Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

M. Derridj

D. Tartakoff

Régularité analytique globale des solutions du problème de Neumann pour l'opérateur $\bar\partial$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 4, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

REGULARITE ANALYTIQUE GLOBALE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE NEUMANN POUR L'OPERATEUR $\bar{\partial}$

par M. DERRIDJ et D. TARTAKOFF

Exposé n° IV

25 Novembre 1975

§ 1. INTRODUCTION

Le problème de Neumann pour $\bar{\partial}$ permet d'obtenir dans un ouvert Ω convenable de $\mathbb{C}^n$ $n \geq 2$, la solution de $\bar{\partial}u = f$, qui est orthogonale aux fonctions holomorphes. Il est intéressant donc d'étudier la régularité de u, lorsque f a une certaine régularité. En particulier J. J. Kohn a étudié ce problème dans le cadre de $C^\infty(\bar{\Omega})$, d'abord dans un domaine strictement pseudo-convexe, ensuite dans certains domaines faiblement pseudo-convexes [4] [5].

Ensuite la régularité Gevrey a été étudiée par D. Tartakoff [6] pour les formes de degré (p,q), $q \geq 2$ et par M. Derridj pour toutes les formes (p,q) (donc $q \geq 1$) [1].

Le problème de la régularité analytique restait entièrement posé. Dans cet article, nous étudions la régularité analytique <u>globale</u> des solutions u du problème de Neumann

$$\begin{cases} (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})u = f \\ \text{condition de Neumann} \end{cases}$$

dans le compact $\bar{\Omega}$, lorsque Ω vérifie certaines hypothèses en particulier lorsque Ω est un ouvert strictement pseudo-convexe.

Remarquons que le problème de la régularité analytique locale est plus fort que celui de la régularité analytique globale.

Ici nous nous restreignons à des ouverts de $\mathbb{C}^n$. Mais on peut considérer des variétés analytiques réelles munies d'une structure presque complexe intégrable (voir [2]).

§ 2. NOTATIONS ET DEFINITIONS

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, défini par $\begin{cases} \Omega = \{r < 0\} \\ |dr| = 1 \text{ au voisinage} \\ \text{de } \partial\Omega , \end{cases}$

r analytique réelle.

Soit $(L_1,\dots,L_{n-1},L_n)$ un système libre de champs de vecteurs holomorphes i.e. $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_j}$, analytiques réels, tels que

$$\begin{cases} L_i(r) = 0 \quad \text{près de } \partial\Omega \quad i = 1,\dots,n-1. \\ L_n(r) = 1 \end{cases}$$

En fait L_n a une écriture globale par exemple $\{L_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial z_i}\}$. Quant aux L_i, $i = 1,\dots,n-1$, on peut les écrire localement, par exemple au voisinage d'un point z_0 t.q $\frac{\partial r}{\partial z_n}(z_0) \neq 0$, on prend

$$L_i = \frac{\partial r}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial r}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_n} \quad , \ i = 1,\dots,n-1.$$

Comme $L_1,\dots,L_{n-1}$, $\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_{n-1}$, $(L_n - \bar{L}_n)$, forment une base de champs tangents au complexifié de l'espace tangent à $\partial\Omega$ au voisinage d'un point de $\partial\Omega$, on peut écrire

$$[L_i,\bar{L}_j] = c_{ij}(L_n - \bar{L}_n) + \mathcal{L}(L_i,\bar{L}_i)_{i=1}^{n-1} \quad , \ i,j \leq n-1$$

(c_{ij}) est la matrice Levi. On dit que Ω est strictement pseudo-convexe si (c_{ij}) est définie positive en tout point de $\partial\Omega$.

Si $(\omega_1,\dots,\omega_n)$ est le système de (1,0) formes, dual de $(L_1,\dots,L_n)$ alors l'opérateur $\bar{\partial}$ peut s'écrire sur une fonction u

$$\bar{\partial}u = \sum_{i=1}^{n} \bar{L}_i u \, \bar{\omega}_i$$

L'opérateur $\bar\partial^*$ est l'adjoint de $\bar\partial$ au sens de $L^2(\Omega)$; on peut le définir pour une forme $(0,q)$ $q \geq 1$ par

$$\begin{cases} u \in \mathcal{D}(\bar\partial^*) \Leftrightarrow u = \Sigma u_I \bar\omega_I & \bar\omega_I = \bar\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar\omega_{i_q} \\ \qquad u_I = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ pour } n \in I & I = (i_1, \ldots, i_q) \\ (\bar\partial^* u, v) = (u, \bar\partial v), \ \forall\, v \text{ forme de degré } (0,q-1). \end{cases}$$

On considère le Laplacien complexe :

$$\Box u = [\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)]\, u$$

Si $f \in L^2$, est orthogonale aux formes harmoniques (i.e. $\Box v = 0$) alors il existe u telle que
$$u \in \mathcal{D}(\bar\partial^*)$$
$$\partial u \in \mathcal{D}(\bar\partial^*)$$
$$\Box u = f \qquad \text{voir } [3] .$$

Nous allons montrer ici que, si Ω est convenable (i.e. $\partial\Omega$ est analytique réelle et vérifie certaines hypothèses englobant le cas où il y a stricte pseudo-convexité), alors $f \in \mathcal{A}(\bar\Omega)$ entraîne $u \in \mathcal{A}(\bar\Omega)$. Ce théorème repose en fait sur un théorème "géométrique" dont nous donnerons la démonstration. Nous donnerons seulement l'idée de la démonstration du théorème final à partir du théorème "géométrique" en majorant les dérivées de u suivant la mauvaise direction. Quant aux dérivées dans les autres directions (à savoir $L_1, \ldots, L_{n-1}, \bar L_1, \ldots, \bar L_{n-1}, \bar L_n$) qui sont "les directions elliptiques", on peut les majorer localement, ce que le lecteur conçoit fort bien .

§ 3. LE THEOREME "GEOMETRIQUE"

Proposition 1 : Supposons que la forme de Lévi est non dégénérée, $\partial\Omega$ analytique réelle. Il existe une fonction unique, φ, analytique au voisinage de $\partial\Omega$, valant 1 sur $\partial\Omega$ telle que si

$$L'_n = \varphi L_n \quad , \quad L'_i = L_i \quad i = 1, n-1 .$$

alors la matrice (α'_{ij}) définie par

$$[L'_i, \overline{L}'_j] = \alpha'_{ij} L'_n + \dots$$

vérifie det $(\alpha'_{ij}) = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Démonstration : Notons $\alpha_{ij} = [L_i, \overline{L}_j]|_{L_n}$.

Calculons les α'_{ij}, avec $\varphi \neq 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \alpha'_{ij} = \varphi^{-1}\alpha_{ij} & i,j < n \\ \alpha'_{in} = \bar{\varphi}\,\varphi^{-1}\alpha_{in} & i < n \\ \alpha'_{ni} = \alpha_{ni} - \varphi^{-1}\overline{L}_i(\varphi) & i < n \\ \alpha'_{nn} = \bar{\varphi}\,\alpha_{nn} - \bar{\varphi}\,\varphi^{-1}\,\overline{L}_n(\varphi) \end{cases}$$

Alors $\det(\alpha'_{ij}) = 0$ si le déterminant

$$\left|\begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{in} \\ \varphi\alpha_{ni} - \overline{L}_i(\varphi) & \varphi\alpha_{nn} - \overline{L}_n(\varphi) \end{pmatrix}\right| = 0$$

Comme $\overline{L}_i$ est tangentiel pour $i = 1,\dots,n-1$, et que $\overline{L}_n$ ne l'est pas et remarquant que le coefficient de $\overline{L}_n(\varphi)$ est le déterminant de la forme de Levi, donc non nul, on déduit que $\partial\Omega$ est non-caractéristique pour l'équation différentielle obtenue en égalant le déterminant à 0. Le théorème de Cauchy

Kovalewski assure l'existence de φ, au voisinage d'un point de $\partial\Omega$, unique telle que $\varphi = 1$ sur $\partial\Omega$. Mais un calcul de déterminant montre que $\det|c'_{ij}| = 0$ ne dépend pas du choix de $(L_1,\ldots,L_{n-1})$; on déduit qu'on peut globaliser (puisque L_n est global) et trouver φ au voisinage de $\partial\Omega$.
A partir de maintenant on note $\rightarrow L_n$, le champ L'_n précédent et $T = L_n - \overline{L}_n$, qui est global.

<u>Proposition 2</u> : Il existe des coefficients $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$ uniques au voisinage de $\partial\Omega$, analytiques réels tels que si

$$T' = T + \sum_1^{n-1} \alpha_j L_j + \sum_1^{n-1} \beta_j \overline{L}_j$$

alors

$$\circledast_i : [T',L_i]|_{L_n} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n-1$$

$$\circledast'_i : [T',\overline{L}_i]|_{L_n} = 0 \qquad i = 1,\ldots,n-1.$$

au voisinage de $\partial\Omega$.

<u>Démonstration</u> :

$$[T',L_i]|_{L_n} = [T,L_i]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j,L_i]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j [\overline{L}_j,L_i]_{L_n}$$

$$[T',L_i]|_{L_n} = [T,\overline{L}_i]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j [L_j,L_i]|_{L_n} .$$

comme la matrice $[L_j,\overline{L}_i]|_{L_n}$ est non dégénérée, il existe bien des coefficients α_j analytiques réels au voisinage de $\partial\Omega$, uniques, tels que

$$[T',\overline{L}_i]|_{L_n} = 0 \text{ au voisinage de } \partial\Omega,$$

en revenant à la première égalité et utilisant le même argument, on obtient des coefficients β_j uniques.

Remarquons qu'on a utilisé que les égalités :

$$0 = [T',L_i]|_{L_n} \text{ et } [T',\overline{L}_i]|_{L_n} = 0$$

ne dépendent pas de l'écriture locale des L_i. $i = 1,\ldots,n-1$.

Remarquer que les α_i et β_i ont été déterminés uniquement <u>en chaque point</u>.

<u>Proposition 3</u> : Soit T' déterminé par la proposition 2. Alors

$$\circledast_n : [T',L_n]|_{L_n} = 0 \quad \text{au voisinage de } \partial\Omega \text{ si et seulement si}$$

$$\circledast'_n : [T',\bar{L}_n]|_{L_n} = 0 \quad \text{"}$$

<u>Démonstration</u> : En effet :

$$[T',L_n-\bar{L}_n]_{L_n} = [T',T']|_{L_n} - [T',\sum_1^{n-1}\alpha_i L_i + \sum_1^{n-1}\beta_i\bar{L}_i]|_{L_n}$$

$$= [T',\sum_1^{n-1}\alpha_i L_i + \sum_1^{n-1}\beta_j\bar{L}_i]|_{L_n}$$

ce qui est nul en utilisant la propriété de T'.

<u>Proposition 4</u> : Une condition nécessaire et suffisante pour que les égalités

$\circledast_i$ et $\circledast'_i$, $i = 1,\dots, n$ soit vraies est que

$$\det|\alpha_{ij}| = 0$$

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 3, il s'agit de vérifier $\circledast_1,\dots,\circledast_n$, $\circledast'_1,\dots,\circledast'_{n-1}$. Les conditions $\circledast_i^{(1)}$ $i = 1,\dots,n$ s'écrivent :

$$\circledast_i \quad [L_n,L_i]|_{L_n} - [\bar{L}_n,L_i]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j[L_j,L_i]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j[L_j,\bar{L}_i]|_{L_n} = 0$$

$$\circledast_n \quad [L_n,\bar{L}_n]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j[L_j,L_n]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j[\bar{L}_j,L_n]|_{L_n} = 0$$

$$\circledast'_i \quad [L_n,\bar{L}_i]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j[L_j,\bar{L}_i]|_{L_n} = 0$$

$$\circledast'_n \quad [L_n,\bar{L}_n]|_{L_n} + \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j[L_j,\bar{L}_n]|_{L_n} = 0$$

ces dernières équations s'écrivent

$$\begin{cases} \alpha_{nn} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{jn} = 0 \\ \alpha_{ni} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{ji} = 0 \end{cases}$$

Comme $\det(\alpha_{ji})_{j,i<n} \neq 0$, ce système est résoluble si et seulement si $\det(\alpha_{k,\ell}) = 0$. Les propositions précédentes montrent que α_j vérifiant $\circledast'_i$ est unique et qu'alors $\circledast_i$, $i = 1,\dots,n$ sont vérifiées.

<u>Théorème</u> : Supposons que $\partial\Omega$ est analytique réelle et que la forme de de Levi est non dégénérée. Il existe T' unique, analytique réel de la forme $T' = T + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i L_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \bar{L}_i$ tel que

$$[T',L_i]_{L_n} = 0 \quad i = 1,\dots,n$$

$$[T',\bar{L}_i]|_{L_n} = 0 \quad i = 1,\dots,n \text{ au voisinage de } \partial\Omega .$$

De plus $\bar{T}' = -T$ sur $\partial\Omega$ et $[T',L_i]|_{\bar{L}_n} = [T',\bar{L}_i]|_{\bar{L}_n} = 0$ sur $\partial\Omega$ pour $i = 1,\dots,n$

<u>Démonstration</u> : La première partie est la résultante des 4 propositions précédentes. Montrons la 2ème partie.

Comme T' est tangentiel sur $\partial\Omega$, il en est de même de $[T',L_i]$ et $[T',\bar{L}_i]$ pour $i = 1,\dots,n-1$. Donc sur $\partial\Omega$, on a bien $\bar{T}' = -T$, car sur $\partial\Omega$ si on prend

$$T'' = T + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j L_j - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_j \bar{L}_j$$

ce T'' conviendrait, et d'après l'unicité, on a $T'' = T'$ sur $\partial\Omega$, donc on a bien $\bar{T}' = -T$ sur $\partial\Omega$. Par suite $T' = T'_o + \gamma T_1$ où $\bar{T}'_o = -T'_o$ et $T_1 \in \{\bar{L}_1,\dots,\bar{L}_{n-1}\}$ $\gamma = 0$ sur $\partial\Omega$.

Ainsi

$$[T',L_i]|_{\bar{L}_n} = [T'_o,L_i]|_{\bar{L}_n} + [\gamma T_1,L_i]|_{\bar{L}_n} = [\bar{T}'_o,\bar{L}_i]|_{L_n} + [\gamma T_1,L_i]|_{\bar{L}_n}$$

sur $\partial\Omega$ $[\gamma T_1, L_i]|_{\bar{L}_n} = 0$ et $[\bar{T}'_o, \bar{L}_i]|_{L_n} = -[T'_o, \bar{L}_i]|_{L_n} = 0$. D'où le résultat.

Régularité analytique globale : Nous nous contenterons des formes de degré (0,1). Nous ferons les hypothèses suivantes

1) $\sum_1^n \|\bar{L}_i u\| + \sum_1^{n-1} \|L_i u\| + K\|u\| \leq C(\|\bar{\partial} u\| + \|\bar{\partial}^* u\|) + C_K\|u\|_{-1}$, $u \in (\bar{\partial}^*)$ à support petit.

où K est une constante assez grande.

2) la forme de Lévi est non dégénérée.

3) $\partial\Omega$ est analytique réelle.

Remarque : Les conditions 1) et 2) sont vérifiées si Ω est strictement pseudo-convexe.

Théorème : Sous les hypothèses 1), 2), 3) si

$$\left\{\begin{array}{l} \square u = f \\ u \in \mathcal{D}(\square) \Rightarrow u \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) \\ f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) . \end{array}\right.$$

Corollaire : Soit $f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega})$, $\bar{\partial} f = 0$ et $f \in \mathcal{N}(\bar{\partial}^*)$,alors la solution de $\bar{\partial} u = f$ orthogonale aux fonctions holomorphes est analytique réelle dans $\bar{\Omega}$. Nous ne donnerons que l'idée de la démonstration, surtout en quoi le théorème "géométrique" intervient.

Il suffit en fait de montrer que la restriction de u à $\partial\Omega$ est analytique réelle sur $\partial\Omega$, puisque $\square$ est un opérateur elliptique. Pour cela, il suffira de montrer que si on désigne par $(Op)_q$ un opérateur de la forme

$$L_{i_1}^{q_1} \ldots L_{i_j}^{q_j} T^{q_{j+1}} \ldots L_{i_{j+2}}^{q_{j+2}} \ldots L_{i_\ell}^{q_\ell} \qquad q_1 + \ldots + q_\ell = q .$$

$$\|(Op)_q u\| \leq C^{q+1} q\,!$$

$$\|\bar{L}_n (Op)_q u\| \leq C^{q+1} q!$$

ce qui entraîne bien $\|(Op)_q u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C^{q+1} q!$ puisque $L_n = + \bar{L}_n + T$.

<u>1ère étape</u> : On majore ainsi

$$\sum_1^n \|\bar{L}_i T^k u\| + \sum_1^{n-1} \|L_i T^k u\| + K\|T^k u\| \leq C^{k+1} k\ !$$

Cela se fait par récurrence. On introduit une partition de l'unité $\Sigma\alpha_j = 1$ sur $\bar{\Omega}$ telle que supp $\alpha_j \subset \omega_j$ où ω_j est un voisinage ~~du bord~~ d'un point sur lequel on a l'estimation (1). Alors, il s'agit d'estimer

$$\sum_{j=1}^N \Big(\sum_1^n \|\bar{L}_i \alpha_j T^k u\|^2 + \sum_1^{n-1} \|L_i \alpha_j T^k u\|^2 + K\|\alpha_j T^{k+1} u\|^2\Big) \qquad \text{par}$$

$$\sum_{j=1}^N \big(C\|\bar{\partial}\, \alpha_j\, T^k u\|^2 + \|\bar{\partial}^* \alpha_j T^k u\,\|^2 + \|\alpha_j T^k u\|^2_{-1}\big).$$

$\|\alpha_j T^k u\|_{-1}$ est facilement majoré . Regardons par exemple :

$$(\bar{\partial}\, \alpha_j T^k u,\ \bar{\partial}\alpha_j T^k u) = (\bar{\partial} u, \bar{\partial}\, \bar{T}^k \alpha_j^2 T^k u) +$$

$$([\bar{\partial}, \alpha_j T^k] u, \partial\alpha_j T^k u) + (\bar{\partial} u, [\bar{T}^k \alpha_j, \bar{\partial}]\alpha_j T^k u).$$

mais $|(\bar{\partial} u, \bar{\partial}\bar{T}^k \alpha_j^2\, T^k u)| = |(f, \bar{T}^k \alpha_j^2\, T^k_u)| = |(\alpha_j T^k f, \alpha_j T^k u)| \leq C_\varepsilon \|T^k f\|^2 + \|T^k u\|^2$.

D'autre part :

$$([\bar{\partial}, \alpha_j] T^k u, \bar{\partial}\alpha_j T^k u) = (\alpha_j'\, T^k u,\ \bar{\partial}\alpha_j T^k u) + (\alpha_j [\bar{\partial}, T^k] u, \bar{\partial}\alpha_j T^k u)$$

où α_j' désigne une dérivée d'ordre 1 de α_j. Majorons par exemple le premier terme. Mais le fait que T est global intervient ici de façon essentielle pour écrire

$$|(\alpha_j' T^k u, \bar{\partial}\alpha_j T^k u)| \leq C \sum_{j=1}^N [C_\varepsilon \|\alpha_j T^k u\|^2 + \varepsilon\|\bar{\partial}\alpha_j T^k u\|^2]$$

si ε est convenable, $C\, \varepsilon\, \|\bar{\partial}\alpha_j T^k u\|^2$ est absorbé en passant à gauche, par $\|\bar{\partial}\alpha_j T^k u\|^2$. D'autre part si K est assez grand (voir hypothèse 1))

$CC_\varepsilon \|\alpha_j T^k u\|^2$ est absorbé à gauche par $K\|\alpha_j T^k u\|^2$.

Passons au second terme : là il faut remarquer que

1) $[\bar\partial, T^k]$ est "grosso modo" équivalent à k fois un terme de la force de $[\bar\partial, T]T^{k-1}$. Donc il faut estimer $(\alpha_j k[\bar\partial,T]T^{k-1}u, \bar\partial\alpha_j T^k u)$ ou bien d'après le théorème géométrique $(\alpha_j k L\, T^{k-1}u, \bar\partial\alpha_j T^k u)$ où $L\in\{L_1,\dots,L_{n-1},\bar L_1,\dots,\bar L_{n-1},\bar L_n\}$ ce qu'on peut estimer par $C_\varepsilon^2 k^2\|\alpha_j L\, T^{k-1}u\|^2 + \varepsilon\|\bar\partial\,\alpha_j T^k u\|^2$; le 2ème de ces deux termes sera absorbé par $\|\bar\partial\alpha_j T^k u\|^2$ et le premier est majoré en utilisant la récurrence à l'étape k - 1.

Les autres termes se majorent un peu de la même manière, quoiqu'il intervienne en plus quelques intégrations par parties. C'est là qu'on utilise la 2ème partie du théorème, à savoir que $[\bar\partial,T]$ et $[\bar\partial^*,T]$ sont tangentiels à $\partial\Omega$.

<u>2ème étape</u> : On montre qu'il existe une constante C telle que

$$\|(Op)_q u\| \le C^{q+1} q!$$

$$\|\bar L_n (Op)_q u\| \le C^{q+1} q!$$

Pour donner une idée de la démonstration, regardons par exemple un terme de la forme

$$\|\varphi L_i^p T^q u\|^2 \qquad \text{où} \qquad L_i \in \{L_1,\dots,L_{n-1}\}$$

on majore par $(\bar\partial\varphi L_i^{p-1} T^q u, \bar\partial\varphi L_i^p T^q u)$ et en faisant des crochets. Comme dans la 1ère étape, on est amené à majorer par exemple

$$(\varphi' L_i^{p-1} T^q u, \bar\partial\varphi L_i^p T^q u) \quad \text{et} \quad (\varphi[\bar\partial, L_i^{p-1}] T^q u, \bar\partial\,, L_i^p T^q u)$$

Maintenant pour ε convenable

$$C_\varepsilon\|\varphi' L_i^{p-q} T^q u\|^2 + \varepsilon\|\bar\partial\,\varphi L_i^p T^q u\|^2$$

se majore en faisant absorber $\varepsilon\|\bar\partial\varphi L_i^p T^q u\|^2$ et en estimant $C_\varepsilon\|\varphi' L_i^{p-1} T^q u\|^2$

en utilisant la récurrence et si φ est convenablement choisi. Remarquer qu'ici on peut estimer les choses localement car L_i est une "direction elliptique".

Maintenant il suffit du [7]

<u>Lemme</u> : Si $\|Op(q)u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C^{q+1} q!$ alors $\sup_{\partial\Omega} |D^\alpha u| \leq B^{\alpha+1}\alpha!$

On utilise pour cela que les opérateurs $L_1,\dots,L_{n-1},\overline{L}_1,\dots,\overline{L}_{n-1}$ et T qui sont tangentiels à $\partial\Omega$ forment une base de champs de vecteurs tangents ; d'où on obtient

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq A^{|\alpha|+1}\alpha\ !$$

Ensuite on utilise le théorème de Sobolev pour avoir le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Derridj : Gevrey regularity up to the boundary for the $\bar{\partial}$-Neumann problem;1975 AMS Summer institute in several complex variables held in Williamstown Massachussets.

[2] M. Derridj and D. S. Tartakoff : On the real analyticity of the solutions of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. A paraître.

[3] G. B. Folland and J. J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex (Princeton University Press).

[4] J. J. Kohn : Harmonic Integrals on strongly pseudo-convex manifolds I and II . Annals of Math. 78 (1963) and 79 (1964).

[5] J. J. Kohn : Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds of dimension two. J. of Diff. Geometry 6 (1972).

[6] D. S. Tartakoff : Gevrey hypoellipticity for subelliptic boundary value problems : C. P. A. M. 26 (1973).

[7] D. S. Tartakoff : Global real analyticity for $\Box_b$. A paraître.
