Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Y. Colin de Verdière
M. Frisch

Régularité lipschitzienne et solutions de l'équation des ondes sur une variété riemannienne compacte

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 12, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

REGULARITE LIPSCHITZIENNE ET SOLUTIONS DE L'EQUATION DES ONDES SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE COMPACTE

par Y. COLIN de VERDIERE et M. FRISCH

Exposé n° XII

3 Février 1976

Si M est une variété riemannienne compacte de dimension n et Δ le laplacien associé ($\Delta \geq 0$), on se pose le problème de la croissance des solutions u de l'équation des ondes sur M ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0$) à partir de leur observation sur un intervalle de temps $[0,T]$. Plus précisément, T et α étant des réels positifs, existe-t-il un poids $\omega(t)$ tel que pour toute solution u de l'équation des ondes lipschitzienne d'ordre α sur $M \times [0,T]$, on ait :

$$|u(x,t)| \leq \omega(t) \|u\|_{\Lambda^\alpha(M \times [0,T])} \quad ?$$

Dans (7) et (8), l'un des auteurs de ce travail a résolu ce problème par les techniques de l'analyse harmonique et trouvé des poids $\omega(t)$ explicites, dans le cas où M est un tore plat ou une sphère munie de la métrique canonique. La réponse fait apparaître des indices critiques que nous pouvons résumer dans les deux tableaux suivants. La réponse oui ou non se rapporte à l'existence d'un poids $\omega(t)$:

<u>tore T^n plat</u>

T \ α	$\alpha < \frac{n-1}{2}$	$\alpha > \frac{n-1}{2}$
	Non	Oui

<u>Sphère S^n canonique</u> (π = distance des antipodes)

T \ α	0 — $\frac{n-1}{2}$	$> \frac{n-1}{2}$
$T < \pi$	Non	Oui
$T > \pi$	Oui	Oui

En fait, via le théorème du graphe fermé, le problème de l'existence de $\omega(t)$ est uniquement un problème de régularité : si $u(x,t) \in \mathcal{D}'(M \times \mathbb{R})$ est une solution de l'équation des ondes telle que $u \in \Lambda^\alpha(M \times [0,T]$, a-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(.,t) \in L^\infty(M)$? (la restriction à un instant t d'une distribution solution de l'équation des ondes ayant toujours un sens). Pour donner une réponse à ce problème, on utilise le fait qu'une solution de la demi-équation des ondes $P_+ u = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\Delta})\, u = 0$ est donnée en fonction de sa donnée initiale par un opérateur intégral de Fourier dont la transformation canonique est le flot géodésique sur $T^*(M) \setminus 0$. On a donc été amené à étudier le problème de la régularité lipschitzienne des distributions et opérateurs intégraux de Fourier.

§ 1. ENONCE DES RESULTATS

Ils sont contenus dans les deux théorèmes suivants :

Théorème 1 : Toute solution $u(x,t) \in \mathcal{D}'(M \times \mathbb{R})$ de l'équation des ondes sur M telle que $u \in \Lambda^{\alpha}(M \times [0,T])$ est continue sur $M \times \mathbb{R}$ dans les cas suivants :

1 i) $T > 0$ et $\alpha > \frac{n-1}{2}$.

1 ii) $\alpha > 0$ et $T > T_0 > 0$ où T_0 est tel qu'il existe une application différentiable $\sigma : M \to M$ telle que pour toute géodésique γ sur M, on ait $\gamma(T_0) = \sigma(\gamma(0))$.

Théorème 2 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution $u(x,t)$ de l'équation des ondes sur M avec $u \in \Lambda^{\alpha}(M \times [0,T])$ et $u(.,T+\varepsilon) \notin L^{\infty}(M)$, s'il existe sur M un arc géodésique γ de longueur T avec une des propriétés suivantes :

2 i) $\alpha < \frac{n-1}{2}$ et γ n'a pas de points conjugués.

2 ii) $\alpha < \frac{n-(k+1)}{2}$ et la multiplicité des points conjugués sur γ est au plus k.

2 iii) $\alpha < \frac{n-1}{2} - \frac{1}{6}$ et les points conjugués $\gamma(t_i)$ de $\gamma(0) = x_0$ sont simples au sens suivant : si $v = \dot{\gamma}(0)$, l'application $\exp_{x_0} : T_{x_0}(M) \to M$ a au point $t_i \cdot v$ une "singularité-pli".

Remarques :

- Dans le cas 1 i) l'assertion est immédiate pour $\alpha > \frac{n}{2}$: il résulte du lemme de Sobolev que toute solution de la demi-équation des ondes est continue et bornée sur $M \times \mathbb{R}$.
- L'énoncé 1 ii) s'applique au cas où le flot géodésique est périodique de période T_0 avec $\sigma = \mathrm{Id}$; mais on peut l'appliquer aussi à la sphère canonique avec $T_0 = \pi$ et σ = antipodie.

- L'énoncé 2 i) s'applique avec T quelconque si par exemple $\# \pi_1(M) = \infty$. Dans un tel cas $\frac{n-1}{2}$ apparaît comme un indice critique.
- L'énoncé 2 ii) s'applique avec T quelconque aux espaces symétriques de rang ℓ avec $k = n - \ell$; il s'applique aussi à la situation générique avec $k = 1$.
- L'énoncé 2 iii) est sans doute le cas générique.
- Enfin les indices critiques obtenus redonnent ceux de (7) et (8).

§ 2 ESPACES DE LIPSCHITZ

Rappelons-en la définition :

Définition : Si X est une variété munie d'une métrique, on définit les espaces de Lipschitz $\Lambda^\alpha(X)$ pour $0 < \alpha < 1$ par $u \in \Lambda^\alpha(X)$ si $\forall K \subset\subset X \times X$, il existe C telle que

$$\forall\ (x,y) \in K, \text{ on ait : } |u(x) - u(y)| \leq C.(d(x,y))^\alpha .$$

Ces espaces ont les propriétés suivantes :

a) si P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, P opère de Λ_o^α dans Λ^α. ((3)).

b) si $X = \mathbb{R}^n$, Δ est le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ et $\begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \\ 0 < \alpha+\beta < 1 \end{array}$, $\Delta^{-\beta/2}$ opère de Λ_o^α dans $\Lambda^{\alpha+\beta}$. ((13)).

On peut donc définir de manière raisonnable des espaces de Lipschitz Λ^α pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$ par : $u \in \Lambda_o^\alpha(X)$ $(n < \alpha < n+1,\ n \in \mathbb{Z})$ s'il existe un pseudo-différentiel elliptique P d'ordre n tel que $Pu \in \Lambda^\alpha(X)$. Et on définit facilement l'espace local Λ^α à partir de Λ_o^α.

On a donc la proposition fondamentale suivante :

Proposition : Si $P \in L^{-\beta}(X)$ et α, $\alpha + \beta \notin \mathbb{Z}$, P opère de $\Lambda_o^\alpha(X)$ dans $\Lambda^{\alpha+\beta}(X)$.

On utilisera ceci en disant que les espaces de Lipschitz sont microlocaux au sens suivant :

Proposition : Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$ et supposons que $\forall \lambda_0 \in T^*(X) \setminus 0$, il existe $v \in \Lambda^\alpha(X)$ telle que $\lambda_0 \notin WF(u-v)$, alors $u \in \Lambda^\alpha(X)$. (On pourrait même définir un WF_α analogue au WF_s utilisé par Hörmander : $\lambda \notin WF_\alpha(u)$ si $\exists\ P \in L^0(X)$, $p(\lambda) \neq 0$ tel que $Pu \in \Lambda^\alpha(X)$).

Rappelons qu'on a la suite d'emboîtements suivante qui nous permettra de ramener un problème C^k ou L^∞ à un problème sur les Lipschitz : si $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$C^\infty(X) \subset \ldots \Lambda^{n+\varepsilon}(X) \subset C^n(X) \subset \Lambda^{n-\varepsilon}(X) \subset \Lambda^\varepsilon(X) \subset C(X) \subset L^\infty(X) \subset \Lambda^{-\varepsilon}(X) \subset \mathcal{D}'(X).$$

§ 3. REGULARITE LIPSCHITZ DES DISTRIBUTIONS DE FOURIER

Si Λ est une variété lagrangienne conique, Hörmander définit dans (10) un espace de distributions $I^m(X;\Lambda)$; du fait qu'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre β opère de I^m dans $I^{m+\beta}$, on peut définir un indice critique n_Λ par :

Définition : $n_\Lambda = \sup\{m \in \mathbb{R} \mid$ toute distribution $u \in I^m(X;\Lambda)$ est continue$\}$.

Cet indice a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1) \quad \text{si } m+\beta < n_\Lambda \text{ et } u \in I^m(X;\Lambda), \text{ alors } u \in \Lambda^\beta(X). \\ 2) \quad \text{si } m+\beta > n_\Lambda \text{ et } u \in I^m(X;\Lambda) \text{ est elliptique alors } u \notin \Lambda^\beta(X). \end{cases}$$

Cet indice n_Λ dépend essentiellement de la géométrie de la projection $\pi_\Lambda : \Lambda \to X$, ce qu'on peut mettre en évidence par l'énoncé suivant :

Proposition : Si le rang r de $d\pi_\Lambda$ vérifie $k_1 \leq r \leq k_2$ sur Λ, on a $\frac{k_1}{2} - \frac{3n}{4} \leq n_\Lambda \leq \frac{k_2}{2} - \frac{3n}{4}$.

Preuve : Si $r \geq k_1$, on peut ((10)) représenter localement Λ à l'aide d'une fonction phase ayant $n - k_1$ variables oscillantes. On s'aperçoit alors que pour $m < \frac{k_1}{2} - \frac{3n}{4}$, l'intégrale définissant la distribution $u \in I^m(X;\Lambda)$ est absolument convergente et donc que u est continue.

Soit $\lambda_o \in \Lambda$ un point où le rang maximum est atteint, alors au voisinage de ce point, Λ est le fibré normal à une sous-variété Y de dimension k_2 de X. Si on prend des coordonnées locales $x = (x', x'')$, où Y est définie par $x' = 0$. On peut prendre $\varphi(x,\theta) = \sum_{i=1}^{n-k_2} x'_i \theta_i$ comme fonction phase et on voit que, pour tout x''_o, $u_{x''=x''_o}$ est somme de distributions homogènes en x' donc on peut facilement déterminer la régularité lipschitzienne.

Si on veut faire une étude plus finie de cet indice critique, il faut faire entrer en jeu les exposants qui apparaissent dans les développements asymptotiques de la méthode de la <u>phase stationnaire</u>. Plus précisément, si $\Phi(x',\theta)$ est une fonction analytique dans un ouvert de $X' \times \mathbb{R}^k$, on peut lui associer les <u>deux indices suivants</u> :

$$M_\Phi = \operatorname{Inf}\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \forall a \in C_o^\infty, \text{ on ait : } \int e^{i\tau\Phi(x',\theta)} a(x',\theta)d\theta = O(\tau^{\alpha - \frac{k}{2}}) \text{ uniformément en } x'\}$$

$$m_\Phi = \sup\{\alpha_1 \in \mathbb{R} \mid \exists a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^k) \text{ et } x'_o \in X'$$

tels que $\tau^{k/2}\int e^{i\tau\Phi(x'_o,\theta)} a(\theta)d\theta$ admette au sens des symboles en τ un développement asymptotique $e^{i\tau c} \sum_{\alpha_1 > \alpha_2 > \dots} \tau^{\alpha_i} P_i(\operatorname{Log}\tau)$ où les P_i sont des polynômes et $P_1 \neq 0\}$. (Cf. (1), (2) et (4)).

Ces deux indices sont égaux dans le cas où $\Phi(x'_o,\theta)$ est une singularité simple de la classification d'Arnold. On ne connait pas d'exemples où ils ne sont pas égaux.

On a le :

<u>Théorème 3</u> : <u>Si</u> Λ <u>admet une fonction phase du type</u> $\varphi(x_1,x',\tau,\theta) = \tau(x_1 - \Phi(x',\theta))$ <u>où</u> (τ,θ) <u>sont les variables oscillantes</u>, τ <u>étant la variable d'homogénéité</u>, <u>on a</u> :

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4} + M_\Phi\right) \leq n_\Lambda \leq -\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4} + m_\Phi\right).$$

<u>Preuve</u> : Pour l'inégalité avec M_Φ, on procède comme plus haut : si $m < -(\frac{1}{2}+\frac{n}{4}+M_\Phi)$, on s'aperçoit que les intégrales oscillantes définissant $u \in I^m(X;\Lambda)$ convergent absolument.

Pour l'inégalité avec m_Φ, il faut d'abord remarquer que si $u \in I^m(X;\Lambda)$, $u\restriction_{x'=x'_o}$ a un sens (car $\Lambda \cap N^*(\{x'=x'_o\}) = \emptyset$) et est donnée par une intégrale du type :

$$\int e^{i\tau x_1}\left(\int e^{-i\tau\Phi(x'_o,\theta)} a(x'_o,\theta)\,d\theta\right)\tau^\mu d\tau$$

modulo les termes plus réguliers. On est donc amené à étudier la transformée de Fourier de symboles du type $\sum_{\alpha_1>\alpha_2>} \tau^{\alpha_i} P_i(\mathrm{Log}\,\tau)$ qui sont des symboles du même genre dont on voit facilement la régularité lipschitzienne.

<u>Corollaire</u> : <u>Soit</u> Λ <u>l'adhérence du fibré normal à la partie régulière du cusp</u> $\{x_1 = \frac{2\theta^3}{3}, x_2 = \theta^2$, x_i quelconques pour $i \geq 2\}$, <u>on peut prendre</u> $\varphi(x_1,x_2,\tau,\theta) = \tau(x_1 - x_2\theta + \frac{\theta^3}{3})$ <u>et on a donc</u> :

$$\Phi(x_2,\theta) = x_2\theta - \frac{\theta^3}{3} \quad \underline{\text{et}} \quad \tau^{1/2}\int e^{-i\tau(x_2\theta+\frac{\theta^3}{3})} a(x_2,\theta)\,d\theta = a(x_2,0)\tau^{1/6}\mathrm{Ai}(\tau^{2/3}x_2)+\dots$$

<u>On en déduit que</u> $m_\Phi = M_\Phi = \frac{1}{6}$ <u>car</u> Ai <u>est bornée</u>. <u>On a donc</u> $n_\Lambda = (\frac{n}{4}+\frac{2}{3})$.

On a besoin d'introduire aussi un indice critique pour les opérateurs :

<u>Définition</u> : <u>Si</u> $\chi : T^*(Y)\setminus 0 \to T^*(X)\setminus 0$ <u>est un difféomorphisme canonique homogène, on définit un indice</u> $C_\chi = \sup\{m \in \mathbb{R} \mid \forall A \in I^m(X,Y;\chi)$ <u>et</u> $\forall u \in C_o(Y),\ Au \in C(X)\}$.

<u>Proposition</u> : <u>Si</u> $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ <u>sont tels que</u> $m+\beta < C_\chi + \alpha$, $A \in I^m(X,Y;\chi)$ <u>opère de</u> $\Lambda^\alpha_o(Y)$ <u>dans</u> $\Lambda^\beta(X)$.

<u>Théorème 4</u> : <u>Si</u> Γ <u>est le graphe de</u> χ <u>et que le rang de la projection canonique</u> $\pi : \Gamma \to X\times Y$ <u>est constant égal à</u> $2n-k$ (n = <u>dimension de</u> X = <u>dimension de</u> Y), <u>alors</u> $C_\chi = -\frac{n-k}{2}$.

§ 4. PREUVE DE 1ii)

On se ramène d'abord au cas de la demi-équation des ondes : si u est une solution de l'équation des ondes, on voit facilement à l'aide de la décomposition spectrale que u peut s'écrire :

$$u = a_0 + b_0 t + u_+ + u_-$$

où u_+ et u_- sont des solutions de deux demi-équations des ondes. De plus $WF(u_\pm) \subset \{x,\xi,t,\tau) \mid \tau \pm \|\xi\| = 0\}$. On a donc $u_+ = u \pmod{C^\infty}$ au voisinage de $\{\tau + \|\xi\| = 0\}$ et u_+ est C^∞ ailleurs. On en déduit que si $u \in \Lambda^\alpha(M \times [0,T]$, u_+ et u_- aussi par la propriété des Λ^α d'être microlocaux.

Sous les hypothèses de 1 ii), on a $u(x,t+T_0) = P(u(x,t))$ où P est un opérateur intégral de Fourier d'ordre 0 associé au difféomorphisme canonique induit par le difféomorphisme $\sigma \times \mathrm{Id}$ sur $M \times \mathbb{R}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4 avec $k = n+1 = \dim(X \times \mathbb{R})$.

§ 5. PREUVE DE 2 ii)

Soit $x_0 = \gamma(0)$ où γ est l'arc de géodésique de longueur T sans points conjugués. Cela signifie que l'application exponentielle $\exp_{x_0} : T_{x_0}(M) \to M$ est un difféomorphisme local au voisinage de $[0,T].\dot\gamma(0)$. Soit C un cône ouvert de $T^*_{x_0}(M) \setminus 0$ contenant $\dot\gamma(0$ tel que

$\exp_{x_0} : C \cap \{\|v\| \le T\} \to M$ soit un difféomorphisme local. Soit $u_0 \in I^m(X, T^*_{x_0}(X))$ telle que $WF(u_0) \subset C$ et u_0 elliptique en $\dot\gamma(0)$ Soit $u(x,t)$ la solution de $P_+ u = 0$ avec u_0 comme donnée initiale ; $u(x,t) \in I^{m-1/4}(X \times \mathbb{R}, \Lambda)$ avec $\Lambda = \{(\varphi_t(x_0,\xi),t,\tau) \mid \tau + \|\xi\| = 0$ et $\xi \in WF(u_0)\}$. Pour $t \in\,]0,T]$, le rang de la projection de Λ sur $M \times \mathbb{R}$ est égal à n. Il y a donc entre les indices critiques pour u_0 et $u\restriction_{M \times]0,T]}$ un décalage de $\frac{n-1}{2}$ qui permet de choisir $u \in \Lambda^{\frac{n-1}{2} - \varepsilon}(M \times]0,T])$ et $u_0 \notin \Lambda^{-\varepsilon/2}(M)$ pour tout $\varepsilon > 0$; ce qui permet de conclure car $L^\infty \subset \Lambda^{-\varepsilon/2}$.

§ 6. REMARQUES

On peut généraliser les méthodes et les résultats précédents dans deux directions : 1) Etudier le cas de variétés non compactes ou de variétés avec bord dans les cas où on peut utiliser les Fourier intégraux.

2) Faire une théorie L^p ($p \neq 2$) basée sur le fait que les pseudo-différentiels d'ordre 0 opèrent bien de $L^p_o \to L^p$ pour $1 < p < +\infty$; ce qui permet de définir une échelle d'espaces microlocaux analogues aux Λ^α et des indices critiques. Pour $p = 2$, la théorie est facile : les opérateurs $e^{\pm it\sqrt{\Delta}}$ sont unitaires dans les H^s et la régularité H^s des solutions de l'équation des ondes est constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Arnold : Functional analysis and its applications 6, 3 (1972) p.61-62 .

[2] V. Arnold : Functional analysis and its applications 6, 4 (1972) p. 3 - 25.

[3] J. L. Clerc et P. Courrèges : Note aux C. R. Acad. Sc. Paris 269 A, p.967-969.

[4] J. Duistermaat : C. P. A. M. 27 (1974) p.207-281.

[5] J. Duistermaat et V. Guillemin : Inventiones 29 (1975) p. 39-79.

[6] J. Duistermaat et L. Hörmander : Acta Math. 128 (1972) p. 183-269.

[7] M. Frisch : Journal de Math. Pures et Appliquées 54 (1975) p.259-284 .

[8] M. Frisch : A paraître.

[9] V. Guillemin et D. Schaeffer : Bull. A. M. S. 79 (1973) p.382-385.

[10] L. Hörmander : Acta Math. 127 (1971) p.79-183.

[11] Y. Meyer : Astérisque 1 (1973).

[12] Y. Meyer : Annales Fourier 24 (1974) p. 189-211.

[13] E. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press (1970).
