Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Foias

Quelques résultats sur les fluides en rotation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A5_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z

1 9 7 4 - 1 9 7 5

QUELQUES RESULTATS SUR LES FLUIDES EN ROTATION

par C. FOIAS

Exposé n° VI

11 Décembre 1974

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, dont la frontière $\partial\Omega$ est de classe C^2, invariant par rapport aux notations autour de l'axe Ox_3 . On considère dans Ω les équations de Navier-Stokes

(1.1) $$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + (v.\mathrm{grad})v = - \mathrm{grad}\, p + F \qquad (t > 0)$$

(1.2) $$\mathrm{div}\ v = 0$$

où sur $\partial\Omega$ on a (pour tout $t > 0$)

(1.3) $$\begin{cases} v_1(x_1,x_2,x_3) = -\omega x_2 \\ v_2(x_1,x_2,x_3) = \omega x_1 \\ v_3(x_1,x_2,x_3) = 0 \end{cases}$$

Ci-dessus $F \in L^2(\Omega)^3$, $\nu > 0$ et $\omega \in (-\infty,\infty)$, $\omega \neq 0$ sont donnés d'avance. Le but de cet exposé est de présenter un résultat de régularité pour les solutions de (1.1-3) qui montrera que l'apparition des phénomènes turbulents est, dans le cas présent, confinée à un intervalle fini de temps, dont on donnera une estimation. On indiquera aussi quelques corollaires et quelques questions ouvertes.

2. Soit

(2.1) $$H_o = \{u \in C_o^\infty(\Omega)^3 : \mathrm{div}\ u = 0\}$$

et soient H, resp. H^1, les adhérences dans $L^2(\Omega)^3$, resp. $H^2(\Omega)^3$, de H_o. La norme dans H, induite par celle naturelle de $L^2(\Omega)^3$, sera désignée par $|u|$ et le produit scalaire correspondant par (u,v). Sur

(2.2) $$H^2 = H^1 \cap (H^2(\Omega)^3)$$

on définit l'opérateur A par

(2.3) $$Au = - P\Delta u$$

où P désigne la projection orthogonale de $L^2(\Omega)^3$ sur H. Alors A est un operateur autoadjoint > 0, A^{-1} est compact, et $H^1 = \mathcal{D}_{A^{1/2}}$. On posera

$$((u,v)) = (A^{1/2}u, A^{1/2}v), \quad \|u\| = |A^{1/2}u| \quad (u,v \in H^1)$$

On définit, en outre, les opérateurs

B (bilinéaire) : $H^2 \mapsto H$

C (linéaire) : $H^2 \mapsto H$

par les formules

$$(2.4) \quad \begin{cases} (B(u,v),w) = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} u_j \dfrac{\partial v_k}{\partial x_j} w_k \, dx \quad (u,v \in H^2, \ w \in H), \\ (Cu, v) = \int_\Omega \left[u_1 v_2 - v_1 u_2 + \sum_{j=1}^{3} \left(x_1 \dfrac{\partial u_j}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial u_j}{\partial x_1}\right) v_j\right] dx \\ \qquad (u \in H^1, \ v \in H) \end{cases}$$

Alors B et C jouissent des propriétés suivantes :

$$(2.5) \qquad |(B(u,v),w)| \le C_1 |A^\alpha u| \, |A^\beta v| \, |A^\gamma w|$$

quelq que soient $\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{4}$, $0 \le \alpha, \gamma \le 1/2 \le \beta \le 1$, et $u, v \in H^2$, $w \in \mathcal{D}_{A^\gamma}$;

$$(2.6) \qquad |(Cu,v)| \le C_2 |A^\alpha u| \, |A^\beta v|$$

quels que soient $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha, \beta \ge 0$ et $u \in H^2$, $v \in \mathcal{D}_{A^\beta}$. Les estimations (2.5-6) permettent d'étendre la définition de B et C comme applications de $\mathcal{D}_{A^\alpha} \times \mathcal{D}_{A^\beta}$, resp. $\mathcal{D}_{A^\alpha}$, dans $(\mathcal{D}_{A^\gamma})'$, resp. $(\mathcal{D}_{A^\beta})'$. Pour ces extensions on aura

$$(2.7) \qquad \langle B(u,v),v\rangle = 0 = \langle Cu,u\rangle \quad (u \in \mathcal{D}_{A^{1/4}}, \ v \in \mathcal{D}_{A^{1/2}} = H^1).$$

Au lieu d'étudier les solutions $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ de (1.1-3), il est plus convenable d'étudier les fonctions vectorielles $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_2 = v_1 + \omega x_2$, $u_2 = v_2 - \omega x_1$, $u_3 = v_3$. Cela revient à étudier les solutions $u(t) \in H^1$ de l'équation

$$(2.8)\qquad \frac{du}{dt} + \nu\, Au + B(u,u) + \omega\, Cu = f \qquad (t > 0)\ .$$

Plus précisément, par une solution de (2.8) on sous-entendra une fonction $u(t)$ de $[0,\infty]$ faiblement continue de $[0,\infty]$ dans H, fortement continue à droite en tout $t \notin \sigma$ (où σ est un sous-ensemble de $(0,\infty)$, dépendant de la solution, de mesure nulle) telle que

$$(2.9)\qquad u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau)\,d\tau \quad (\text{dans } H^{-1} = (H^1)',\ t \geq 0)$$

$$(2.10)\qquad u'(t) + \nu\, Au(t) + B(u(t),u(t)) + \omega\, Cu(t) = f$$

$$(\text{dans } H^{-1}, \text{pp. dans } [0,\infty])$$

$$(2.11)\qquad \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \nu \int_{t_o}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2}|u(t_o)|^2 + \int_{t_o}^t (f,u(\tau))\,d\tau \quad (\text{pour tous } t \geq t_o,\ t_o \in [0,\infty] \setminus \sigma).$$

Notons que dans (2.11) on peut aussi prendre $t_o = 0$ et que par suite (2.11) entraîne

$$(2.12)\qquad u(t) \in L^2(0.T;H^1) \qquad (T \in (0,\infty)).$$

En outre (2.11) entraîne aussi aussitôt

$$(2.13)\qquad |u(t)|^2 \leq e^{-\nu\lambda_1(t-t_o)}|u(t_o)|^2 + \frac{|f|^2}{\nu^2\lambda_1^2}$$

$$(2.14)\qquad \int_{t_o}^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{\nu}|u(t_o)|^2 + \frac{|f|^2}{\nu^2\lambda_1}(t-t_o)$$

où $t \geq t_o \in [0,\infty] \setminus \sigma$ et

$$(2.15)\qquad \lambda_1 = \inf\{\|u\|^2 : |u| = 1\}\ .$$

3. Pour le cadre fonctionnel décrit dans le n°2, aussi bien que pour l'existence des solutions u(t), à valeurs initiale $u(0) = u_o \in H$ donnée, nous renvoyons à [2], § I.2 et § II.1. Rappelons toutefois encore un résultat de [2], § III.1. Dans ce but rappelons d'abord qu'une solution u(t) s'appelle régulière sur $[t_1, t_2] \subset [0, \infty]$ lorsque

$$u(t) \in C([t_1, t_2]; H^1) \cap L^2(t_1, t_2; H^2),$$

et, en outre, que pour tout $u_o \in H^1$ il existe une solution régulière dans un voisinage $[0, t_o]$ de 0 (dans $[0, \infty]$), telle que $u(0) = u_o$; toute autre solution $\tilde{u}(t)$, telle que $\tilde{u}(0) = u_o$, coïncident avec u(t) sur $[0, t_o]$. Le résultat de [2], § III.1 est le suivant : ci-dessus u(t) est analytique de $(0, t_o)$ dans H^2,

$$(3.1) \qquad t_o \geq t_{oo} = \frac{C_3}{1 + [\max\{\|u_o\|, C_4|f|\}]^4} = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

et

$$(3.2) \qquad |Au(t)|^2 \leq \frac{C_5}{t^2}(\|u_o\|^2 + C_6|f|^2)(\|u_o\|^4 + C_6^2|f|^4 + \omega^2 + 1).$$

(pour $0 < t \leq t_{oo}$) ,

où $C_3 - C_6$ sont des constantes (par rapport aux u_o, f, ω et t. (Remarquons que pour obtenir (2.13-14) il faut reprendre avec plus de soin les estimations données aux cours de l'alinéa 1.8 de [2], §III.1.)

4. Nous allons maintenant prouver la suivante

<u>Proposition 1</u> : <u>Il existe des constantes</u> C_7, C_8 (<u>dépendant seulement de</u> Ω <u>et</u> ν) <u>telles que si</u>

$$(4.1) \qquad (\omega + \frac{1}{\omega})|f| \leq C_7 \omega^{1/2} ,$$

<u>alors toute solution</u> u(t) <u>est régulière sur tout intervalle</u> $[t_1, t_2]$ <u>dès que</u>

$$(4.2) \qquad t_1 \geq \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\nu\lambda_1} \log(\omega|u_o|^2) + C_8$$

<u>Démonstration</u> : En vertu de (2.12), la réunion $\mathcal{R}$ des intervalles $[t_1, t_2]$ où $u(t)$ est régulière est de mesure totale dans $[0,\infty]$. En vertu du n°3 toute composante connexe de $\mathcal{R}$ est un intervalle ouvert J à droite. Soit t_3 l'extrémité droite de J et soit $[t_1, t_3] \subset J$. De nouveau en vertu du n° 3, nous avons

$$(4.3) \qquad \lim_{t_1 \leq t \to t_3} \|u(t)\| = \infty ,$$

et

$$(4.4) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu(Au(t),u(t)) + (B(u(t),u(t)),Au(t)) + \omega(Cu(t),Au(t)) = (f, Au(t))$$

pour tout $t \in [t_1, t_3]$. De (4.4) il découle aussitôt

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \leq C_9\|u(t)\|^6 + \omega^2 C_{10}\|u(t)\|^2 + C_{11}|f|^2$$

(par l'utilisation des relations (2.5-6)), d'où

$$(\|u(t)\|^4 + \omega^2)^{-1}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \leq C_{12}\|u(t)\|^2 + \frac{C_3}{\omega^2}|f|^2$$

et par suite (en utilisant (2.14))

$$(4.5) \qquad \frac{1}{\omega} \operatorname{Arctg} \frac{\|u(t)\|^2}{\omega} \leq \frac{1}{\omega} \operatorname{Arctg} \frac{\|u(t_o)\|^2}{\omega} + C_{14}|u(t_o|^2 + C_{15}(1 + \frac{1}{\omega^2})|f|^2(t - t_o)$$

pour tous t_o, $t \in [t_1, t_3]$, où $C_9 - C_{15}$ sont des constantes (dépendant seulement de Ω et ν).

Prenons $t > t_1 + \frac{1}{\omega^2}$. Alors dans (2.14) on peut choisir $t_o = t - \frac{1}{\omega^2}$.
Il en résulte qu'il existe $t_o \in (t - \frac{1}{\omega^2}, t)$ tel que

$$\|u(t_o)\|^2 \leq \frac{2\omega^2}{\nu}|u(t - \frac{1}{\omega^2})|^2 + \frac{2|f|^2}{\nu^2\lambda_1}$$

et par suite de (4.5) nous pouvons déduire facilement

$$(4.6) \qquad \operatorname{Arctg} \frac{\|u(t)\|^2}{\omega} \le C_{16}\,\omega\,|u(t-\frac{1}{\omega^2})|^2 + C_{17}\,\omega(1+\frac{1}{\omega^2})^2|f|^2 \le$$

$$\le C_{16}\,\omega\,|u_o|^2 \exp[-\nu\lambda_1(t-\frac{1}{\omega^2})] + C_{18}\,\omega(1+\frac{1}{\omega^2})^2|f|^2$$

Ainsi si nous posons $C_{17}^2 = \frac{\pi}{8}\, C_{18}^{-1}$ et si (4.1) est vérifiée alors (4.6) devient

$$\operatorname{Arctg} \frac{\|u(t)\|^2}{\omega} \le C_{16}\,\omega\,|u_o|^2 \exp[-\nu\lambda_1(t-\frac{1}{\omega^2})] + \frac{\pi}{8} \; ;$$

par conséquent si

$$(4.7) \qquad C_{16}\,\omega\,|u_o|^2 \exp[-\nu\lambda_1(t-\frac{1}{\omega^2})] \le \frac{\pi}{8}$$

on aura

$$(4.8) \qquad \|u(t)\|^2 \le 2C_{16}\,\omega^2|u_o|^2 \exp[-\nu\lambda_1(t-\frac{1}{\omega^2})] + \frac{\pi}{4}$$

Mais en posant $C_8 = \operatorname{Log}(8\,C_{16}\cdot\pi^{-1})$, les relations (4.7-8) montrent que si t_1 vérifie (4.2) alors (4.3) est impossible, ce qui achève la preuve de la proposition .

<u>Corollaire</u> : <u>Dans les conditions de la proposition 1.toute solution</u> <u>périodique</u> (<u>en particulier, stationnaire</u>) <u>est régulière</u> .

<u>Remarque</u> : On peut montrer par une méthode de Galerkine(comme dans [4], ch. I) qu'il existe des solutions stationnaires, quels que soient f et ω. Ainsi le corollaire précédent n'est pas dépourvu d'objet.

5. Discutons un peu le cas où $f \equiv 0$.

<u>Proposition 2</u> : <u>Si</u> $f \equiv 0$, <u>alors pour toute solution</u> $u(t)$ <u>on a</u>

$$(5.1) \qquad \limsup_{t\to\infty} e^{\nu\lambda_1 t}|Au(t)|^2 \le C_{19}(1+\frac{\omega^2}{\nu^2})^4|u_o|^2 \, .$$

où C_{19} est une constante dépendant seulement de Ω.

Démonstration : De (4.6) et (3.1-2) nous pouvons déduire aussitôt que pour t assez grand on a

$$|Au(t)|^2 \leq \frac{4C_4}{C_5^2}(1+\omega^2)^2\omega^2|u_o|^2.\exp\left[-\nu\lambda_1\left(t-\frac{C_3}{2}\frac{1}{1+\omega^2}\right)\right].(\omega^2+2)$$

d'où

$$\limsup_{t\to\infty} e^{\nu\lambda_1 t}|Au(t)|^2 \leq C_{20}(\nu)(1+\omega^2)^4|u_o|^2. \tag{5.2}$$

Soit $C(\omega,\nu)$ le supremum des quotients

$$(\limsup_{t\to\infty}|Au(t)|^2 e^{-\nu\lambda_2 t})|u_o|^{-2}$$

quand $u(t)$ parcourt la famille de toutes les solutions. Alors (5.2) montre que

$$C(\omega,\nu) \leq C_{20}(\nu)(1+\omega^2)^4. \tag{5.3}$$

Mais en vertu de la forme de l'équation (2.8) on a

$$C(\rho\omega,\rho\nu) = C(\omega,\nu) \qquad (\rho \in (0,\infty)). \tag{5.4}$$

(5.2-4) montrent que (5.1) est vérifiée si l'on prend $C_{19} = C_{20}(1)$.

Corollaire : Pour toute solution $v(t,x)=\{v_1(t,x_1,x_2,x_3),v_2(t,x_1,x_3,x_3).v_3(t,x_1,x_2,x_3)\}$ de (1.1-3) on a

$$\begin{cases} |v_1(t,x_1,x_2\ x_3)+\omega x_2| \to 0 \\ |v_2(t,x_1,x_2,x_3)-\omega x_1| \to 0 \\ |v_3(t,x_1,x_2\ x_3)| \to 0 \end{cases} \qquad (t\to\infty) \tag{5.5}$$

les convergences étant de rapidité exponentielle uniforme sur $\bar{\Omega}$.

Conséquence directe de la proposition 2 et du plongement de Sobolev $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

6. La proposition 2 suggère l'étude du supremum $C_2(R,\omega,\nu)$ des valeurs $t|Au(t)|$ lorsque t parcourt $(0,\infty)$ et $u(t)$ parcourt la famille des solutions telle que $\|u_o\| \leq R$, aussi bien que celui de

$$C_2(\omega.\nu) = \sup \{C_2(R,\omega,\nu)R^{-1} \; : \; R \in (0,\infty)\}.$$

<u>Conjecture</u> : $C_2(\omega,\nu)$ et même $C_2(R,\omega,\nu)$ $(R > 0)$ ne peuvent rester bornés lorsque $|\omega| \to \infty$.

Cela représente une variante beaucoup affaiblie du problème concernant l'existence des solutions turbulentes au sens de Leray [3].

Enfin remarquons que nos propositions 1 - 2 s'apparentent à certains théorèmes de régularité de Leray [3] (cas $\omega = 0$) et vraisemblablement de Duff [1] (cité d'après [5], sans que l'auteur ait eu la possibilité de consulter [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. F. D. Duff : On turbulent solutions of the Navier-Stokes Equations (unpublished).

[2] C. Foias : Solutions statistiques des équations de Navier-Stokes (Cours au Collège de France. 1974).

[3] J. Leray : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math.. 63 (1934), 193-248.

[4] J. L. Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1969).

[5] J. E. Marsden, D. G. Ebin, A. F. Fisher : Diffeormorphism groups, hydrodynamics and relativity (Lecture Notes, 1971).