

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. S. BAOUENDI

C. GOULAOUIC

Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 13,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A14_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISBAU - 91120 PALAISBAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 09 15 96 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

PROBLEMES DE CAUCHY PSEUDO-DIFFERENTIELS
ANALYTIQUES NON LINEAIRES

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé n° XIII

16 Février 1976

On donne quelques résultats du type "théorème de Cauchy-Kovalewsky non linéaire" mais pour des problèmes non locaux (plus précisément, pseudo-différentiels en les variables d'espace). On dégage seulement les grandes lignes des démonstrations et on renvoie à [2] pour des résultats plus complets et des démonstrations détaillées.

Soient Γ une variété analytique réelle compacte de dimension n , $T > 0$; soient E et F_j pour $j \in \{1, \dots, k\}$ des fibrés vectoriels analytiques de base Γ ; soient u_0 une section du fibré E sur Γ et V un voisinage de u_0 dans E ; pour $j \in \{1, \dots, k\}$ on se donne une fonction f_j analytique de $[-T, T] \times V$ dans F_j préservant la projection sur la base Γ et un opérateur P_j pseudo-différentiel analytique d'ordre au plus 1 opérant sur les sections analytiques de F_j à valeurs dans les sections analytiques de E et dépendant analytiquement de $t \in [-T, T]$.

On a alors :

Théorème 1 : Il existe $\varepsilon \in]0, T]$ et une unique fonction u analytique de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ dans les sections analytiques de E et vérifiant :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^k P_j f_j(t, u) & \text{sur }]-\varepsilon, \varepsilon[\\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Dans le cas particulier où les opérateurs P_j sont différentiels, le résultat ci-dessus n'est autre que le théorème de Cauchy-Kovalewsky.

Comme on le constate aisément sur la méthode de démonstration, on peut dans le théorème ci-dessus remplacer l'analyticité en $t \in [-T, T]$ des données par la continuité et obtenir alors u seulement continuellement différentiable en t sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Comme exemple d'application de ce théorème 1 on peut donner l'existence et l'unicité d'une solution analytique (locale en temps) de l'équation d'Euler (le résultat général C^∞ est montré dans [5]) ; plus précisément : soit Γ une variété riemannienne analytique compacte ; on note $T\Gamma$ le fibré tangent et ∇ la connexion riemannienne de Γ ; on désigne par $a(\Gamma)$ l'espace des fonctions analytiques complexes sur Γ et par $a(\Gamma, T\Gamma)$

l'espace des champs de vecteurs analytiques sur Γ .

Etant donnés $u_0 \in a(\Gamma, T\Gamma)$ tel que $\operatorname{div} u_0 = 0$ et $f \in C([-T, T], a(\Gamma, T\Gamma))$, il existe $\varepsilon \in]0, T]$, $p \in C([- \varepsilon, \varepsilon], a(\Gamma))$ et une unique fonction $u \in C^1([- \varepsilon, \varepsilon], a(\Gamma, T\Gamma))$ solutions de :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u = \operatorname{grad} p + f & \text{sur }]-\varepsilon, \varepsilon[\\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On note d'abord que pour $v \in a(\Gamma, T\Gamma)$ vérifiant $\operatorname{div} v = 0$, on a :

$\nabla_v v = \operatorname{div}(v \otimes v)$. Pour $v \in a(\Gamma, T\Gamma)$, on note $Pv = v - \operatorname{grad} \Delta^{-1} \operatorname{div} v$ (où le laplacien Δ est défini par $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$) et on vérifie que P est un opérateur pseudodifférentiel analytique d'ordre 0 opérant dans $a(\Gamma, T\Gamma)$ et que l'on a : $Pv = v$ si $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} Pv = 0$ pour tout $v \in a(\Gamma, T\Gamma)$ et $P \operatorname{grad} p = 0$ pour tout $p \in a(\Gamma)$.

Il est alors facile de voir que l'équation (2) équivaut à

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + P \operatorname{div}(u \otimes u) = Pf \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

et que l'on peut alors appliquer le théorème 1 ainsi que la remarque sur la régularité en la variable t .

On donne une idée de la démonstration du théorème 1 dans le cas plus simple d'une équation scalaire (c'est-à-dire, plus précisément, lorsque $k=1$ et $E = F = \Gamma \times \mathbb{C}$). Schématiquement alors la méthode consiste à utiliser un théorème abstrait de Nirenberg [9] et à trouver une chaîne d'algèbres de Banach dont la réunion est $a(\Gamma)$ et telle que les opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre d sur Γ ($d \in \mathbb{N}$) y soient singuliers de type d au sens de [9] [11].

Le résultat annoncé ici contient évidemment le théorème 1 de [1] ; il est à noter que les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne suffisent pas ici ; en particulier il est nécessaire de changer le choix de la chaîne d'espaces.

§ 1. CHAINES D'ALGEBRES DE BANACH DE FONCTIONS ANALYTIQUES

Soit $\rho \in]0, 1[$; on choisit une distance d sur Γ et on note

$$C^\rho = \left\{ u \in C(\Gamma) ; \|u\| = \sup_{x \in \Gamma} |u(x)| + \sup_{(x,y) \in \Gamma \times \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\rho} < \infty \right\} ;$$

l'espace C^ρ muni de la norme $\| \cdot \|$ est une algèbre de Banach.

Soient X_1, \dots, X_r des champs de vecteurs réels analytiques sur Γ et qui engendrent l'espace tangent en chaque point de Γ ; l'existence de tels champs résulte du plongement analytique de Γ dans un espace \mathbf{R}^r (cf. [8_r]); pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ avec $\alpha_j \in \{1, \dots, r\}$, on note $|\alpha| = \ell$ et $X^\alpha = X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_\ell}$; on note \mathcal{J} l'ensemble de tels indices α .

Pour $s > 0$, on note :

$$E_s = \left\{ u \in C^\infty(\Gamma) ; \|u\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \sup_{\substack{\alpha \in \mathcal{J} \\ |\alpha| = k}} \|X^\alpha u\| < \infty \right\}.$$

Les espaces E_s , munis de la norme $\| \cdot \|_s$, constituent une chaîne décroissante d'algèbres de Banach (pour u, v dans E_s , on a :

$$\|uv\|_v \leq \|u\|_s \|v\|_s). \text{ On a d'abord :}$$

Proposition 1 : On a $a(\Gamma) = \bigcup_{s>0} E_s$.

En effet, pour $u \in E_s$, on a :

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^r X_j^2 \right)^k u \right\| \leq r^k s^{-2k} \|u\|_s 2k! \quad \text{pour } k \in \mathbf{N}$$

et donc $u \in a(\Gamma)$ d'après [6].

Inversement soit $u \in a(\Gamma)$; en utilisant des cartes locales, on montre que u est dans un espace E_s grâce au lemme suivant :

Lemme 1 : Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, Y_1, \dots, Y_r des opérateurs différentiels d'ordre au plus 1 à coefficients analytiques sur Ω ; pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C > 0$ tel que

$$\|Y^\alpha u\|_{C^0(K)} \leq C^{|\alpha|+1} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{J}.$$

La preuve du lemme est un simple calcul consistant à montrer, par récurrence sur α , qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que l'on ait pour tous $\alpha \in \mathcal{J}$ et $\beta \in \mathbf{N}^n$,

$$\|D^\beta Y^\alpha u\|_{C^0(K)} \leq C_1^{|\alpha|+1} C_2^{|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)!$$

(on a noté $D^\beta = D_1^{\beta_1} \dots D_n^{\beta_n}$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$).

§ 2. COMPORTEMENT DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ANALYTIQUES DANS LA CHAÎNE $(E_s)_{s>0}$

On montre le résultat :

Proposition 2 : Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d ($d \in \mathbf{N}$); alors P est un opérateur singulier de type d dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$, c'est-à-dire qu'il existe $s_0 > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $0 < s' < s \leq s_0$, $P \in \mathcal{L}(E_s, E_{s'})$ et

$$\|P\|_{\mathcal{L}(E_s, E_{s'})} \leq \frac{C}{(s - s')^d}.$$

Démonstration :

1) Réduction au cas $d = 0$. Admettons provisoirement la proposition 2 dans le cas $d = 0$. Un calcul simple montre que chaque X_j est un opérateur singulier de type 1 dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$.

Il existe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques Q et R d'ordre -2 et -1 respectivement, tels que :

$$\left(\sum_{j=1}^r X_j^2 \right) Q = I + R.$$

Si P est d'ordre 1, les opérateurs $P_j = X_j Q P$ sont d'ordre 0, donc bornés dans la chaîne $(E_s)_{s>0}$; il en résulte qu'alors

$$P = \sum_{j=1}^r X_j P_j - RP$$

est singulier de type 1 dans $(E_s)_{s>0}$.

Si P est d'ordre $d > 1$, on peut encore terminer la démonstration en utilisant une paramétrix de l'opérateur elliptique $\sum_{j=1}^r X_j^{2d}$.

2) Démonstration de la proposition 2 pour $d = 0$. Soit donc P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ . Soit $u \in E_s$; on veut estimer $X^\alpha P u$ pour $\alpha \in \mathcal{J}$; pour α, β dans \mathcal{J} , on note $\beta \leq \alpha$ lorsque β est une sous-suite de α ; on a

$$X^\alpha P u = \sum_{\beta \leq \alpha} K_\beta^\alpha X^\beta u \quad \bullet$$

où K_β^α est un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 de la forme

$$K_\beta^\alpha = [X_{Y_1}, [X_{Y_2}, \dots [X_{Y_\ell}, P] \dots]] \text{ pour } \ell = |\alpha| - |\beta| > 0$$

et

$$K_\alpha^\alpha = P.$$

Un simple calcul de majorations montre que la proposition 2 pour $d = 0$ résulte alors du lemme suivant :

Lemme 2 : Soit P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 0 sur Γ ; il existe $M > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\gamma \in \mathcal{J}$,

$$\|K_\gamma\|_{\mathcal{L}(C^0(\Gamma), C^0(\Gamma))} \leq M^{|\gamma|+1} |\gamma|!$$

où $K_\gamma = [X_{Y_1}, [X_{Y_2}, \dots [X_{Y_{|\gamma|}}, P] \dots]]$.

* Dans cette somme, chaque terme est répété le nombre de fois que β peut être extrait de α .

Pour démontrer ce lemme on doit décrire plus précisément les opérateurs pseudo-différentiels analytiques sur Γ (cf. [3] [4] [7]) :

- a) Le noyau \tilde{p} de P est analytique sur $\Gamma \times \Gamma$ sauf sur la diagonale.
 b) Localement dans un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^n$, le noyau est de la forme

$$(3) \quad p(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,x-y) + r(x) \delta(x-y) + q(x,y)$$

où r, q sont analytiques, chaque $p_k(x,z)$ est pseudo-homogène en z de degré $-n+k$, $\int_{S_{n-1}} p_0(x,z) dz = 0$ (S_{n-1} désignant la sphère unité dans \mathbf{R}^n) et, pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que chaque p_k est analytique dans le domaine

$$\{(x,z) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n ; \text{dist}(x,K) < \varepsilon \text{ et } |\text{Im } z| < \varepsilon \text{ et } |\text{Re } z| \leq \varepsilon^2\}$$

et la série converge uniformément dans ce domaine.

Pour démontrer le lemme 2, il suffit de montrer que pour tout $x_0 \in \Gamma$, il existe un voisinage $\tilde{\Omega}_1$ de ce point et $M > 0$ tels que l'on ait, pour tout $v \in C^p(\Gamma)$ et tout $\gamma \in \mathbb{J}$,

$$(4) \quad \|K_\gamma v\|_{C^p(\tilde{\Omega}_1)} \leq M_1^{|\gamma|+1} |\gamma|! \|v\|.$$

Soient $\tilde{\Omega}_1 \subset \tilde{\Omega}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$ valant 1 sur un voisinage de $\tilde{\Omega}_1$; on note ω le support de $1 - \varphi$; on a avec $N = [\frac{n+1}{2}]$,

$$\begin{aligned} \|K_\gamma (1-\varphi)v\|_{C^p(\tilde{\Omega}_1)} &\leq \sum_{|\alpha| \leq N} \|X^\alpha K_\gamma (1-\varphi)v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)} \\ &\leq \|v\|_{L^2(\Gamma)} \sum_{|\alpha| \leq N} \left(\int_{\tilde{\Omega}_1 \times \omega} |X^\alpha \tilde{k}_\gamma(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

où \tilde{k}_γ est le noyau de K_γ et est donné par

$$\tilde{k}_\gamma(x,y) = (X_{\gamma_1} (x) + X_{\gamma_1}^* (y)) \dots (X_{\gamma_{|\gamma|}} (x) + X_{\gamma_{|\gamma|}}^* (y)) \tilde{p}(x,y)$$

avec $\int_\Gamma X_j u \cdot v d\mu = - \int u \cdot X_j^* v d\mu$, $d\mu$ étant une mesure de Lebesgue analytique sur Γ . Le lemme 1 (avec n remplacé par $2n$), les relations ci-dessus et l'analyticité de \tilde{p} sur $\tilde{\Omega}_1 \times \omega$ impliquent l'existence de $M_2 > 0$ tel que

$$\|K_\gamma (1 - \varphi)v\|_{C^0(\bar{\Omega}_1)} \leq \|v\| M_2^{|\gamma|+1} |\gamma|! \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{J}.$$

Pour démontrer (4) il suffit donc d'obtenir de bonnes estimations de $K_\gamma \varphi v$ et, par cartes locales, le problème peut s'étudier dans un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n où la description du noyau de P est donnée par (3) ; on peut supposer que \mathcal{U} contient la boule de centre 0 et de rayon 1 et prendre $K = \{0\}$; pour $\varepsilon > 0$ correspondant à ce K , on note $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| < \varepsilon/8\}$; il suffit alors de montrer le lemme :

Lemme 3 : Il existe $M_3 > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\gamma \in \mathcal{J}$ et pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\left\| \int k_\gamma(x, y) u(y) dy \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq M_3^{|\gamma|+1} |\gamma|! \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})},$$

où k_γ désigne dans la carte locale le noyau de l'opérateur K_γ .

La fonction k_γ est de la forme

$$(5) \quad k_\gamma(x, y) = (Y_{\gamma_1}(x) + Y_{\gamma_1}^*(y)) \dots (Y_{\gamma_{|\gamma|}}(x) + Y_{\gamma_{|\gamma|}}^*(y)) p(x, y)$$

où Y_j est le champ associé à X_j dans \mathcal{U} et Y_j^* est défini par

$$\int_{\mathcal{U}} Y_j u \cdot v dx = - \int_{\mathcal{U}} u \cdot Y_j^* v dx \quad \text{pour } u, v \text{ dans } C_0^\infty(\mathcal{U}).$$

La contribution de q et $r\delta$ (dans (3)) à k_γ donné par (5) fournit, grâce au lemme 1, une estimation conforme à celle annoncée dans le lemme 3 ; on peut donc supposer

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, x-y)$$

et alors

$$k_\gamma(x, y) = B_{\gamma_1} \dots B_{\gamma_{|\gamma|}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x, z) \right) \quad \text{où } z = x - y$$

et $B_j = B_j(x, z, D_x, D_z)$ est, pour $1 \leq j \leq r$, un opérateur du premier ordre

en D_x et $z_k D_{z_\ell}$ pour $1 \leq k, \ell \leq n$, à coefficients analytiques.

Une démonstration assez technique (pour laquelle on renvoie à [2]) conduit à l'existence d'une constante M_4 telle que l'on ait pour $\gamma \in \mathcal{J}$

$$\int_{|z| < \frac{\varepsilon}{4}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} B^{\gamma} p_k(x, z) \right\|_{C^p(\bar{\Omega})} dz \leq M_4^{|\gamma|+1} |\gamma|!$$

ce qui ramène la démonstration du lemme 3 à l'étude de la contribution de p_0 ; pour celle-là, on écrit :

$$B_i(x, z, D_x, D_z) = \mathcal{B}_i(x, D_x, z D_z) + \sum_{j=1}^n \mathcal{B}_{i,j}(x, z, D_x, D_z) z_j$$

où \mathcal{B}_i est un opérateur du 1er ordre en D_x et $z_k D_{z_\ell}$ pour $1 \leq k, \ell \leq n$ à coefficients analytiques en x et indépendants de z ; $\mathcal{B}_{i,j}$ est un opérateur du 1er ordre en D_x , $z_k D_{z_\ell}$ pour $1 \leq k, \ell \leq n$ à coefficients analytiques.

$$\text{On a alors : } B^{\gamma} p_0 = \mathcal{B}_{\gamma_1} \dots \mathcal{B}_{\gamma_{|\gamma|}} p_0 + \mathcal{R}_{\gamma} p_0 = \mathcal{B}^{\gamma} p_0 + \mathcal{R}_{\gamma} p_0$$

et on montre que la contribution de $\mathcal{R}_{\gamma} p_0$ se majore comme précédemment celle de $\sum_{k=1}^{\infty} B^{\gamma} p_k$. Pour $\mathcal{B}^{\gamma} p_0$, on obtient le résultat :

Lemme 4 : Pour tout $\gamma \in \mathcal{J}$, $\mathcal{B}^{\gamma} p_0(x, z)$ est une fonction analytique dans $\bar{\Omega} \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogène de degré $-n$ en z et vérifiant

$$\int_{S_{n-1}} \mathcal{B}^{\gamma} p_0(x, z) dz = 0 \quad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

De plus, il existe $M_5 > 0$ tel que l'on ait pour $\gamma \in \mathcal{J}$ et α, β dans \mathbb{N}^n

$$\sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ z \in S_{n-1}}} |D_x^{\alpha} D_z^{\beta} \mathcal{B}^{\gamma} p_0(x, z)| \leq M_5^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+1} (|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)!$$

Ce lemme permet, sachant estimer la norme d'un opérateur intégral singulier dans les espaces C^p , de contrôler comme on le souhaitait la contribution de p_0 dans le lemme 3.

Ce qui termine l'esquisse de démonstration de la proposition 2.

§ 3. PROBLEME DE CAUCHY

On montre succinctement comment, à l'aide des propositions 1 et 2, on démontre le théorème 1 dans le cas d'une équation scalaire et avec $k = 1$.

On veut trouver u solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Pf(t, x, u) \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

On peut d'abord se ramener au cas $u_0 = 0$. On montre ensuite qu'il existe $R > 0$ et $s_0 > 0$ tels que pour tous $0 < s' < s \leq s_0$, l'application

$$u \longmapsto Pf(t, \cdot, u)$$

est définie de $\{u \in E_s; \|u\|_s < R\}$ dans E_s , et vérifie les hypothèses du théorème 1.1 de Nirenberg [9] dans la chaîne (E_s) .

L'application de ce théorème donne alors le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic : Cauchy problems for analytic pseudo-differential operators ; Comm. in P.D.E. (1976).
- [2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic : Nonlinear global Cauchy problems (to appear).
- [3] L. Boutet de Monvel : Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques; Ann. Inst. Fourier 19 (1970) 169-268.
- [4] L. Boutet de Monvel and P. Kree : Pseudo-differential operators and Gevrey classes ; Ann. Inst. Fourier 17 (1967) 295-323.

- [5] Ebin et Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid ; Ann. of Math. 92 (1970) p.102-163.
 - [6] T. Kotake and N. S. Narasimhan : Fractional powers of a linear elliptic operator ; Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 449-471.
 - [7] W. Margulies : Analytic singular integral operators ; Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 391-393.
 - [8] C. B. Morrey : The analytic embedding of abstract real analytic manifolds ; Annals of Math. 68 (1958) 159-201.
 - [9] L. Nirenberg : An abstract form of the non linear Cauchy-Kovalewsky theorem. J. Differential Geometry 6 (1972) 561-576.
 - [10] L. V. Ovcyannikov : Non local Cauchy problem in fluid dynamics ; Actes Congrès Intern. Math. Nice 3 (1970) 137-142.
 - [11] L. V. Ovcyannikov : A non linear Cauchy problem in a scale of Banach spaces ; Dokl. Akad. Nauk. SSSR 200.4 (1971) : Soviet Math. Dokl. 12. 5 (1971) 1497-1502.
-