Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. J. Duistermaat

L'indice de Morse dans le calcul variationnel

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 25, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A23_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1973-1974

L'INDICE DE MORSE DANS LE CALCUL VARIATIONNEL

par J. J. DUISTERMAAT

Exposé n° XXV

29 Mai 1974

§ 0. INTRODUCTION

Je veux indiquer ici comment calculer l'indice de Morse des courbes stationnaires, avec des conditions aux limites générales, en usant la classe de cohomologie d'Arnol'd [1]. La formule obtenue pour le cas des courbes fermées (voir 3.4, ci-dessous) apparaissait dans les développements asymptotiques de [2], [5] pour le spectre d'un opérateur elliptique positif sur une variété compacte. Une comparaison des puissances de i qui interviennent là avec celles qui apparaissent dans les développements asymptotiques de Colin de Verdière [3] pour le Laplacien d'une variété riemannienne indiquait déjà que notre nombre devait être égal à l'indice de Morse pour les géodésiques périodiques, modulo 4. Evidemment, notre formule doit aussi être égale à celle obtenue récemment par Klingenberg [7] pour l'indice des géodésiques périodiques d'une variété riemannienne.

§ 1. DEFINITION DE L'INDICE ET TRADUCTION EN NOMBRE D'INTERSECTIONS POUR UNE COURBE D'ESPACES LAGRANGIENS

Soit X une variété C^∞ de dimension n et $f : (t,x,v) \mapsto f(t,x,v)$ une fonction réelle C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times TX$. Sur l'espace des courbes

$$C = \{\gamma \in C^2([a,b],X) ; \ (t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in [a,b]\}$$

on définit la fonction réelle C^∞, E par

$$E(\gamma) = \int_a^b f(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t))dt .$$

Pour considérer des conditions aux limites on restreint E à un espace des courbes

$$C_B = \{\gamma \in C \ ; \ (\gamma(a),\gamma(b)) \in B\},$$

où B est une sous-variété C^∞ de $X \times X$ donnée. Evidemment C_B est une variété C^∞ de Banach, et $T_\gamma C_B = \{\delta\gamma \in C^2([a,b],\gamma^* TX)$; $(\delta\gamma(a),\delta\gamma(b)) \in T_{\gamma(a),\gamma(b)}B\}$.

Pour faciliter les notations on peut prendre un recouvrement C^∞ d'un voisinage tubulaire de la courbe γ en question par un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Parce qu' un recouvrement induit un difféomorphisme entre les espaces de courbes correspondants, on peut faire comme si X est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Par une intégration par parties, on obtient que γ est une courbe stationnaire pour la condition aux limites B, c'est à dire $DE(\gamma)|T_\gamma C_B = 0$, si et seulement si

1.1 $$\frac{d}{dt}((D_v f)(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)) = (D_x f)(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t))$$

pour tout $t \in [a,b]$ (<u>Euler-Lagrange</u>) et

1.2 $$(D_v f(a,\gamma(a),\frac{d\gamma}{dt}(a), - D_v f(b,\gamma(b),\frac{d\gamma}{dt}(b)) \in (T_{\gamma(a),\gamma(b)}B)^{\perp}.$$

Pour une courbe stationnaire γ, la différentielle seconde totale $D^2E(\gamma)$ de E en γ est une forme bilinéaire définie de manière invariante sur $T_\gamma C_B$. On définit alors <u>l'indice de Morse de γ par rapport à la condition aux limites B</u> par :

1.3 $$\mathrm{Ind}_B(\gamma) = \sup\{\dim L, \text{ où } L \text{ est un sous-espace linéaire de } T_\gamma C_B \text{ sur lequel } D^2E(\gamma) < 0\}$$

<u>Théorème 1.1</u> : $\mathrm{Ind.}_B(\gamma) < \infty \Rightarrow D_v^2 f(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$, et inversement

$$D_v^2 f(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)) > 0$$

pour tout $t \in [a,b] \Rightarrow \mathrm{Ind}_B(\gamma) < \infty$.

La première partie est triviale. Pour une démonstration de la deuxième partie on introduit un produit scalaire $q(t)$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} D_x^2 f(\dots) + q(t) & D_v D_x f(\dots) \\ D_x D_v f(\dots) & D_v^2 f(\dots) \end{pmatrix}$$

(où (...) signifie $(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t))$ soit définie positive pour tout $t\in[a,b]$.
Alors

$$Q(\delta\gamma,\delta\gamma_1) = \int_a^b q(t)(\delta\gamma(t),\delta\gamma_1(t))dt$$

définit un produit scalaire sur $T_\gamma C_B$ induisant la topologie $\mathcal{L}^2$. D'autre part, $Q+D^2E(\gamma)$ est un produit scalaire sur $T_\gamma C_B$ induisant la topologie $\mathcal{H}^{(1)}$ de la convergence dans $\mathcal{L}^2$ des courbes et de leurs dérivées. On désignera par $H^{(0)}$, resp. $H^{(1)}$, la complétion de $T_\gamma C_B$ pour la norme associée au produit scalaire Q, resp. $Q+D^2E(\gamma)$.

Considérant les formes bilinéaires comme applications linéaires de l'espace dans son dual, la relation

1.4 $$D^2E(\gamma) = (Q+D^2E(\gamma))\circ\varepsilon$$

définit une application linéaire continue $\varepsilon : H^{(1)} \to H^{(1)}$. Mais $\varepsilon = I-K$ où K est continue $H^{(0)} \to H^{(1)}$. K est donc une application compacte de $H^{(0)}$ dans $H^{(0)}$, symétrique et positive par rapport à Q et on en déduit que K a un spectre discret positif tendant vers 0. Par conséquent, ε a un spectre discret $\lambda_j \nearrow 1$ et la somme E^- des espaces propres pour les $\lambda_j < 0$ est de dimension finie. On a $\varepsilon \geq 0$ sur l'espace orthogonal E^+ de E^- dans $H^{(0)}$, alors la décomposition de $H^{(0)} = E^- + E^+$, avec $D^2E(\gamma) < 0$ sur E^- et $D^2E(\gamma)\geq 0$ sur E^+, implique que l'indice de $D^2E(\gamma)$ sur $H^{(0)}$ est égal à dim E^-. Mais $T_\gamma C_B$ est dense dans $H^{(0)}$ de sorte que :

1.5 $\mathrm{Ind}_B(\gamma)$ = nombre des valeurs propres $\lambda_j < 0$ de ε, comptées avec leurs multiplicités.

On peut remarquer ici que, pour toute suite croissante F_k de $H^{(0)}$ telle que $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ est dense dans $H^{(0)}$, il existe un k tel que $\mathrm{Ind}_B(\gamma)$ est égal à l'indice de $D^2E(\gamma)$ sur F_k. Ceci démontre qu'on a beaucoup de choix pour l'espace sur lequel on veut calculer l'indice de $D^2E(\gamma)$ (en obtenant toujours le même $\mathrm{Ind}_B(\gamma)$). On peut considérer par exemple les courbes géodésiques par morceaux : F_k désignant l'ensemble de celles qui ont k morceaux.

Par un calcul direct on montre maintenant que

$$\varepsilon(\delta\gamma) = \lambda\cdot\delta\gamma, \quad \delta\gamma\in H^{(0)},$$

si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites en posant $\mu = \lambda/(1-\lambda)$,

1.6
$$\frac{d}{dt}\{D_x D_v f(\ldots)\delta\gamma(t) + D_v^2 f(\ldots)\frac{d}{dt}\delta\gamma(t)\} =$$
$$= (D_x^2 f(\ldots) - \mu q(t))\,\delta\gamma(t) + D_v D_x f(\ldots)\frac{d}{dt}\delta\gamma(t)$$

au sens faible (mais alors $\delta\gamma \in C^2$ et satisfait 1.6 au sens fort) et

1.7
$$([D_x D_v f.\delta\gamma + D_v^2 f.\frac{d}{dt}\delta\gamma](a),\ -$$
$$- [D_x D_v f.\delta\gamma + D_v^2 f.\frac{d}{dt}\delta\gamma](b)) \in (T_{\gamma(a),\gamma(b)}B)^{\perp}.$$

Le second problème 1.6, 1.7 est un problème de Sturm-Liouville : on cherche les valeurs de μ par lesquelles les équations 1.6 avec les conditions aux limites 1.7 possèdent des solutions non triviales. Remarquons $\lambda < 0 \Leftrightarrow -1 < \mu < 0$.

Pour simplifier un peu les notations, on emploie une transformation classique, appelée la transformation de Legendre. L'idée est d'écrire

1.8
$$\xi = D_v f(t,x,v),$$

et écrivant $v = v(t,x,\xi)$ pour la solution locale de 1.8 :

1.9
$$p(t,x,\xi) = \langle v(t,x,\xi),\xi\rangle - f(t,x,v(t,x,\xi)).$$

Observons que $D_v^2 f > 0 \Rightarrow D_v^2 f$ non dégénéré $\Rightarrow v \to D_v f(t,x,v)$ est un difféomorphisme local (=revêtement) alors p est bien défini sur un nouveau revêtement convenable. Ecrivant

$$\xi(t) = D_v f(t,x(t),\xi(t))$$
$$x(t) = \gamma(t)$$
$$v(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t)$$

les équations 1.1, 1.2 sont équivalentes à

1.10
$$\frac{dx}{dt}(t) = D_\xi\, p(t,x(t),\xi(t))$$
$$\frac{d\xi}{dt}(t) = -D_x p(t,x(t),\xi(t))$$

avec les conditions aux limites

1.11
$$(x(a),x(b)) \in B$$
$$(\xi(a),-\xi(b)) \in (T_{x(a),x(b)}B)^{\perp}$$

Si on pose :

$$\delta\xi = D_x D_v f.\delta x + D_v^2 f.\delta v$$
$$\delta x(t) = \delta\gamma(t)$$
$$\delta v(t) = \frac{d}{dt}\,\delta\gamma(t)$$

les équations 1.6, 1.7 sont équivalentes à

1.12
$$\frac{d}{dt}\,\delta x = D_x D_\xi\, p.\delta x + D_\xi^2\, p.\,\delta\xi$$
$$\frac{d}{dt}\,\delta\xi = (-\mu\, q - D_x^2 p)\,\delta x - D_\xi D_x p.\delta\xi$$

avec les conditions aux limites

1.13
$$(\delta x(a),\delta x(b)) \in T_{x(a),x(b)}B$$
$$(\delta\xi(a),-\delta\xi(b)) \in (T_{x(a),x(b)}B)^{\perp}$$

Les équations 1.10 forment un système <u>hamiltonien</u> défini par la fonction $p(t,x,\xi)$, et pour $\mu = 0$, 1.12 est l'équation pour la différentielle du flot hamiltonien (équation variationelle) le long de la solution $(x(t),\xi(t))$.

1.12 est une équation linéaire de la forme $\frac{du}{dt} = A(\mu,t)u$, $u(t) \in \mathbb{R}^{2n}$

où

$$A(\mu,t) = \begin{pmatrix} D_x D_\xi p & D_\xi^2 p \\ -\mu q - D_x^2 p & -D_\xi D_x p \end{pmatrix}$$

est une transformation symplectique infinitésimale pour la forme symplectique canonique.

$$\sigma_{\mathbb{R}^{2n}} : \left(\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta\xi' \end{pmatrix} \right) \mapsto \langle \delta\xi, \delta x' \rangle - \langle \delta x, \delta\xi' \rangle .$$

Alors la solution fondamentale $\Phi(\mu,t)$ de 1.12, définie par la relation

$$u(t) = \Phi(\mu,t)u(o)$$

pour toute solution u, est une transformation linéaire symplectique dans $\mathbb{R}^{2n}$. Autrement dit, la forme symplectique

$$\sigma \underset{\text{déf}}{=} \sigma_{\mathbb{R}^{2n}\times\{0\}} \oplus - \sigma_{\{0\}\times\mathbb{R}^{2n}}$$

sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ <u>s'annule</u> sur

$$\gamma(\mu,t) \underset{\text{déf}}{=} \text{graphe de } \Phi(\mu,t).$$

$\gamma(\mu,t)$ est de dimension 2n (c'est la dimension maximale pour un sous-espace isotrope de σ), on dit alors que $\gamma(\mu,t)$ est un espace <u>lagrangien</u> dans $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ pour σ.

Par ailleurs l'espace $\beta \subset \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ défini par

$$\beta = \left\{ \left(\begin{matrix} \delta x \\ \delta\xi \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \delta y \\ \delta\eta \end{matrix} \right) ; \ (\delta x, \ \delta y) \in T_{x(a),x(b)}B \ , (\delta\xi, -\delta\eta) \in (T_{x(a),x(b)}B)^{\perp} \right\}$$

est aussi de dimension 2n et isotrope pour σ. L'indice de Morse est maintenant égal au "nombre d'intersections"

1.14 $$\sum_{-1 < \mu < 0} \dim(\gamma(\mu,b) \cap \beta) \quad \text{lorsque } \mu \text{ varie}$$

de la courbe $\mu \mapsto \gamma(\mu,b)$, μ de -1 à 0, d'espaces lagrangiens avec l'espace lagrangien fixe β.

§ 2. THEORIE D'INTERSECTIONS POUR DES COURBES D'ESPACES LAGRANGIENS.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2d, σ une forme symplectique (= bilinéaire antisymétrique , non dégénérée) sur E. Un sous espace linéaire α de E est appelé <u>lagrangien</u> lorsque $\sigma(u,v) = 0$ pour tous $u, v \in \alpha$, et que la dimension de α est maximale (= d). On désigne par Λ l'ensemble de tels α et, pour tout $\beta \in \Lambda$, on dénote par $\Lambda^k(\beta)$ l'ensemble des $\alpha \in \Lambda$ tel que $\dim \alpha \cap \beta = k$.

Soit maintenant $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \cap \beta = 0$. Alors tout sous-espace linéaire γ de E de dimension d tel que $\gamma \cap \beta = 0$ peut être écrit sous la forme :

$$\gamma = \{u + Cu \ ; \ u \in \alpha\}$$

pour une application linéaire $C : \alpha \to \beta$. Ceci définit une forme bilinéaire

$$Q(\alpha,\beta;\gamma) \ : \ (u,v) \mapsto \sigma(Cu,v), \ u,v \in \alpha$$

sur α et on vérifie que $\gamma \in \Lambda$ si et seulement si $Q(\alpha,\beta;\gamma)$ est symétrique. Autrement dit

$$Q(\alpha,\beta) \ : \ \gamma \mapsto Q(\alpha,\beta;\gamma)$$

est une identification de $\Lambda^0(\beta)$ avec l'espace $S^2\alpha$ des formes bilinéaires symétriques sur α, et on déduit que Λ est une sous-variété algébrique lisse de la Grassmannienne des sous-espaces linéaires de dimension d de E, avec les $Q(\alpha,\beta)$ comme système de cartes. En particulier on voit que $\dim \Lambda = \frac{1}{2} d\,(d+1)$.

C'est un fait remarquable que la différentielle de $Q(\alpha,\beta)$ au point α ne dépend pas de $\beta \in \Lambda^0(\alpha)$ et définit alors une identification canonique q_α de $T_\alpha\Lambda$ avec $S^2\alpha$. On peut maintenant donner une description géométrique des espaces $\Lambda^k(\beta)$ avec le :

Théorème 2.1 : Pour tout $\alpha \in \Lambda^k(\beta)$ il existe une submersion algébrique R d'un voisinage $\mathcal{O}$ de α dans Λ sur $S^2(\alpha \cap \beta)$ tel que pour tout $k' \leq k$: $\alpha' \in \Lambda^{k'}(\beta) \cap \mathcal{O} \Leftrightarrow \dim \ker R(\alpha') = k'$. De plus, si on désigne par $\rho_{\alpha \cap \beta}$: $S^2\alpha \to S^2(\alpha \cap \beta)$, la restriction des formes bilinéaires sur α à $\alpha \cap \beta$, on a

$$DR(\alpha) = \rho_{\alpha\cap\beta} \circ q_\alpha \underset{\text{def}}{=} \Gamma_{\alpha,\beta} \;.$$

Enfin, pour toute courbe différentiable $t \to \alpha(t)$ dans Λ telle que $\Gamma_{\alpha(0),\beta}\left(\frac{d\alpha}{dt}(0)\right)$ est non dégénéré et $\gamma \in \Lambda^o(\alpha(0) \cap \Lambda^o(\beta)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

2.1 $$\operatorname{sgn} Q(\beta,\gamma;\alpha(t)) \quad \operatorname{sgn} Q(\beta,\gamma;\alpha(0)) + \operatorname{sgn} \Gamma_{\alpha(o),\beta}\left(\frac{d\alpha}{dt}(0)\right)$$

pour $0 < t < \varepsilon$.

Corollaire 2.2 : $\bigcup_{k' \geq k} \Lambda^{k'}(\beta)$ est une sous variété algébrique de Λ, dont la partie régulière est $\Lambda^k(\beta)$; pour tout $\alpha \in \Lambda^k(\beta)$, $T_\alpha \Lambda^k(\beta) \cong \operatorname{Ker} \Gamma_{\alpha,\beta}$. $\Lambda^k(\beta)$ est alors de codimension $\frac{1}{2}k(k+1)$ dans Λ.

En particulier $\Sigma(\beta) \underset{\text{déf}}{=} \Lambda \backslash \Lambda^o(\beta)$ est une sous-variété algébrique de codimension 1 dans Λ dont la partie régulière est égale à $\Lambda^1(\beta)$ et la partie singulière $(= \bigcup_{k \geq 2} \Lambda^k(\beta))$ est de codimension 3 dans Λ. Pour tout $\alpha \in \Lambda^1(\beta)$, $\Gamma_{\alpha,\beta}$ induit un isomorphisme : $T_\alpha\Lambda/T_\alpha\Lambda^1(\beta) \to S^2(\alpha \cap \beta)$, $S^2(\alpha\cap\beta)$ est un espace linéaire de dimension 1 qu'on oriente en considérant comme éléments positifs les formes quadratiques positives. Par conséquent $\Sigma(\beta)$ définit un cycle orienté de codimension 1, appelé cycle de Maslov. Comme le groupe symplectique opère transitivement sur Λ et est connexe, on obtient que $[\Sigma(\beta)]$ ne dépend pas de β .

Par dualité, ce cycle définit un élément $A \in H^1(\Lambda,\mathbb{Z})$, appelé classe d'Arnol'd, donné par la relation

$$\langle\gamma , A\rangle = \text{nombre d'intersections de } \gamma \text{ avec } \Sigma(\beta)$$

pour toute courbe fermée γ dans Λ. Par une petite déformation de γ, on peut se ramener au cas où γ est différentiable et coupe $\Sigma(\beta)$ seulement dans sa partie régulière $\Lambda^1(\beta)$ et transversalement, on obtient alors la formule

$$<\gamma, A> = \sum_{\gamma(t) \in \Sigma(\beta)} \operatorname{sgn} \Gamma_{\gamma(t),\beta} (\frac{d\gamma}{dt}(t)).)$$

En effet, $\pi_1(\Lambda) \cong \mathbb{Z}$ et A est un générateur de $H^1(\Lambda,\mathbb{Z})$, (voir [1]).

Pour une courbe $\gamma \in C^0([a,b],\Lambda)$, non nécessairement fermée, avec $\gamma(a), \gamma(b) \in \Lambda^0(\beta)$, on définit le nombre $[\gamma : \beta]$ d'intersections de γ avec β comme $<\tilde{\gamma},A>$, où $\tilde{\gamma}$ est une courbe fermée constitué de γ, et d'une courbe qui va de $\gamma(b)$ à $\gamma(a)$ dans $\Lambda^0(\beta)$. Comme $\Lambda^0(\beta) \cong S^2\alpha$ est simplement connexe, on peut toujours trouver une telle courbe et le nombre $<\tilde{\gamma},A>$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\gamma}$.

On a $[\gamma_2 \circ \gamma_1 : \beta] = [\gamma_2 : \beta] + [\gamma_1 : \beta]$ où $\gamma_2 \circ \gamma_1$ désignent la composition de courbes γ_2 et γ_1 du type ci-dessus (avec origine de γ_2 = point d'arrivée de γ_1 dans $\Lambda^0(\beta)$).

On a également $[\gamma : \beta] = [\gamma' : \beta]$ lorsque γ' est homotope à γ par une homotopie conservant les extrémités de γ.

Pour calculer effectivement le nombre $[\gamma : \beta]$, il est important d'avoir la possibilité de changer l'espace lagrangien fixe β. La différence est donnée par la formule explicite suivante :

2.2 $$[\gamma : \beta'] - [\gamma : \beta] = s(\beta,\beta' ; \gamma(a),\gamma(b)).$$

où s est le <u>nombre d'Hörmander</u> défini par

2.3 $$s(\beta,\beta' ;\alpha,\alpha') = \frac{1}{2} \{\operatorname{sgn} Q(\beta,\alpha' ;\beta') - \operatorname{sgn} Q(\beta,\alpha ; \beta')\}$$

pour tous α, $\alpha' \in \Lambda^0(\beta) \cap \Lambda^0(\beta')$, et on a

2.4 $$s(\beta,\beta' ;\alpha,\alpha') = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn} Q(\beta,\beta' ;\alpha) - \operatorname{sgn} Q(\beta,\beta' ;\alpha')\}$$

si de plus $\beta \cap \beta' = 0$ (voir [6, section 3.3] et [4, section 3.4]).

Nous aurons aussi besoin d'une formule donnant $[\gamma : \beta]$ pour des courbes à coins γ :

Lemme 2.3 : Supposons que $\gamma \in C^0([a,b],\Lambda)$ coupe $\Sigma(\beta)$ seulement pour $t_o \in]a,b[$ et que γ ait une dérivée à gauche, (resp. à droite) égale à v^-, (resp. v^+). Supposons aussi que $Q^\pm = \Gamma_{\gamma(t_o),\beta} v^\pm$ soit non dégénéré. Alors

2.5 $$[\gamma : \beta] = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn} Q^- + \operatorname{sgn} Q^+\} .$$

Finalement on dira qu'une courbe $\gamma \in C^1([a,b],\Lambda)$ est positive si $q_{\gamma(t)}(\frac{d\gamma}{dt}(t)) > 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Pour une telle courbe $(\gamma(a),\gamma(b) \in \Lambda^0(\beta))$, il découle du lemme 2.3 que

2.6 $$[\gamma : \beta] = \sum_{\gamma(t)\in\Sigma(\beta)} \dim(\gamma(t) \cap \beta) .$$

§ 3. CALCUL DE L'INDICE DE MORSE

Un calcul direct montre que la condition $D^2_\xi p(t,x(t),\xi(t)) = D^2_v f(t,\gamma(t),\frac{d\gamma}{dt}(t))^{-1}$ est définie positive et implique que $\delta\xi(t) \equiv 0$ pour toute solution de 1.12 telle que $\delta x(t) \equiv 0$ et que la courbe $\mu \to \gamma(\mu,t)$ est positive pour chaque $t > a$. On déduit alors de la formule 2.6 que l'indice de Morse (qui est égal à 1.14) est égal au nombre d'intersections de la courbe $\mu \mapsto \gamma(\mu,b)$, ($\mu$ variant de -1 à 0) avec β dans le sens du § 2.

On désigne par γ_s la courbe $t \mapsto \gamma(-1,t)$, (t variant de b à s), suivi par la courbe $\mu \mapsto \gamma(\mu,s)$, ($\mu$ variant de -1 à 0), suivi par la courbe $t \mapsto \gamma(0,t)$, (t variant de s à b) et finalement $\mu \mapsto \gamma(\mu,b)$, ($\mu$ variant de 0 à -0). Alors $s \mapsto \gamma_s$, lorsque s varie de 0 à a, est une homotopie de la courbe $\mu \mapsto \gamma(\mu,b)$ (μ variant de -1 à -0) avec la composition des courbes suivantes :

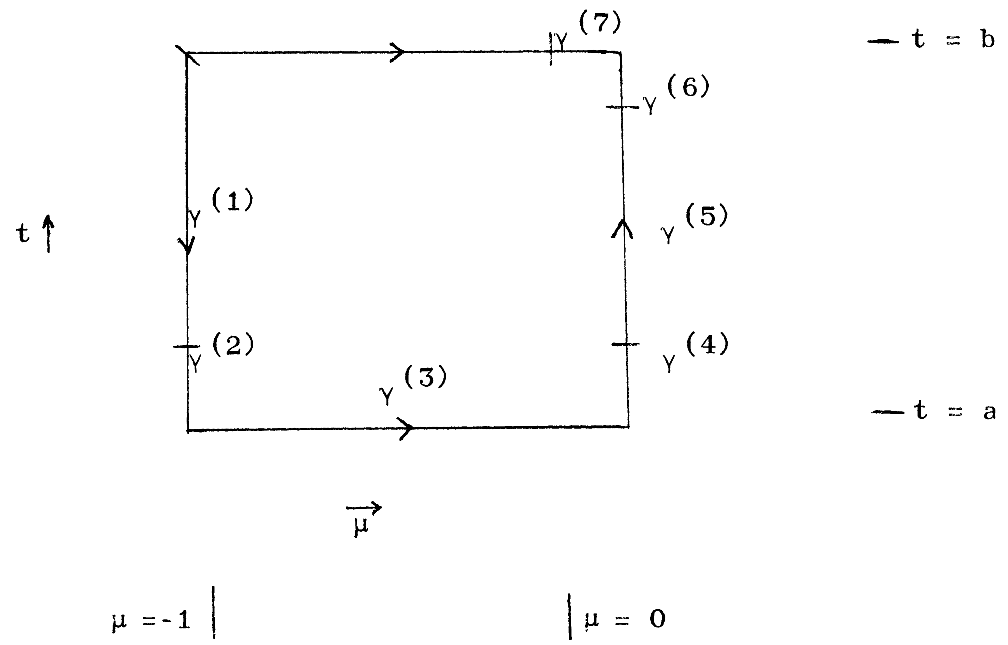
$\gamma^{(1)}$: $\gamma(-1,t)$, t de b à $a+0$,
$\gamma^{(2)}$: $\gamma(-1,t)$, t de $a+0$ à a,
$\gamma^{(3)}$: $\gamma(\mu,a)$, μ de -1 à 0,

$\gamma^{(4)}$: $\gamma(0,t)$, t de a à a + 0,

$\gamma^{(5)}$: $\gamma(0,t)$, t de a + 0 à b - 0,

$\gamma^{(6)}$: $\gamma(0,t)$, t de b - 0 à b,

$\gamma^{(7)}$: $\gamma(\mu,b)$, μ de 0 à - 0



Il faut être prudent dans les coins, parce qu'il peut arriver que $\gamma(\mu,a)$ ou $\gamma(0,b)$ ne soit pas transverse à β.

La courbe $\gamma^{(1)}$ ne coupe pas $\Sigma(\beta)$ parce qu'on peut remplacer b par tout s > a dans les considérations qui nous ont amenés à 1.6. De plus, $\gamma^{(3)}$ n'est pas une courbe du tout parce que $\gamma(\mu,a)$ = graphe de l'identité pour tout μ. Alors on obtient la formule :

3.1 $$\text{Indice de Morse} = [\gamma^{(5)} : \beta] + [\gamma^{(4)} \circ \gamma^{(2)} : \beta] + [\gamma^{(7)} \circ \gamma^{(6)} : \beta],$$

où on peut calculer les "termes des coins"

$$[\gamma^{(4)} \circ \gamma^{(2)} : \beta] \ , \ [\gamma^{(7)} \circ \gamma^{(6)} : \beta]$$

grâce au lemme 2.3.

Le but de toute cette histoire était d'écrire l'indice de Morse en termes du nombre d'intersections avec β de la courbe $t \mapsto \gamma(0,t)$, courbe qui est donné par la différentielle du flot hamiltonien définie en 1.10).

Finalement les formules 2.2, 2.4 nous permettent de remplacer β dans toutes les formules par un sous-espace lagrangien β' convenable pour obtenir à la fin des formules plus jolies.

Remarquons aussi que la condition: $D^2_\xi p = D^2_v f^{-1}$ est définie positive. implique que $\Gamma_{\gamma^{(5)}(t),\beta'}(\frac{d\gamma^{(5)}}{dt}(t)) > 0$ pour un sous-espace lagrangien β' de $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$ de la forme

$$\beta' = \delta\times\varepsilon, \tag{3.2}$$

où δ est un sous-espace lagrangien quelconque de $\mathbb{R}^{2n}$ et ε est l'espace "vertical" $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Par exemple, dans le cas où

$$B = \{x,x) \in X\times X;\ x\in X\}, \tag{3.3}$$

C_B est l'espace des courbes des courbes fermées, et l'indice de Morse est égal à

$$\sum_{a<t<b} \dim(\phi(0,t)^{-1}(\varepsilon)\cap\delta) - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} C & E-I \\ {}^tE-I & D\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\dim\operatorname{Ker}(\phi(0,b)-I)$$

où δ = "l'espace horizontal" $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ et où on a choisi des coordonnées locales dans X telles que $\delta\times\varepsilon$ soit transverse au graphe de $\phi(0,b)$. Ce choix implique que

$$\text{graphe de } \phi(0,b) = \{(\begin{pmatrix}{}^tE\,\delta x + D\delta\xi \\ \delta\xi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\delta x \\ C\delta x + E\delta\xi\end{pmatrix})\ ;\ \delta x,\delta\xi\in\mathbb{R}^n\} \tag{3.5}$$

pour des matrices C, D, E (C, D symétriques), matrices qui entrent dans 3.4). (Il s'agit de la formule dont je parlais dans l'introduction).

Bien sûr, quand on applique la théorie au cas où

$$B = \{(x^{(0)}, x^{(1)})\},$$

C_B est l'espace des courbes avec points aux limites fixes, et on retrouve la formule classique de Morse : $\mathrm{Ind}_B(\gamma) = \sum_{a<t<b} \dim(\phi(0,t)^{-1}(\varepsilon) \cap \varepsilon)$, mais dans ce cas, c'est un peu exagéré d'introduire toute la théorie d'intersections d'espaces lagrangiens.

Bibliographie

[1] V. I. Arnold : On a characteristic class entering in quantization conditions, Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 1-13.

[2] J. Chazarain : Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. Inv. Math. 24 (1974), 65-82.

[3] Y. Colin de Verdière : Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II, Comp. Math. 27 (1973), 159-184.

[4] J. J. Duistermaat : Fourier integral operators, Courant Institute Lecture Notes, New York 1973.

[5] J. J. Duistermaat, V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics, en préparation. Voir aussi Proc. A. M. S. Summer Inst. on Diff. Geom., Stanford 1973.

[6] L. Hörmander : Fourier integral operators I, Acta Math. 127 (1971) 79-183.

[7] W. Klingenberg : The index theorem for closed geodesics, preprint 1973, voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 1005-1008.
