J. J. Duistermaat

La formule de Kolk et Varadarajan

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. nº 16, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

LA FORMULE DE KOLK ET VARADARAJAN

par J. J. DUISTERMAAT

8 Mars 1977

Exposé n° XVI

Soit X une variété localement symétrique de courbure négative, compacte et connexe. Alors $X = M/\Gamma$ où M est un espace symétrique et Γ est un sous-groupe discret, co-compact, et sans torsion d'un groupe de Lie G d'isométries de M, opérant transitivement . G est semi-simple, connexe, réel et peut être choisi avec centre fini. Le stabilisateur K dans G d'un point de M est un sous-groupe maximalement compact de G et on peut écrire $M = K\backslash G$, $X = K\backslash G/\Gamma$.

Tout opérateur linéaire continu : $\mathcal{D}'(M) \to C^{\infty}(M)$ qui commute avec l'action de G sur M est de la forme $Op_M^{\varphi} : \longmapsto \varphi * f$, où $\varphi \in C_c^{\infty}(K\backslash G)$ et

$$(\varphi * f)(x) = \int_G \varphi(xy^{-1})\, f(y)dy \ .$$

Ici une fonction sur M est considérée comme une fonction sur G qui est constante sur les classes Kx , $x \in G$. On a $\varphi * f = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}'(K\backslash G)$ si et seulement si $\overline{\varphi}(x) = \int_K \varphi(xk)dk = 0$ pour tout $x \in G$, donc $\varphi \longmapsto Op_M^{\varphi}$ est un isomorphisme de l'algèbre $C_c^{\infty}(K\backslash G/K)$ des fonctions $\varphi \in C_c^{\infty}(G)$ telles que $\varphi(k_1\, x\, k_2) = \varphi(x)$ pour tout $k_1, k_2 \in K$, sur l'algèbre d'opérateurs régularisants et invariants sur M. Les éléments de $C_c^{\infty}(K\backslash G/K)$ sont appelés les fonctions sphériques (C^{∞} et à support compact) sur G; la structure multiplicative dans $C_c^{\infty}(K\backslash G/K)$ est la convolution. Par continuité l'application $\varphi \longmapsto Op_M^{\varphi}$ s'étend en un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{E}'(K\backslash G/K)$, $*$ (distributions sphériques sur G à support compact) sur l'algèbre des opérateurs invariants : $C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$.

Lorsque $f \in \mathcal{D}'(M)$ est Γ-invariant, alors $Op_M^{\varphi}(f)$ est Γ-invariant. Cela signifie que Op_M^{φ} induit un opérateur continu linéaire Op_X^{φ} sur X. Le noyau de Schwartz K_X^{φ} de Op_X^{φ} s'obtient par la formule

$$K_X^{\varphi}(x,y) = [\, Op_X^{\varphi}(\delta_y)](x) = [\, Op_M^{\varphi}(\pi^* \delta_y)](x)$$

où π est la projection : $M \to X$. Mais $\pi^* \delta_y = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{y_o \gamma}$ où $y_o \in M$ est tel que $\pi\, y_o = y$, alors

$$(1) \qquad K_X^{\varphi}(x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} K_M^{\varphi}(x_o, y_o\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\underline{x}\, \gamma^{-1} \underline{y}^{-1})$$

lorsqu'on écrit $x = K\underline{x}\Gamma$, $y = K\underline{y}\Gamma$.
En effet, φ étant donné, la somme sur Γ est finie parce que $\underline{x}\gamma^{-1}\underline{y}^{-1}$ quitte le support compact de φ pour la plupart des $\gamma \in \Gamma$. Un opérateur avec noyau de Schwartz C^∞ sur une variété compacte est un opérateur à trace, et la trace est égale à l'intégrale du noyau sur la diagonale. Alors

$$(2) \qquad \mathrm{Tr}\ \mathrm{Op}_X^\varphi = \int_X \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(\underline{x}\gamma^{-1}\underline{x}^{-1})dx = \sum \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma) \cdot \int_{G/G_\gamma} \varphi(x\gamma x^{-1})dx ,$$

avec un terme dans la somme pour chaque classe de conjugaison dans Γ.
Ici G_γ, resp Γ_γ est le centralisateur de γ dans G, resp. Γ.

D'un autre côté on sait que l'algèbre $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ est commutativeet contient les adjoints, alors les Op_X^φ sont simultanément diagonalisables dans le sens qu'il existe une base orthonormale $(e_j)_{j=1,2,\ldots}$ de $L^2(X)$ tel que

$$(*) \qquad \mathrm{Op}_X^\varphi(e_j) = \lambda_j(\varphi)\, e_j \qquad \text{pour tout } j.$$

Ici $\varphi \longmapsto \lambda_j(\varphi)$ est une forme continue linéaire sur $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ avec la propriété additionelle que

$$\lambda_j(\varphi * \psi) = \lambda_j(\varphi) \cdot \lambda_j(\psi) \quad \text{pour } \varphi,\psi \in C_c^\infty(K\backslash G/K),$$

parce que la valeur propre de la composition de deux opérateurs est égale au produit des valeurs propres. (Autrement dit λ_j est un caractère de l'algèbre $C_c^\infty(K\backslash G/K),*$). Parce que la trace est égale à la somme des valeurs propres, on a obtenu maintenant la célèbre <u>formule de traces de Selberg</u>:

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(\varphi) = \sum_{\substack{\text{classes de}\\ \text{conjugaison de } \Gamma}} \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma) \cdot \int_{G/G_\gamma} \varphi(x\gamma x^{-1})dx , \qquad \varphi \in C_c^\infty(K\backslash G/K) ,$$

où les λ_j forment une série de caractères de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ associé au quotient $X = K\backslash G/\Gamma$. Remarquons que les λ_j s'étendent par continuité à des formes continues linéaires sur $\mathcal{E}'(K\backslash G/K)$ (la topologie faible sur les espaces propres, de dimension finie, est égale à la topologie forte). De plus, les e_j sont C^∞ et on a aussi $(*)$ pour $\varphi \in \mathcal{E}'(K\backslash G/K)$. Par ailleurs

Op_X^φ n'est pas nécessairement à trace si $\varphi \in \mathcal{E}'(K\backslash G/K)$, ce qui est évident par exemple pour le cas de $Op_X^\varphi = \mathrm{Id}$. Aussi nous ne poserons pas ici la question de savoir pour quelles fonctions $\varphi \in C^\infty(K\backslash G/K)$ la somme à droite dans la formule de Selberg converge absolument, car le cas trivial avec $\varphi \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ donne déjà toutes les informations que l'on veut.

L'idée de la formule de Kolk et Varadarajan est de pousser toute la formule de Selberg à un espace vectoriel. Cet espace est le sous-groupe abélien A de G qui figure dans la décomposition d'Iwasawa

$$G = KAN$$

du groupe G, construite comme suit. La semi-simplicité de G veut dire que la forme de Killing B sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est non-dégénérée. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ maximal sur lequel B est définie négative, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ est complémentaire à $\mathfrak{k}$ et B est définie positive sur $\mathfrak{p}$. Dans $\mathfrak{p}$ on prend un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$. Les opérateurs ad a : $u \mapsto [a,u] : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ se diagonalisent simultanément pour $a \in \mathfrak{a}$ avec valeurs propres réelles, alors

$$\mathfrak{g} = \Sigma^{\oplus}\, \mathfrak{g}_\alpha \quad , \quad \mathrm{ad}\, a|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(a).\mathrm{Id}|_{\mathfrak{g}_\alpha} \quad , \ \dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0,$$

où les α, appelées les racines sont éléments de l'espace dual réel $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$. Pour un choix arbitraire d'un demi-espace P de $\mathfrak{a}^*$, sans racines $\neq 0$ sur le bord, on obtient que

$$\mathfrak{n} = \sum_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \neq 0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

est un sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{g}$, en vertu de la propriété $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ et la finitude de l'ensemble des racines. On a

$$\mathfrak{g} = K \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

et plus précisément : l'application

$$(k,a,n) \longmapsto k.\exp a.\exp n$$

est un difféomorphisme de $K \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{n}$ sur G.

On écrit $A = \exp \mathfrak{a}$, resp. $N = \exp \mathfrak{N}$ pour le groupe de Lie abélien, resp. unipotent correspondant à $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{N}$, et par la suite j'identifie $\mathfrak{a}$ avec A par exp.

L'ensemble W des $k \in K$ tel que $k A k^{-1} = A$ est un sous-groupe discret de K, donc fini en vertu de la compacité de K. W est appelé le groupe de Weyl de M et opère sur A par conjugaison. Tous les différents choix des racines positives sont transformés entre eux par l'action duale de W sur A^*. Maintenant on peut introduire la transformation d'Abel (application horosphérique de Gelfand).

(4)
$$(\mathcal{A}\varphi)(a) = e^{\rho(a)} \int_N \varphi(an)dn,$$

où $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \text{ racine positive}} \dim \mathfrak{g}_\alpha \cdot \alpha$

est la demie-somme des racines positives. Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}$ est un homorphisme de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ dans $C_c^\infty(A)$, $*$ (homorphisme pour la convolution) mais le résultat plus fort que nous utiliserons est que $\mathcal{A}$ est en fait un isomorphisme de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ sur l'algèbre $C_c^\infty(A)^W$, $*$ des fonctions test qui sont invariantes pour l'action du groupe de Weyl.
Ce théorème est dû à Gangolli [2]; une première version avec les espaces C_c^∞ remplacés par des espaces de Schwartz était donnée par Harish-Chandra [5].

Alors à un caractère λ de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ correspond un caractère $\tilde{\lambda}$ de $C_c^\infty(A)W$, $*$ qui s'étend par continuitéen un caractère de $\mathcal{E}'(A)^W$. Restreignant aux $a \in \mathcal{E}'(A)^W$ avec supp $u \subset \{e\}$ et utilisant le fait que tout caractère de l'algèbre des polynômes W-invariants peut s'étendre à un caractère de l'algèbre de tous les polynômes, on obtient que $\tilde{\lambda}$ doit être de la forme

(5)
$$\lambda(\varphi) = \tilde{\lambda}(\mathcal{A}\varphi) = \int_A \mathcal{A}\varphi(a)\, e^{i\mu(a)} da,$$

avec $\mu \in A_{\mathbb{C}}^*$, le dual complexe de A. Les $\mu_j \in A_{\mathbb{C}}^*$, (déterminés modulo l'action de W sur $A_{\mathbb{C}}^*$), associés de cette manière aux caractères λ_j, de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ sont maintenant appelés spectre S de l'espace $X = K\backslash G/\Gamma$.

Par ailleurs, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $C_c^\infty(A)^W \ni \psi \longmapsto \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma) \cdot \int_{G/G_\gamma} (\mathcal{A}^{-1}\psi)(x \gamma x^{-1})dx$ définit une distribution

T_γ dans A, invariante par l'action de W et la formule de Kolk et Varadarajan peut maintenant s'écrire comme

$$(6) \qquad \sum_{\mu_j \in S} \hat{\psi}(\mu_j) = \sum_{\substack{\text{classes de con-}\\ \text{jugaison de } \Gamma}} T_\gamma(\psi) \ , \ \psi \in C_c^\infty(A)^W$$

où $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier-Laplace de ψ, c'est donc une fonction de Paley-Wiener sur $A_{\mathbb{C}}^*$.

Bien sûr, le vrai travail de Kolk et Varadarajan est la détermination de S et des distributions T_γ.
En principe on obtient une formule explicite pour tous les T_γ et on peut regarder (6) comme une formule explicite pour la transformation de Fourier du spectre, donc comme l'analogue de la formule de Poisson pour les tores.

<u>Propriétés de S</u>. Regardant les $e_j \in C^\infty(X)$ comme fonctions sur la variété compacte G/Γ on peut définir

$$f_j(x) = \int_{G/\Gamma} e_j(x\,y)\, \overline{e_j(y)}\, dy \ , \ x \in G.$$

Il est évident que $f_j \in C^\infty(K\backslash G/K)$, $|f_j(x)| \leq 1$, $f_j(e) = 1$ et que f_j satisfait aux mêmes équations différentielles (pour des opérateurs invariants sur $K\backslash G$) que la fonction ${}^t\mathcal{A}(e^{i\mu_j})$, où $e^{i\mu_j}$ désigne la fonction $a \longmapsto e^{i\mu_j(a)}$ sur A. On obtient que $f_j = {}^t\mathcal{A}(e^{i\mu_j})$, par conséquence ${}^t\mathcal{A}(e^{i\mu_j})$ est bornée. Grâce au théorème de Helgason-Johnson [7] ceci implique que la partie imaginaire Im μ_j de μ_j est contenue dans l'enveloppe convexe des points $w^*\rho$, où w parcourt le groupe de Weyl W, dans A. En particulier l'ensemble des Im μ_j est borné. On pourrait craindre que les μ_j soient nécessai réels mais ce n'est pas vrai parceque la fonction constante sur X est une fonction propre avec valeur propre associée au point $\mu = i\rho$ de $A_{\mathbb{C}}^*$; c'est alors un point extrêmalde l'ensemble donné par le théorème de Helgason-Johnson. Les $\mu \in S$ avec Im $\mu \neq 0$ forment un ensemble appelé <u>spectre complémentaire.</u>

Une autre propriété évidente du spectre est que les valeurs propres de l'adjoint sont égales aux conjuguées complexes des valeurs propres

$$\lambda_j((Op_X^\varphi)^*) = \overline{\lambda_j(Op_X^\varphi)}$$

Avec la notation

$$\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^{-1})} \ ,$$

on a

$$(Op_X^{\varphi})^* = Op_X^{\varphi^*} \quad ,$$

et grâce au facteur $e^{\rho(a)}$ dans la définition de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\varphi^*) = (\mathcal{A}\varphi)^* \ .$$

En lisant la définition de (5) de μ_j on obtient que

$$\overline{\int_A \mathcal{A}\varphi(a) e^{i\mu_j(a)} da} = \int_A \overline{\mathcal{A}\varphi(-a)}\, e^{i\mu_j(a)} da$$

pour toute $\varphi \in C_c^{\infty}(A)^W$, et donc que nécessairement

$$\overline{\mu}_j = w^*\mu_j \quad \text{pour un} \quad w \in W$$

Pour chaque $w \in W$, l'espace

(7) $$V_w = \{\mu \in A_{\mathbb{C}}^* \ ; \ \overline{\mu} = w^*\mu\}$$

est un sous-espace vectoriel réel de $A_{\mathbb{C}}^*$ de dimension réelle égale à $\dim_{\mathbb{R}} A = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} A_{\mathbb{C}}^*$. (Le nombre $r = \dim_{\mathbb{R}} A$ est appelé le rang de l'espace symétrique M). Le spectre S est alors contenu dans l'union de ces espaces V_w, où w parcourt le groupe fini W. Pour w = id, $V_w = A^* =$ l'espace dual réel de A. Le spectre complémentaire est alors continu dans l'union des espaces V_w, $w \in W$, $w \neq$ id, et est borné dans la direction imaginaire comme décrit dans le théorème de Helgason-Johnson . (Voir aussi Kostant [9]).

<u>Propriétés des</u> T_γ : Comme les T_γ sont définis par intégration invariante sur les classes de conjugaison de γ, ils ne dépendent que de ces classes de conjugaison .

Les objets naturels transversaux aux classes de conjugaison sont les

sous-groupes de Cartan H de G, définis comme il suit.
Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ telle que ad h soit semi-simple pour tous $h \in \mathfrak{h}$, et maximal avec ces propriétés. Le sous-groupe de Cartan associé à $\mathfrak{h}$ est le centralisateur H de $\mathfrak{h}$ dans G. C'est un sous-groupe de Lie de G avec algèbre de Lie égale à $\mathfrak{h}$. Tout élément de H est semi-simple, et inversement tout élément semi-simple de G est contenu dans un sous-groupe de Cartan.

A conjugaison près il existe un nombre fini de sous-groupes de Cartan H de sorte que $H = H_I \cdot H_R$, où $H_I \subset K$ et H_R est un sous-espace vectoriel de A. Chaque classe de conjugaison d'un élément régulier de G (pour lequel les classes de conjugaison ont une dimension maximale) ne rencontre qu'un de ces sous-groupes de Cartan et transversalement,(peut-être plusieurs fois). Les classes de conjugaison des autres éléments semi-simples (les élements semi-simples irréguliers) rencontrent plusieurs de ces sous-groupes de Cartan dans leur intersection commune, l'exemple extrémal étant l'élément neutre e qui est dans tous les sous-groupes de Cartan.

Soit maintenant $\gamma \in \Gamma$ un élément régulier, H le sous-groupe de Cartan qui coupe la classe de conjugaison de γ dans l'élément $\tilde{\gamma} = \gamma_I \gamma_R$, $\gamma_I \in H_I$, $\gamma_R \in H_R$. Alors la distribution T_γ dans A est égal à l'intégration sur la variété linéaire $\gamma_R + (H_R)^\perp$ par rapport à une densité lisse qui est une fonction rationnelle en fonctions exponentielles. Ici $(H_R)^\perp$ est le complément orthogonal de H_R dans A par rapport à la forme de Killing, qui définit un produit scalaire sur A.

Pour un élément $\gamma \in \Gamma$ irrégulier (tous les élements de Γ sont semi-simples) on doit approximer γ avec des élements réguliers h pour lesquels les dimensions de H_I sont maximales et alors on a la formule

$$T_\gamma = \lim \tilde{\omega}_\gamma T_h ,$$

où $\tilde{\omega}_\gamma$ est un opérateur différentiel à coefficients constants dans A connu. Donc le support de T_γ est toujours contenu dans $\gamma_R + (H_R)^\perp$(où H est le groupe de Cartan avec dim H_I maximale, coupant la classe de conjugaison de γ, mais la différentiation $\tilde{\omega}_\gamma$ et aussi le passage à la limite augmente la singularité de la distribution T_γ . Le cas irrégulier extrème est $\gamma = e$, où $T_e = \mathrm{vol}(X).\hat{\beta}$, où β est une fonction analytique à croissance polynomiale (d'ordre n-r, n = dim X, r = rang) sur A^*, appelée la mesure de Plancherel pour l'espace symétrique M. β est donnée explicitement par la formule de Gindikin et Karpelevitch [4] comme un produit de fonctions d'une seule variable.

Pour la démonstration des propriétés des distributions T_γ, on utilise une grande partie de l'analyse de Harish-Chandra sur les groupes de Lie semi-simples, en particulier les propriétés détaillées de ces transformations "F_f", voir Harish-Chandra [6], Varadarajan [11].

<u>Applications</u> : La condition que $X = M/\Gamma$ est une variété lisse entraîne que Γ n'a pas d'éléments γ elliptiques, c'est-à-dire avec $\gamma_R = 0$, autres que $\gamma = e$. Parce que le comportement asymptotique de S est déterminé premièrement par la singularité de la transformation de Fourier à l'origine, on déduit de la formule

$$\Sigma \hat{\psi}(\mu_j) = \mathrm{vol}(X) \langle \beta, \hat{\psi} \rangle + \sum_{\substack{\text{classes de con-}\\ \text{jugaison de } \Gamma \neq \{e\}}} T_\gamma(\psi)$$

que S se comporte asymptotiquement comme β. Plus précisément, lorsque U est un ensemble borné ouvert dans A^* avec bord qui n'est pas trop pathologique, on a

$$\#\{j;\mu_j \in tU\} = \mathrm{vol}(X).\int_{tU} \beta(\lambda)d\lambda + O(t^{n-1}) \ , \quad t \to \infty \ ,$$

le terme $\int_{tU} \beta(\lambda)d\lambda$ étant d'ordre t^n. Ceci est une estimation pour la partie réelle de S ; pour le spectre complémentaire on a

$$\#\{j; \mathrm{Im}\,\mu_j \neq 0, \ |\mu_j| \leq t\} = O(t^{n-2+\varepsilon}),$$

Ce terme est d'un ordre inférieur au terme du reste dans l'estimation pour le spectre réel. On peut conjecturer que le spectre complémentaire est <u>fini</u> lorsque β est un polynôme ; c'est le cas où il existe une seule classe de conjugaison des groupes de Cartan.

Le spectre complémentaire est aussi fini dans le cas où le rang $r = 1$ pour une raison plus triviale ; dans ce cas $V_w = A^*$ ou iA^*, et un ensemble discret borné dans iA^* doit être fini. Ces estimations asymptotiques pour S sont des améliorations d'une conjecture de Gel'fand [3].

Par ailleurs, on peut employer la formule (6) pour obtenir des estimations asymptotiques pour Γ en remarquant que dans la formule

$$\Sigma\, e^{i\mu_j(\alpha)} = \Sigma\, T_\gamma(a)$$

le terme dominant à gauche est égal à $e^{\rho(a)}$. Par exemple, lorsque rang $r = 1$, on obtient facilement de cette manière un comportement asymptotique précis pour les longueurs des géodésiques périodiques sur X. (En général la distance euclidienne de γ_R à l'origine est égal à la longueur de la géodésique périodique qui sur M va d'un point $m \in M$ au point $m\gamma$). Voir Huber [8].

Finalement les opérateurs différentiels invariants sur M, poussés sur X, sont de la forme Op_X^{φ} , où $\varphi \in \mathcal{E}'(K\backslash G/K)$ à support contenu dans K ; supp $\hat{\mathcal{F}}\varphi \subset \{0\}$ et $\hat{\mathcal{F}}\varphi$ est donc un polynôme p. En effet on obtient une bijection entre ces opérateurs différentiels sur X et tous les polynômes sur A^* invariants par la groupe de Weyl. Par exemple l'opérateur de Laplace Δ sur X correspond au polynôme $p(\xi) = -|\xi|^2 - |\rho|^2$. On peut obtenir l'asymptotique pour le spectre de P par intégration de S sur les hypersurfaces $p = \text{const}$. Par exemple pour $P = \Delta$ on peut obtenir une forme exacte de la formule de Duistermaat-Guillemin [1]. Aussi ceci explique pourquoi dans le cas de rang $r = 1$ l'opérateur $\Delta + |\rho|^2$ est plus facile à analyser que l'opérateur Δ, observation faite dans le cas de $G = SL(2, \mathbb{R})$ par Lax et Phillips [10].

Une annonce de la formule de Kolk et Varadarajan est à paraître dans les comptes-rendus de l'Académie des Sciences. Plus de détails seront publiés dans la thèse de Kolk (Utrecht) et dans des travaux ultérieurs avec Varadarajan.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. J. Duistermaat et V. W. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math., 29, 1975, p.39-79.

[2] R. Gangolli : On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semi-simple Lie groups, Ann. of Math., 93, 1971, p.150-165.

[3] I. M. Gel'fand : Automorphic functions and the theory of representations, Proc. Int. Congr. of Math., p.74-85, Stockholm, 1962.

[4] S. G. Gindikin et F. I. Karpelevič : Plancherel measure of Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature, Doklady Akad. Nauk. SSSR, 145, 1962, p.252-255.

[5] Harish-Chandra : Spherical functions on a semi simple Lie group I, II, Amer. J. Math. 80, 1958, p.241-310, p.553-613.

[6] Harish-Chandra : Harmonic analysis on real reductive groups I. The theory of the constant term, 19, 1975, p.104-204.

[7] S. Helgason et K. Johnson : The bounded spherical functions on symmetric spaces, Advances in Math., 3, 1969, p.586-593.

[8] H. Huber : Zur analytischen Theoric hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen I. Math. Ann., 138, 1959, p.1-26.

[9] B. Kostant : On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, p.627-642.

[10] P. D. Lax et R. S. Phillips : Scattering theory for automorphic functions, Princeton University Press, 1976.

[11] V. S. Varadarajan : Harmonic analysis on real reductive groups, Springer Verlag (à paraître).