Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Cerezo

Sur les équations invariantes par un groupe

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 21, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A20_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-LIONS-SCHWARTZ

1974-1975

SUR LES EQUATIONS INVARIANTES PAR UN GROUPE

par A. CEREZO

Exposé n° XXI

7 Mai 1975

§ 1. INTRODUCTION

Quand on considère un opérateur différentiel linéaire P sur une variété V invariant par un groupe G de difféomorphismes de V, il est naturel de se poser deux types de questions bien distincts :

1) Que se passe-t-il sur le quotient V/G, c'est-à-dire que sait-on dire des solutions G-invariantes u de l'équation $Pu = f$, où f est G-invariante sur V ?

2) Quelles propriétés particulières de l'opérateur P sur V résultent de sa G-invariance : par exemple, sait-on résoudre l'équation fondamentale $Pu = \delta$ au voisinage d'un point de V, ou encore l'opérateur P est-il "localement résoluble", c'est-à-dire $P\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ localement ?

En pratique, ces deux types de questions sont, on s'en doute, liés.

L'exemple le plus classique de ce type de problèmes est évidemment celui des opérateurs à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire invariants par le groupe des translations . Malgrange a démontré dans sa thèse que tout opérateur P(D) à coefficients constants avait une solution élémentaire ; essentiellement, il s'agit de la transformée de Fourier de $P(\xi)^{-1}$, bien que sa méthode ne fournisse pas de solution tempérée. On en déduit par une simple convolution que P(D) est localement résoluble (résultats du type 2).

La mesure de Dirac n'est évidemment pas invariante par translation, mais elle l'est par rotation, et, en un certain sens, par toute transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$. Des solutions élémentaires du laplacien invariantes par rotation, et du dalembertien de $\mathbb{R}^4$ invariantes par le groupe de Lorentz, sont classiques (type 1). Plus récemment (1970), des démonstrations nouvelles, plus "naturelles", par Atiyah [1] et Bernstein [2] indépendamment, de l'existence de solutions élémentaires tempérées (dûe initialement à Hörmander [16] et Lojasiewicz [17]) , fournissent une solution élémentaire qui, comme l'a remarqué Raïs ([19], [20]), est invariante par le groupe de toutes les transformations linéaires qui conservent P. Pour certaines classes d'opérateurs, ceci se généralise à un second membre quelconque (voir [3]). Mais c'est ce résultat (d'Atiyah) du type 1 que Raïs [19] et Duflo-Raïs [10] utilisent pour obtenir des résultats du type 2 (voir plus loin).

Si V est un espace riemannien symétrique de type non-compact et G son groupe d'isométries, Helgason a montré que tout opérateur G-invariant sur V a une solution élémentaire [11] et est globalement résoluble dans C^∞ [12]. Les mêmes questions sont résolues dans le cas d'un espace homogène d'un groupe compact dans [5]. Dans tous ces cas, les méthodes employées sont assez naturelles pour livrer, en même temps que le résultat du type 2 cherché, le résultat correspondant du type 1.

Dans la suite, nous examinons le cas particulier où $V = G$.

§ 2. OPERATEURS INVARIANTS SUR UN GROUPE DE LIE

Si G est un groupe de Lie non nécessairement commutatif, on pourrait espérer que les résultats classiques sur les opérateurs à coefficients constants se généralisent aux opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche (ou à droite !) par les translations de G. Il n'en est rien. Bien entendu des obstructions topologiques condamnent beaucoup de propriétés de résolubilité globale, comme on peut déjà le constater sur le tore. Lorsque G est compact, ces questions ont été étudiées dans [5] dans le cadre différentiable et dans [4] dans le cadre analytique, ou même holomorphe si G est complexe réductif.

Mais la difficulté est plus profonde : ces opérateurs ne sont pas en général localement résolubles, et ceci même à l'ordre 1 : en fait, l'exemple le plus simple d'un opérateur non localement résoluble, l'opérateur de Mizohata sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial z}$$

n'est pas de ce type puisque sa partie imaginaire s'annule, mais il suffit de rajouter une variable pour obtenir l'opérateur sur $\mathbb{R}^3$

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z})$$

qui est invariant à gauche sur le groupe de Heisenberg des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on choisit alors sur ce groupe un bon système de coordonnées (exponentielles), on s'aperçoit que L n'est autre que le fameux opérateur de Hans Lewy.

En fait, un opérateur invariant à gauche d'ordre 1 n'est localement résoluble que si la sous-algèbre de Lie engendrée par ses parties réelle et imaginaire est de dimension au plus 2 (voir [6]), et ceci n'est qu'une <u>légère</u> simplification de la condition générale de résolubilité locale pour un opérateur quelconque, dûe à Nirenberg et Trèves [18].

Par contre la situation est bien meilleure pour les opérateurs qui sont invariants à gauche <u>et</u> à droite (bi-invariants) sur G, et l'on peut conjecturer (avec L. Schwartz; cf. [19], [20]) que ceux-ci sont toujours localement résolubles, et que les obstructions qu'ils trouvent à avoir une solution élémentaire ou à être globalement résolubles dans C^∞ dépendent uniquement de la topologie du groupe (existence de tores).

Si G est semi-simple, on a quelques résultats partiels sur les problèmes globaux ([7], [8], [9]), et on a toujours la résolubilité locale (Helgason [13], voir aussi [10]). Raïs a montré que tout opérateur bi-invariant a une solution élémentaire tempérée invariante par automorphismes intérieurs si G est nilpotent simplement connexe [19], puis, avec Duflo, si G est résoluble exponentiel [10]. Ceci implique bien sûr la résolubilité locale, et même sur tout groupe résoluble ([10]).

Mais dans tous ces articles ou presque, l'outil essentiel est l'analyse harmonique du groupe considéré (comme d'ailleurs dans le cas classique des opérateurs à coefficients constants). Dans [13] et [10], on déduit la résolubilité locale de propriétés assez fines du groupe .

Pourtant il existe une démonstration du fait que tout opérateur à coefficients constants est localement résoluble qui ne fait aucun usage de la transformation de Fourier : c'est la méthode des inégalités

$\mathbb{L}^2$, la plus directe. En faisant commuter l'opérateur P aux multiplications par les fonctions coordonnées, on démontre l'inégalité de Hörmander ([14], § 2.3) dans tout ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \exists C_\alpha > 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U) \quad \|P^{(\alpha)}(D)\varphi\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_\alpha \|P(D)\varphi\|_{\mathbb{L}^2}$$

et l'on en déduit classiquement que $P\,\mathbb{L}^2(U) \supset \mathbb{L}^2(U)$, et par suite $P\,\mathcal{D}'(U) \supset \mathcal{D}(U)$.

C'est d'une idée de F. Rouvière (développée dans [21]) pour généraliser cette méthode que je vais parler maintenant.

§ 3. LA METHODE DE L'INEGALITE DE HORMANDER

Soit G un groupe de Lie réel d'algèbre g, $\{X_1,\dots,X_n\}$ une base de g, Dg l'algèbre dérivée et DG le sous-groupe de G correspondant. On sait que tout opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur G s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients complexes des monômes (non commutatifs) ordonnés $X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (avec $[X_j, X_k] = X_jX_k - X_kX_j$), et que les opérateurs bi-invariants forment le centre Z(G) de cette algèbre U(G).

Deux difficultés s'opposent à la généralisation de l'inégalité de Hörmander :

- il n'y a pas sur G de fonctions coordonnées, et même localement, il n'y a pas en général de fonction f C^∞ s'annulant à l'origine telle que $X_jf = \delta_{jj_0}$ pour un entier $j_0 \leq n$ donné.
- les dérivées partielles d'un opérateur bi-invariant par rapport aux X_j ne sont pas en général des opérateurs bi-invariants.

Pourtant il faut remarquer le phénomène suivant :

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> $g = \mathbb{R}X_1 \oplus g'$ <u>une décomposition de</u> g <u>en deux sous-espaces</u>. <u>Pour qu'il existe une fonction</u> f <u>réelle</u> C^∞ <u>sur un voisinage de l'origine</u> e <u>de</u> G <u>telle que</u>

$$f(e)=0\ , X_1f = 1, \quad X'f = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad X' \in g'$$

<u>il faut et il suffit que</u> $g' \supset Dg$.

Preuve : Si f existe, on a $[X,Y]f = 0$ pour tous $X, Y \in g$. Donc $df|_e$ s'annule sur Dg et g' et vaut 1 sur X_1.

Réciproquement, l'application de $\mathbb{R} \times g' \simeq g$ dans G

$$(t, X') \mapsto \exp tX_1 \exp X'$$

est un difféomorphisme entre voisinages de l'origine de g et de G, et si $g' \supset Dg$, il suffit de choisir

$$f(\exp tX_1 \exp X') = t \qquad \blacksquare$$

Supposons maintenant $Dg \neq g$ et soit $X_1 \in g - Dg$ non nul. Complétons une base $\{X_{k+1}, \ldots, X_n\}$ de Dg en une base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de g, et introduisons l'endomorphisme linéaire ∂_1 de U(G) défini par

$$\partial_1(X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} .$$

Proposition : ∂_1 est une dérivation de l'algèbre U(G), et $\partial_1 Z(G) \subset Z(G)$.

Preuve : Appliquons le lemme 1, où g' est engendré par $X_2, \ldots, X_n$. On a : $[X_1^{\alpha_1}, f] = \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1}$ et $[X_j^{\alpha_j}, f] = 0$ pour $j = 2, \ldots, n$. Par suite pour tout $P \in U(G)$

$$\partial_1 P = [P, f]$$

d'où la première assertion, et la deuxième en découle immédiatement : si $X \in g$, $[\partial_1 P, X] = \partial_1[P,X] - [P, \partial_1 X] = \partial_1[P,X]$, puisque $\partial_1 X$ est une constante. $\blacksquare$

Théorème : Soit $P \in Z(G)$, non nul. Il existe $Q \in Z(G) \cap Z(DG)$ non nul, un voisinage ouvert U de l'origine de G, et une constante $C > 0$, tels que, pour toute $u \in \mathcal{D}(U)$

$$\|Qu\| \leq C \|Pu\| .$$

Remarque : Tous les produits scalaires et normes écrits sont au sens de $\mathbf{L}^2(G, dx)$, où dx est une mesure de Haar à droite sur G, et c'est aussi en ce sens qu'on parle de l'adjoint P^* d'un opérateur P.

Preuve : Si $P \in Z(DG)$, il n'y a rien à démontrer. Sinon il existe $X_1 \in g - Dg$ non nul, et on peut lui faire correspondre une dérivation ∂_1 de Z(G) et une fonction f, comme dans le lemme et la proposition qui précèdent. Posons $\partial_1 P = P'$ et $\partial_1^2 P = P''$. Pour U assez petit, et toute $u \in \mathcal{D}(U)$, on a les identités

$$\begin{aligned}\|P'u\|^2 &= (Pfu,P'u) - (fPu,P'u) \\ &= (P'^*fu,P^*u) - (fPu,P'u) \quad \text{car } P \text{ et } P'^* \text{ commutent} \\ &= (f\,P'^*u,\ P^*u) - (fPu,P'u) - (P''^*u,P^*u)\end{aligned}$$

car ∂_1 et $*$ anticommutent.

Enfin $\|Qu\| = \|Q^*u\|$ pour tout $Q \in Z(G)$. Si $|f|$ est majoré par $A > 0$ dans un ouvert U assez petit, il vient donc

$$\|P'u\|^2 \leq \|Pu\| \ (2A\|P'u\| + \|P''u\|).$$

On en déduit par récurrence sur l'ordre m de P que

$$(*) \qquad \|P'u\| \leq 2mA\ \|Pu\|.$$

Le théorème s'en déduit : on choisit une base $\{X_{k+1},\dots,X_n\}$ de Dg, on la complète en une base $\{X_1,\dots,X_n\}$ de g, et on applique l'inégalité (*) m_1 fois pour la dérivation associée à $X_1,\dots,m_k$ fois pour celle associée à X_k, en notant m_j le degré de $\partial_1^{m_1}\dots\partial_{j-1}^{m_{j-1}}P$ par rapport à X_j. ■

Corollaire 1 : La résolubilité locale de tout opérateur bi-invariant non nul sur DG implique la même propriété sur G.

La preuve est tout à fait classique, mais technique (cf. [21]).

Idée de la preuve : D'abord $Q \in U(G)$ est localement résoluble sur G si et seulement s'il existe un voisinage V de e et des entiers k et ℓ tels que, pour $u,v \in \mathcal{D}(V)$

$$\left|\int_G uv\,dx\right| \leq C^{ste} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup|X^\alpha u| \, . \sum_{|\beta|\leq \ell} \sup|X^\beta\, {}^tQv|\,.$$

On remarque ensuite que, quitte à augmenter k et ℓ et à restreindre V, on peut remplacer les sup de droite par des normes $\mathbb{L}^2$, soit :

$$(**) \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(V) \quad \|u\|_{-k} \leq C^{ste}\, \|{}^tQu\|_\ell$$

les normes écrites étant celles des espaces de Sobolev.

Enfin comme G/DG admet une mesure positive G-invariante (car DG est distingué !), on peut montrer que si $Q \in U(DG)$, l'inégalité (**) sur DG implique une inégalité semblable sur G. (DG n'est pas toujours un sous groupe fermé, mais $DG \cap V$ est fermé dans V).

Comme les opérateurs P et Q du théorème sont bi-invariants, ils commutent aux X^β. Le corollaire s'en déduit sans peine. ∎

<u>Corollaire 2</u> : <u>Si</u> G <u>est résoluble et</u> $P \in Z(G)$ <u>non nul</u>, <u>il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de l'origine et</u> $E \in \mathcal{D}'(U)$ <u>tels que</u>

$$P\mathbb{L}^2(U) \supset \mathbb{L}^2(U) \quad , \quad PC^\infty(U) \supset \mathcal{D}(U) \quad \text{et} \quad PE = \delta .$$

<u>Preuve</u> : D'abord on peut supposer G simplement connexe. C'est alors un groupe de matrices, si bien que chaque groupe dérivé est fermé dans le précédent. On remonte alors les inégalités (**), avec $k = \ell = 0$, du centre où elles sont connues, à G tout entier, et on obtient la première assertion.

L'existence de E se déduit alors du fait que

$$|u(e)| \leq \|Au\|$$

pour un certain opérateur A invariant à gauche (donc commutant à P), et la dernière assertion en découle par convolution sur un ouvert plus petit. ∎

<u>Remarque</u> : Evidemment cette méthode ne donne rien quand G est semi-simple. Mais on obtient facilement par la méthode des inégalités $\mathbb{L}^2$ le résultat que <u>tout opérateur bi-invariant de type principal est localement résoluble</u>, qui suffit à conclure dans certains cas : cas de l'opérateur de Casimir, groupes de rang 1, etc... Toutefois on n'atteint pas ainsi le

résultat général, faute en particulier d'informations suffisantes sur les générateurs de Z(G).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah, M. F. : Resolution of singularities and division of distributions. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) p.145-150.

[2] Bernstein, I. N. : The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter. Funct. Analysis and its appl. 6 (1972) p. 273-285.

[3] Cerezo, A.
Equations with constant coefficients invariant under a group of linear transformations. Trans. Am. Mat. Soc. (1975). Note aux C. R. Acad. Sc. (Août 1974).

[4] Cerezo, A. : Solutions analytiques des équations invariantes sur un groupe compact ou complexe réductif. Ann. Inst. Fourier (1975).

[5] Cerezo A. et F. Rouvière : Solution élémentaire d'un opérateur différentiel invariant à gauche sur un groupe de Lie compact... Ann. E. N. S. (1969) p. 561-581.

[6] Cerezo A., et F. Rouvière : Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre, Ann. ENS (1971) p.21-30.

[7] Cerezo A., et F. Rouvière : Sur certains opérateurs différentiels invariants du groupe hyperbolique. Ann. ENS (1972).

[8] Cerezo A. et F. Rouvière : Opérateurs différentiels invariants sur un groupe de Lie, Séminaire Goulaouic-Schwartz 72-73, Exposé n° X.

[9] Cerezo A. et F. Rouvière : Equations différentielles invariantes sur un groupe de Lie semi-simple complexe. Non publié.

[10] Duflo, M. et M. Raïs : Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles.

[11] Helgason, S. : Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces, Am. J. Math. (1964) p. 565-601.

[12] Helgason, S. : Paley-Wiener theorems and surjectivity of differential operators on symmetric spaces and Lie groups.

[13] Helgason, S. : The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces. Ann. of Math. 98 (1973) p. 451-479.

[14] Hörmander, L. : On the theory of general partial differential operators. Acta Math. 94 (1955), p.161-248

[15] Hörmander, L. : Differential operators of principal type. Math. Annalen 140 (1960) p.124-146.

[16] Hörmander, L. : On the division of distributions by polynomials, Ark. Mat. 3 (1958) p.555-568.

[17] Lojasiewicz, S. : Sur le problème de division, Studia Math. 18 (1959) p.87-136.

[18] Nirenberg, L. et F. Trèves : Solvability of a first order linear partial differential equation, Comm. Pure Appl. Math.14(1963)p.331-351.

[19] Raïs, M. : Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent. C. R. Acad. Sc., t. 273 (1971) p. 495-498.

[20] Raïs, M. : Solutions élémentaires invariantes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73, Exposé n° XIV.

[21] Rouvière F. : Sur la résolubilité locale des opérateurs bi-invariants A paraître.