type (1.1) en un opérateur au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ de la forme :

$$(1.4)\quad \begin{cases} A(x,D) = \sum_{i=1}^{k} a_i\, D_i(y_i D_i) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, y_i\, D_i(y_j\, D_j) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\mu|\le 1} b_{i,\mu}\, y_i\, D_i\, D_z^{\mu} + \sum_{|\mu|\le 2} c_\mu\, D_z^{\mu} \end{cases}$$

où $x = (y_1,\dots,y_k, z_{k+1},\dots,z_n) \in \mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

3°) Nous posons le problème par la méthode variationnelle. Nous introduisons l'espace :

$$(1.5)\quad \begin{cases} \mathcal{V}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)\,;\ \Phi^{1/2}\, D_i u \in L^2(\Omega),\ i = 1,\dots,n\ ; \\ \qquad \Phi^{1/2}_{i_1\dots i_k}(X.D)u \in L^2(\Omega),\ (i_1,\dots,i_k) \in J,\ 1 \le k \le n-1, \\ \qquad X \in \mathfrak{X}_{i_1\dots i_k}\} \end{cases}$$

Au voisinage de $x \in \Gamma$ tel que $I(x) = (1,\dots,k)$, $\mathcal{V}(\Omega)$ se représente localement dans l'espace :

$$(1.6)\quad \begin{cases} V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})\ ; \\ \sqrt{y_i}\, D_i u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}),\ i = 1,\dots,k\ ; \\ D_i u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}),\ i = k+1,\dots,n\}. \end{cases}$$

On démontre que $\mathcal{V}(\Omega)$ est un espace normal de distributions contenu dans $L^2(\Omega)$. La forme $a(u,v)$ donnée par (1.2) est évidemment continue sur $\mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ et $\mathcal{V}(\Omega)$-coercitive. On en déduit :

<u>Proposition 1.2</u> : L'opérateur $\mathcal{A}(x,D)$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}(\Omega)$ sur son dual $\mathcal{V}'(\Omega)$.

La coercitivité de $a(u,v)$ a aussi par conséquence une inégalité de Garding ; plus précisément :

<u>Proposition 1.3</u> :

1 - L'opérateur $\mathcal{A}(x,D)$ est elliptique à l'intérieur de Ω.

2 - Les coefficients de l'opérateur A donné par (1.4) vérifient :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \exists\, \alpha > 0 \mid \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n : \\ \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i(0)\, \xi_i^2 + \sum_{|\mu|=2} c_\mu(0)\, \xi^\mu \right)^{\bullet} \geq \alpha |\xi|^2 \end{cases}$$

Remarque : ces deux dernières propositions peuvent être obtenues, pour des formes $a(u,v)$ plus générales que celle donnée par (1.2). Pour l'étude locale nous utiliserons essentiellement (1.4) et (1.7).

§ 2. DOMAINE DES ITERES DE $\mathcal{A}$. REGULARITE C^∞.

On pose $D(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{V}(\Omega) \ ; \ \mathcal{A}u \in L^2(\Omega)\}$ et pour $m \geq 2$ $D(\mathcal{A}^m) = \{u \in D(\mathcal{A}^{m-1}) \ ; \ \mathcal{A}u \in D(\mathcal{A}^{m-1})\}$. Comme $\mathcal{A}$ est elliptique dans Ω on a :

$$D(\mathcal{A}^m) \hookrightarrow H^{2m}_{loc}(\Omega)$$

La difficulté réside donc dans l'étude de la régularité au bord. L'idée directrice est que le changement de variables $y = s^2 + t^2$ fait passer de $D_y(y\, D_y)$ sur $]0,\infty[$ à l'opérateur $\frac{1}{4}(D_t^2 + D_s^2)$ sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$. Cette

---

$\bullet$ Les indices μ sont de la forme $\mu = (0,\dots,0,\mu_{k+1},\dots,\mu_u)$

remarque nous permet de ramener l'étude de $\mathcal{A}$ au bord à l'étude d'un opérateur elliptique sur un ouvert en dimension plus grande. Soit $x_0 \in \Gamma$ avec $I(x_0) = (1,\dots,k)$; pour étudier le problème localisé dans $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ on utilise le changement de variables :

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} y_i &= s_i^2 + t_i^2 , && 1 \le i \le k, \\ z_i &= z_j, && k+1 \le j \le n . \end{aligned}$$

qui transporte le problème dans $(\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

1°) <u>Transformation des espaces et des opérateurs</u>

- Transformé de l'espace $V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ par (2.1). A u définie sur $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ on fait correspondre v définie sur $(\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ par :

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} v(s,t,z) &= v(s_1,t_1,\dots,s_k,t_k,z_{k+1},\dots,z_n) \\ &= u(s_1^2+t_1^2,\dots,s_k^2+t_k^2,\ z_{k+1},\dots,z_n) \end{aligned}$$

le changement de variables (2.1) donne facilement le résultat suivant :

<u>Lemme 2.1</u> : Pour que u soit dans $V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ il faut et il suffit que v donnée par (2.2) soit dans $H^1(\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Nous allons maintenant comparer les dérivations dans $\mathcal{D}'((\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

(2.2') $\left\{\begin{array}{l} \text{Si } u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ la fonction v donnée par (2.2) définit} \\ \text{une distribution de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) \text{ car } v \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{nk}). \\ \text{Nous notons } \tilde{v} \text{ cette distribution.} \end{array}\right.$

On a alors

<u>Lemme 2.2</u> : Pour que u soit dans $V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ il faut et il suffit que $\tilde{v}$ donnée par (2.2') soit dans $H^1(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Pour démontrer ce lemme nous avons besoin d'un résultat préliminaire sur les distributions :

Lemme 2.3 : Soient k et l deux entiers, $k \geq 1$, $l \geq 0$. La seule distribution vérifiant $T \in H^{-1}(\mathbb{R}^{2k+l})$ et supp $T \subset \complement(\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^l$ est la distribution nulle.

Preuve : On fait une récurrence sur l'entier k en supposant $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^l)$

1. **k = 1, l quelconque.**
   Puisque supp $T \subset \{(0,0) \times \mathbb{R}^l\}$ on a : (cf. [8])

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D_x^\alpha \delta \otimes T_{\alpha,y} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^l)$$

avec supp $T_{\alpha,y} \subset$ supp T

Alors $T \in H^{-1}(\mathbb{R}^{2+l})$ implique

$$\int (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{-1} \Big| \sum_{|\alpha| \leq m} \xi^\alpha \hat{T}_\alpha(\eta)\Big|^2 d\xi\, d\eta < \infty$$

ce qui n'est possible que pour $\hat{T}_\alpha(y) = 0$, $|\alpha| \leq m$ donc $T = 0$.

2. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang k ($k \geq 1$), pour l quelconque.
   Soit T vérifiant :

$$T \in H^{-1}(\mathbb{R}^{2(k+1)} \times \mathbb{R}^l) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{2(k+1)} \times \mathbb{R}^l)$$

$$\text{supp } T \subset \complement(\mathbb{R}^2 - (0,0))^{k+1} \times \mathbb{R}^l$$

Par l'hypothès de récurrence ces conditions impliquent en fait que supp $T \subset \{(0,0)^{k+1} \times \mathbb{R}^l\}$. La conclusion $T = 0$ s'obtient ensuite comme au 1.

Démonstration du lemme 2.2 : Si $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$ alors $v \in H^1((\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ donc $u \in V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$. Réciproquement :

soit $u \in V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ alors $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$ donc $D\tilde{v} \in H^{-1}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$. D'autre part $Dv \in L^2((\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ donc $\widetilde{Dv} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$ et on a

$$D\tilde{v} - \widetilde{Dv}\Big|_{(\mathbb{R}^2 - (0,0))^k \times \mathbb{R}^{n-k}} = 0$$

Par le lemme 2.3 on a donc $D\tilde{v} = \widetilde{Dv} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

- Tranformé de l'opérateur A.

Par (2.1) pour $1 \le i \le k$:

$$D_{y_i}(y_i D_{y_i}) \quad \text{devient} \quad \frac{1}{4}(D^2_{s_i} + D^2_{t_i}) = \frac{\Delta_i}{4},$$

$$y_i D_{y_i} \quad \text{devient} \quad \frac{1}{2}(s_i D_{s_i} + t_i D_{t_i})$$

L'opérateur A devient alors :

$$(2.3)\quad \begin{cases} F = F(s,t,z,D_s,D_t,D_z) = \\ \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} a_i(s,t,z)\,\Delta_i + \sum_{|\mu|\le 2} c_\mu D_z^\mu \\ + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(s,t,z)\,\frac{1}{1}(s_i D_{s_i} + t_i D_{t_i})(s_j D_{s_j} + t_j D_{t_j}) \\ + \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\mu|\le 1} b_{i,\mu}\,\frac{1}{2}(s_i D_{s_i} + t_i D_{t_i})\,D_z^\mu \end{cases}$$

De (1.7) on déduit que

(2.4) **F est fortement elliptique au point (0,0,0)**

Dans la suite on se place dans un voisinage de l'origine suffisamment petit pour que F y soit uniformément fortement elliptique.

2°) <u>Etude locale de $D(\mathcal{A}^m)$</u>

Nous faisons une étude pour l'opérateur A dans $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$; les fonctions considérées ont leur support dans un voisinage $\mathcal{O}$ de l'origine* tel que F soit uniformément elliptique sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ déduit de $\mathcal{O}$ par (2.1). On pose :

$$(2.5)\quad \begin{cases} E_o = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})\ ;\ \text{supp } u \subset \underline{\mathcal{O}}\} \\ E_1 = \{u \in V^k(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})\ ;\ \text{supp } u \subset \underline{\mathcal{O}}\} \\ ------ \\ E_l = \{u \in E_{l-1}\ ;\ Au \in E_{l-2}\} \quad \text{pour } l \geq 2 \end{cases}$$

On a alors :

$$\{u \in D(A^m)\ ;\ \text{supp } u \subset \underline{\mathcal{O}}\} = E_{2m}$$

En utilisant (2.1) et le lemme 2.3 on obtient :

Lemme 2.4 : Soient $l \in \mathbb{N}$ et u une fonction de $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ à support dans $\underline{\mathcal{O}}$. Pour que u soit dans E_l il faut et il suffit que $\tilde{v}$ donnée par (2.2') soit dans $H^l(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$.

Ce résultat permet de caractériser les fonctions de $D(\mathcal{A}^m)$. On obtient :

Théorème 2.1 : Soit $m \in \mathbb{N}$; l'espace $D(\mathcal{A}^m)$ est constitué par les fonctions u de $H^{2m}_{loc}(\Omega)$ telles que, localement au voisinage de $x_o \in \Gamma$ (avec $|I(x_o)| = k$ et on prend $I(x_o) = (1,2,\dots,k)$) on ait $u \circ \theta$ dans l'espace : $E_k^m = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k})$;

$$y_i^q\, D_{y_i}^{m+q}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \quad \text{pour } 0 \leq q \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq k\ ;$$

$$D_z^\mu\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \quad \text{pour} \quad |\mu| \leq 2m\ \}$$

Preuve : Il suffit de vérifier que pour u à support compact (dans $\overline{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$) les propriétés suivantes sont équivalentes :

---

* $\underline{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cap \overline{\mathbb{R}}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ avec $\mathcal{O}$ voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

i) $u \in E_k^m$

ii) $\tilde{v}$ (donnée par (2.2')) est dans $H^{2m}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$

ii) implique i).

Soit $\tilde{v} \in H^{2m}(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k})$ on a :

$$(2.7)\begin{cases} D_z^{\mu}\, \tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } |\mu| \leq 2m \\ \Delta_i^l\, \tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq l \leq m \\ \Delta_i^l\, \tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq l \leq m-1 \end{cases}$$

ce qui donne dans $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$(2.8)\begin{cases} D_z^{\mu}\, u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } |\mu| \leq 2m \\ (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^l u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq l \leq m \\ \sqrt{y_i}\, D_i\, (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^l u \in L^2(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}) & \text{pour } 1 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq l \leq m-1 \end{cases}$$

et on obtient i) par des inégalités de Hardy. Réciproquement on montre que i) implique ii) en utilisant le lemme 2.3.

3°) <u>Conséquences</u>

1. Pour $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$H^{2m}(\Omega) \subsetneq D(\mathcal{A}^m) \subsetneq H^m(\Omega)$$

2. Pour $m \geq 1$, l'injection de $D(\mathcal{A}^m)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

3. <u>Théorème 2.2</u> : $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ sur lui-même.

§ 3. THEOREME DES ITERES. REGULARITE ANALYTIQUE.

Dans tout ce chapitre on suppose que les données sont analytiques (ou dans des classes de Gevrey convenables). On se ramène par (2.1) au théorème des itérés à l'intérieur pour un opérateur elliptique (cf. [7]) que nous rappelons pour plus de commodité :

Théorème 3.1 : Soit Q un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients analytiques dans un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$; soit $s \geq 1$ et u une fonction C^∞ dans les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La fonction u est dans $G_s(\mathcal{O})$ ♦

ii) Pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$, il existe une constante $L > 0$ telle que l'on ait pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\|Q^i u\|_{L^2(K)} \leq L^{i+1}((2i)!)^s .$$

Nous avons besoin d'introduire de nouveaux espaces. Dans $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ $(1 \leq k \leq n)$ on considère les opérateurs différentiels, pour $1 \leq i \leq k$

$$R_i^m = \begin{cases} (D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^l & \text{si } m = 2l \\ y_i\, D_{y_i}(D_{y_i}\, y_i\, D_{y_i})^l & \text{si } m = 2l+1 \end{cases}$$

Pour tout multi indice $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ on pose $R^\alpha = R_1^{\alpha_1} \dots R_k^{\alpha_k}$

Définition 3.1 : Soit $s \geq 1$; on note $\mathcal{C}_s(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions u de classe C^∞ sur $\bar{\Omega}$, de classe G_s sur Ω et vérifiant sur toute carte locale $\mathcal{O}$ d'un point $x \in \Gamma$ (avec $I(x) = (1,2,\dots,k)$) :

♦ $G_s(\mathcal{O})$ désigne l'espace de Gevrey d'ordre s sur $\mathcal{O}$, c'est-à-dire l'espace des fonctions $C^\infty(\mathcal{O})$ telles que, pour tout compact $K \subset \mathcal{O}$, il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leq L^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s .$$

Pour tout compact $K \subset \underline{\mathcal{O}}$, il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$(3.1) \qquad \begin{matrix} \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^k \\ \forall\, \mu \in \mathbb{N}^{n-k} \end{matrix} \quad \|R^\alpha D_z^\mu u\|_{L^2(K)} \leq L^{|\alpha| + |\mu| + 1}((|\alpha| + |\mu|)!)^s .$$

On a les propriétés suivantes : $(1 \leq s \leq s' < \infty)$

$$\mathcal{A}_1(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{A}_s(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{A}_{s'}(\overline{\Omega}) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$$

$$G_s(\overline{\Omega}) \subseteq \mathcal{A}_s(\overline{\Omega}) \subseteq G_{2s-1}(\overline{\Omega})$$

donc en particulier :

$$\mathcal{A}_1(\overline{\Omega}) = G_1(\overline{\Omega}) = \mathcal{A}(\overline{\Omega}) .$$

Enonçons le théorème des itérés pour $\mathcal{R}$ dans $\overline{\Omega}$:

<u>Théorème 3.2</u> : Soient $s \geq 1$ et $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La fonction u est dans $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$

ii) Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \ \|\mathcal{R}^i u\|_{L^2(\Omega)} \leq L^{i+1}((2i)!)^s .$$

<u>Preuve</u> : Dans Ω on utilise le théorème 3.1 pour $\mathcal{R}$. Au bord, si u vérifie (3.1) dans $\mathcal{O}$, la fonction v donnée par (2.2) est dans $G_s(\widetilde{\mathcal{O}})$; on utilise de nouveau le théorème 3.1 mais pour l'opérateur F.

<u>Conséquences</u> :

1. Pour s = 1, on obtient une caractérisation des fonctions analytiques sur Ω

2. <u>Théorème 3.3</u> : Pour $s \geq 1$, $\mathcal{R}$ est un automorphisme de $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$.

§ 4. THEORIE SPECTRALE ET APPLICATIONS.

On suppose que l'opérateur $\mathcal{A}$ de domaine $D(\mathcal{A})$ est auto adjoint. Comme l'injection de $D(\mathcal{A})$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, le spectre de $\mathcal{A}$ est constitué d'une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres strictement positives que l'on ordonne, au sens large, dans l'ordre croissant. On recherche un équivalent de λ_j, quand $j \to +\infty$; la méthode de [1] et [2] s'applique dès que l'on a obtenu un théorème de Sobolev avec poids. Nous supposons que $m > n$; on a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 4.1</u> : L'application $u \to \Phi^{1/4} u$ est continue de l'espace $D(\mathcal{A}^m)$ dans $C^0(\overline{\Omega})$. Il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour tout $u \in D(\mathcal{A}^m)$ et tout $t \geq 1$:

$$t^{1-\frac{n}{4m}} \|\Phi^{1/2} u\|^2_{L^\infty(\Omega)} \leq C\{\|\mathcal{A}^m u\|^2_{L^2(\Omega)} + t\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\}$$

On obtient ensuite le résultat sur la croissance des valeurs propres de $\mathcal{A}$:

<u>Théorème 4.2</u> : $\lambda_j \sim 4\pi^2 \left(\int_\Omega \left(\int_{\{\xi\,;\,\mathcal{A}_0(x,\xi)<1\}} d\xi \right) dx \right) j^{2/n}$ qd $n \to \infty$

($\mathcal{A}_0$ désigne la partie homogène de degré 2 de $\mathcal{A}$).

A partir de ce résultat on peut reprendre les propriétés démontrées dans [2], chapitre "applications".

<u>Applications</u>

1°) On note (φ_j) une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $\mathcal{A}$ associées aux valeurs propres (λ_j). On désigne par J l'application qui, à $f \in L^2(\Omega)$, associe la suite (f_j) de ses coefficients de Fourier sur la base (φ_j). Pour toute suite $(P(j))$ de réels strictement positifs on note :

$$l^2_{P(j)} = \{(f_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 P_{(j)} < \infty\} ,$$

muni de sa norme naturelle.

En utilisant les théorèmes 4.2 et 3.2, on obtient :

<u>Théorème 4.3</u> : L'application J est un isomorphisme

a) de $D(\mathcal{A}^k)$ sur $l^2_{j^{\frac{4k}{n}}}$ $(k \in \mathbb{N})$;

b) de $C^\infty(\overline{\Omega})$ sur l'espace s des suites à décroissance rapide ;

c) de $\mathfrak{F}'(\overline{\Omega})$ sur l'espace s' des suites à croissance lente ;

d) de $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ sur l'espace $\varinjlim_{M>0} l^2_{\exp(\frac{j}{M})^{\frac{1}{sn}}}$. pour $s \geq 1$.

2°) On se propose d'interpoler entre les espaces $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ pour $s > 1$ et $C^\infty(\overline{\Omega})$.
Etant donnés $1 \leq s_0 \leq s < \infty$ on sait construire ([4]) un foncteur d'interpolation F tel que

$$F\left[\; , \varinjlim_{M>0} l^2_{\exp\left((\frac{j}{M})^{\frac{1}{s_0 n}}\right)}\right] = \varinjlim_{M>0} l^2_{\exp\left((\frac{j}{M})^{\frac{1}{sn}}\right)}$$

et de même, pour $1 \leq s_0 \leq s \leq s_1 < \infty$ on sait construire un foncteur d'interpolation G tel que

$$G\left[\varinjlim_{M>0} l^2_{\exp\left((\frac{j}{M})^{\frac{1}{s_1 n}}\right)} , \varinjlim_{M>0} l^2_{\exp\left((\frac{j}{M})^{\frac{1}{s_0 n}}\right)}\right] =$$

$$\varinjlim_{M>0} l^2_{\exp\left((\frac{j}{M})^{\frac{1}{sn}}\right)} .$$

On obtient, en utilisant le théorème 4.3, b et d :

<u>Théorème 4.4</u> :

a) $F[C^\infty(\bar\Omega),\ \mathcal{a}_{s_o}(\bar\Omega)] = \mathcal{a}_s(\bar\Omega)$

b) $G[\mathcal{a}_{s_1}(\bar\Omega),\ \mathcal{a}_{s_o}(\bar\Omega)] = \mathcal{a}_s(\bar\Omega)$.

3°) On utilise les résultats d'approximations de [3], théorème 5, que nous rappelons ici. On note $\mathcal{a}_{s,2}(\bar\Omega)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\bar\Omega)$ vérifiant :

il existe deux constantes $L > 0$ et $a \in]0,1[$ telles que l'on ait pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d_2(f,\mathcal{P}_k) = \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \|f - P\|_{L^2(\Omega)} \leq L\, a^{k^{1/s}}$$

($\mathcal{P}_k$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k).

On a alors :

$$F[C^\infty(\bar\Omega),\ \mathcal{a}_{s_o,2}(\bar\Omega)] = \mathcal{a}_{s,2}(\bar\Omega)$$

Pour $s_o = 1$ on a $\mathcal{a}_{s_o,2}(\bar\Omega) = \mathcal{a}(\bar\Omega)$. On obtient donc, vu le théorème 4.4 :

<u>Théorème 4.5</u> : Pour $1 \leq s < \infty$

$$\mathcal{a}_s(\bar\Omega) = \mathcal{a}_{s,2}(\bar\Omega)$$

Ces résultats obtenus en collaboration avec M. S. Baouendi et C. Goulaouic feront l'objet d'une publication plus détaillée ultérieure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Rat. Mec. Anal. 34 N° 5 (1969), p. 361-379.

[2] M.S. Baouendi et C. Goulaouic : Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés ; applications. Journal of Functional Analysis (à paraître).

[3] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Approximation polynomiale de fonctions C^{∞} et analytiques (à paraître).

[4] C. Goulaouic : Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18, 1 (1968), p. 1-98.

[5] B. Hanouzet : Régularité pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés du deuxième ordre. Le Matematiche, Vol. 24, fasc. 2 (1969) p. 450-491.

[6] T. Kotake et N.S. Narasimhan : Fractional powers of a linear elliptic operators. Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), p. 449-471.

[7] J. L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes ; tome 3 (Dunod), Paris 1970.

[8] L. Schwartz : Théorie des distributions. Hermann, Paris 1966.