

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. BOLLEY

J. CAMUS

C. MATTERA

Analyticité microlocale et itères d'opérateurs

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 13,
p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979___A13_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 8 - 1 9 7 9

ANALYTICITE MICROLOCALE ET ITERES D'OPERATEURS

par P. BOLLEY, J. CAMUS, C. MATTERA

On se propose de donner une version microlocale du théorème classique sur les itérés d'un opérateur elliptique.

§ 1. ESPACES C^L

Comme dans Hörmander [2], soit L_k une suite croissante de nombres positifs tels que $L_0 = 1$, $k \leq L_k$ et $L_{k+1} \leq CL_k$ pour une constante C . Si Ω est un ouvert de \mathbf{R}^n , on note $C^L(\Omega)$ l'ensemble des distributions u dans Ω telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C_K avec

$$(1.1) \quad \|D^\alpha u\|_{L^2(K)} \leq C_K (C_K L^{|\alpha|})^{|\alpha|}$$

pour tout multi-indice α . Notons que l'on peut remplacer dans (1.1) les normes $L^2(K)$ par des normes $H^s(K)$ sans modifier l'espace. Quand $L_k = k+1$, l'espace $C^L(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques (réelles) dans Ω .

Si $P = P(x, D)$ est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω et s est un nombre réel, on note $C_s^L(\Omega; P)$ l'espace des distributions u dans Ω telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante C_K avec

$$(1.2) \quad \|P^N u\|_{H^s(K)} \leq C_K (C_K L^{mN})^{mN}$$

pour tout entier $N = 0, 1, \dots$

On note $C^L(\Omega; P) = \cup C_s^L(\Omega; P)$. On rappelle le théorème classique sur les itérés d'un opérateur \mathcal{S} elliptique (Kotaké-Narasimhan [3], ...).

Théorème 1.1 : Si P est un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω on a $C^L(\Omega) \subset C^L(\Omega; P)$. Inversement si P est elliptique dans Ω , on a $C^L(\Omega; P) \subset C^L(\Omega)$.

On se propose donc de donner une version microlocale de ce théorème; c'est l'objet des théorèmes 3.1 et 3.2.

Tout d'abord les espaces $C^L(\Omega)$ et $C^L(\Omega; P)$ peuvent être décrits à l'aide de la transformation de Fourier. Pour les espaces $C^L(\Omega)$, Hörmander [2] donne la caractérisation suivante :

XIII.2

Proposition 1.2 : Soient $x_0 \in \Omega$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors $u \in C^L(V)$ pour un voisinage V de x_0 , si et seulement si, pour un voisinage U de x_0 , il existe une suite bornée $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$u_N = u \quad \text{dans } U$$

$$(1.3) \quad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C(C L_N / |\xi|)^N \quad N = 1, 2, \dots$$

pour une constante $C > 0$.

On a une caractérisation du même type pour les espaces $C^L(\Omega; P)$.

Proposition 1.3 : Avec les notations précédentes, $u \in C^L(V; P)$ pour un voisinage V de x_0 si et seulement si pour un voisinage U de x_0 , il existe une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ telle que :

$$f_N = P^N u \quad \text{dans } U$$

$$(1.4) \quad |\hat{f}_N(\xi)| \leq C(C L_{mN})^{mN} (1 + |\xi|)^M \quad N = 0, 1, \dots$$

pour des constantes $C > 0$ et M .

La suite f_N s'obtient en tronquant la suite $P^N u$ par une même fonction. La suite u_N s'obtient en tronquant u par une suite de fonctions χ_N ayant des majorations convenables sur leurs dérivées jusqu'à un certain ordre ; dans ce cas la suite $u_N = \chi_N u$ est bornée dans $\mathcal{E}'(\Omega)$, propriété que l'on utilise sous la forme $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M$, $N = 1, 2, \dots$ pour des constantes $C > 0$ et M . Dans le problème des itérés qui nous intéresse ici, cette propriété est remplacée par :

Proposition 1.4 : Avec les notations précédentes, soient K un compact de

Ω et $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ vérifiant $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0, 1, \dots$

Alors la suite $f_N = \chi_{pmN+q} P^N u$, où p et q sont deux entiers indépendants de N , vérifie :

$$|\hat{f}_N(\xi)| \leq C(C(mN + |\xi|))^{mN+M} \quad N = 0, 1, \dots$$

pour des constantes $C > 0$ et M .

§ 2. FRONT D'ONDE

Dans le cas où u n'est pas $C^L(V)$ pour un voisinage V d'un point x_0 , on peut obtenir des informations sur la structure des singularités en x_0 , en examinant les directions pour lesquelles (1.3) n'est pas satisfaite, ce qui a conduit à la définition du front d'onde (Hörmander [2]) que l'on rappelle ici :

Définition 2.1 : Soient $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$; on dit que (x_0, ξ_0) est dans le complémentaire du front d'onde $WF_L(u)$ de u par rapport à C^L si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 , un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que

$$u_N = u \quad \text{dans } \Omega$$

$$u_N \text{ est bornée dans } \mathcal{E}'(\Omega)$$

$$(2.1) \quad |\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N \quad \xi \in \Gamma, \quad N = 1, 2, \dots$$

pour une constante $C > 0$.

Rappelons également le lemme de troncature suivant (Hörmander [2], lemme 3.3) qui sera utile plus loin.

Lemme 2.2 Avec les notations de la définition 2.1, soient K un voisinage compact de x_0 contenu dans U et F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ et fermé dans $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Soit $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ telle que $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leq N = 0, 1, \dots$. Alors la suite $\chi_N u$ satisfait (2.1) dans F .

De même pour le problème des itérés qui nous intéresse ici, dans le cas où u n'est pas $C^L(V; P)$ pour un voisinage V de x_0 , on peut obtenir des informations en examinant les directions pour lesquelles (1.4) n'est pas satisfaite; ce qui nous conduit à la définition du front d'onde associé aux itérés de P :

Définition 2.3 : Soient $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans Ω ; on dit que (x_0, ξ_0) est dans le complémentaire du front d'onde $WF_L(u; P)$ de u par rapport à C^L et aux itérés de P si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 , un

voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite $f_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que :

$$\begin{aligned}
 f_N &= P^N u && \text{dans } U \\
 |\hat{f}_N(\xi)| &\leq C(C(L_{mN} + |\xi|))^{mN+M} && \xi \in \mathbf{R}^n \\
 (2.2) \quad |\hat{f}_N(\xi)| &\leq C(C L_{mN})^{mN} (1+|\xi|)^M && \xi \in \Gamma, N = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

pour des constantes $C > 0$ et M .

La plupart des propriétés du front d'onde $WF_L(u)$ se transposent pour cette nouvelle notion. Tout d'abord, on a le lemme de troncature suivant analogue au lemme 2.2.

Lemme 2.4 : Avec les notations de la définition 2.3, soient K un voisinage compact de x_0 contenu dans U et F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ et fermé dans $\mathbf{R}^n \setminus 0$. Soit $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ telle que $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leq N = 0, 1, \dots$. Alors la suite $\chi_{mN} P^N u$ satisfait (2.2) dans F .

Ce lemme 2.4 permet en particulier de montrer, à l'aide de la proposition 1.3, le résultat suivant sur la projection de $WF_L(u; P)$:

Théorème 2.5 : La projection de $WF_L(u; P)$ est le complémentaire du plus grand ouvert Ω' de Ω tel que $u \in C_{loc}^L(\Omega'; P)$, où l'espace $C_{loc}^L(\Omega'; P)$ est défini de façon naturelle.

Quant à l'invariance par changement de coordonnées, on a :

Théorème 2.6 : La définition de $WF_L(u; P)$ est invariante par changement de coordonnées.

Comme pour $WF_L(u)$, on peut regarder $WF_L(u; P)$, non seulement comme un sous-ensemble conique fermé de $\Omega \times \mathbf{R}^n \setminus 0$, mais aussi comme un sous-ensemble conique fermé de $T^*(\Omega) \setminus 0$ en utilisant l'identification standard de l'espace cotangent de \mathbf{R}^n avec $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

§ 3. THEOREME DES ITERES

On peut maintenant donner une version microlocale du théorème des itérés pour un opérateur elliptique.

Tout d'abord on a la "partie directe" suivante :

Théorème 3.1 : Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω . Alors $WF_L(u; P) \subset WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$.

Démonstration : Il suffit de vérifier que $WF_L(u; P) \subset WF_L(u)$; car si l'on a cette inclusion, on aura $WF_L(Pu; P) \subset WF_L(Pu)$ et, comme d'une part $WF_L(Pu; P) = WF_L(u; P)$ et d'autre part $WF_L(Pu) \subset WF_L(u)$, on pourra en déduire le résultat annoncé.

Soit donc $(x_0, \xi_0) \notin WF_L(u)$; il existe un voisinage ouvert U de x_0 , un voisinage ouvert conique Γ de ξ_0 et une suite $u_N \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tels que $u_N = u$ dans U et $|\hat{u}_N(\xi)| \leq C(CL_N/|\xi|)^N$, $\xi \in \Gamma$.

Soient K un voisinage compact de x_0 contenu dans U , F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ , fermé dans $\mathbb{R}^n \setminus 0$ et $\chi_N \in C_0^\infty(U)$ avec $\chi_N \equiv 1$ dans K et $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0, 1, \dots$. On va montrer que la suite $f_N = \chi_{2mN} P^N u$ convient pour en déduire que $(x_0, \xi_0) \notin WF_L(u; P)$.

On a :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \chi_{2mN}(x) P^N u(x) dx = \int u(x) {}^t P^N(\chi_{2mN}(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}) dx$$

On pose :

$${}^t P(e^{-i\langle x, \xi \rangle} \chi_{2mN}(x)) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} R \chi_{2mN}$$

où R est un opérateur de la forme $R(x, \xi; D)$ qu'on ordonne suivant les puissances de ξ : $R = R_0 + R_1 + \dots + R_m$, R_j étant un opérateur différentiel d'ordre $\leq j$, à coefficients analytiques en x et homogènes de degré $m - j$ en ξ .

Ainsi :

$$\hat{f}_N(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) R^N \chi_{2mN}(x) dx$$

$$\text{avec } R^N \chi_{2mN}(x) = \sum_{0 \leq j_i \leq m} R_{j_1} \dots R_{j_N} \chi_{2mN} \quad .$$

En utilisant les propriétés des dérivées des χ_N , l'analyticité en x des coefficients des R_j et l'homogénéité en ξ de ces mêmes coefficients, on a (cf. Hörmander [2], lemme 5.2) :

$$|D^\alpha (R_{j_1} \dots R_{j_N} \chi_{2mN})| \leq C^{N+1} (mN)^{|\alpha| + j_1 + \dots + j_N} |\xi|^{mN - j_1 - \dots - j_N}$$

pour $|\alpha| \leq mN$. Par conséquent :

$$|D^\alpha (R^N \chi_{2mN})| \leq C^{N+1} (mN)^{|\alpha|} |\xi|^{mN} \quad |\alpha| \leq mN, \quad |\xi| \geq mN$$

De là on peut déduire grâce au lemme de troncature 2.2 que $\hat{f}_N(\xi)$ satisfait (2.2) pour $\xi \in F$ et $|\xi| \geq mN$.

Il est alors facile d'en déduire que $(x_0, \xi_0) \notin WF_L(u; P)$.

"Inversement" on a le résultat suivant :

Théorème 3.2 : Soient $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω . Alors :

$$WF_L(u) \subset WF_L(u; P) \cup \{(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0; P_m(x, \xi) = 0\}$$

P_m étant la partie principale de P .

Démonstration : On adapte la technique utilisée par Hörmander ([2], théorème 5.1) pour démontrer l'inclusion :

$$WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0; P_m(x, \xi) = 0\}.$$

Soit donc $(x_0, \xi_0) \notin WF_L(u; P)$ et tel que $P_m(x_0, \xi_0) \neq 0$.

Il existe un voisinage ouvert U de x_0 , un voisinage conique ouvert Γ de ξ_0 et une suite f_N qui coïncide avec $P^N u$ dans U et vérifiant (2.2) et (2.3). Soient K un voisinage compact de x_0 , contenu dans U , F un voisinage conique de ξ_0 contenu dans Γ et fermé dans $\mathbb{R}^n \setminus 0$ tels que $P_m(x; \xi) \neq 0$ dans $K \times \Gamma$. Soit $\chi_N \in C_0^\infty(K)$ avec $|D^\alpha \chi_N| \leq C(CN)^{|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq N = 0, 1, \dots$. On va montrer que la suite $u_N = \chi_{\frac{1}{3m} 2^N} P^N u$ convient pour en déduire que $(x_0, \xi_0) \notin WF_L(u)$.

On a :

$$\hat{u}_N(\xi) = \int u(x) \chi_{\frac{1}{3m} 2^N}(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \quad .$$

Pour estimer ce terme, on construit une solution $v(x, \xi)$ de l'équation :

$$(3.1) \quad {}^t P^N v(x, \xi) = \chi_{3m^2 N}(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}$$

où ${}^t P$ est l'opérateur adjoint dont la partie principale est $P_m(x, -D)$. Pour faire cette construction on pose :

$$v = e^{-i\langle x, \xi \rangle} w / P_m^N(x, \xi)$$

On a :

$${}^t P(e^{-i\langle x, \xi \rangle} w / P_m^N(x, \xi)) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} (I - R)w$$

où $R = R_1 + \dots + R_m$ avec $R_j = R_j(x, \xi, D)$ opérateur différentiel d'ordre $\leq j$ à coefficients analytiques en x et homogènes de degré $-j$ en ξ , pour $x \in K$ et $\xi \in F$; c'est le même genre de décomposition que dans la démonstration précédente. De cette formule, on déduit par récurrence que :

$$(3.2) \quad {}^t P^N(e^{-i\langle x, \xi \rangle} w / P_m^N(x, \xi)) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} ((I - R)P_m(x, \xi))^N P_m^{-N}(x, \xi)w$$

Il faut donc résoudre à la place de (3.1) :

$$(3.3) \quad ((I - R)P_m(x, \xi))^N P_m^{-N}(x, \xi)w = \chi_{3m^2 N}(x)$$

La solution formelle de cette équation est $w = P_m^N(x, \xi) (P_m^{-1}(x, \xi) \sum_0^\infty R^k)^N \chi_{3m^2 N}$. Cependant, on ne doit pas introduire des dérivées d'ordre trop élevé, si bien que l'on va considérer la solution approchée suivante de (3.3) :

$$w_N = P_m^N \sum_{k_1 + \dots + k_N \leq mN} P_m^{-1} R^{k_1} P_m^{-1} \dots P_m^{-1} R^{k_N} \chi_{3m^2 N}$$

où $P_m = P_m(x; \xi)$.

Cette fonction w_N vérifie l'équation

$$(3.4) \quad ((I - R)P_m)^N P_m^{-N} w_N = \chi_{3m^2 N} - e_N$$

où

$$e_N = \sum_{j=1}^N ((I - R)P_m)^{N-j} \overbrace{\quad}^{k_j + \dots + k_N = mN} R^{k_j+1} P_m^{-1} R^{k_{j+1}} P_m^{-1} \dots P_m^{-1} R^{k_N} \chi_{\mathfrak{M}^{2N}}$$

D'après (3.2), cette relation (3.4) signifie :

$$t_{P^N}(e^{-i\langle x, \xi \rangle} w_N(x, \xi) / P_m^N(x, \xi)) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} (\chi_{\mathfrak{M}^{2N}}(x) - e_N(x, \xi))$$

Ainsi, on a la formule de représentation :

$$\widehat{u \chi_{\mathfrak{M}^{2N}}(\xi)} = \int u(x) e_N(x, \xi) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx + \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f_N(x) \frac{w_N(x, \xi)}{P_m^N(x, \xi)} dx$$

Il reste à évaluer chaque terme de droite. En utilisant les développements de e_N et de w_N en fonction des R_j , $P_m(x, \xi)$ et $P_m^{-1}(x, \xi)$, on obtient, comme dans la démonstration du théorème précédent, des majorations de la forme :

$$\begin{aligned} |D^\alpha w_N(x, \xi)| &\leq C^N(mN) |\alpha| \\ |D^\alpha e_N(x, \xi)| &\leq C^N(mN) |\alpha| + mN |\xi|^{-mN} \end{aligned}$$

pour $|\alpha| \leq mN$, $|\xi| \geq mN$ et $\xi \in F$, $x \in K$.

De là, on peut en déduire que d'une part, en utilisant en particulier le lemme 2.4, on a :

$$\left| \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} f_N(x) \frac{w_N(x, \xi)}{P_m^N(x, \xi)} dx \right| \leq C(C L_{mN} / |\xi|)^{mN} (1 + |\xi|)^M$$

pour $|\xi| \geq mN$ et $\xi \in F$, et que d'autre part :

$$\left| \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) e_N(x, \xi) dx \right| \leq C^N(mN)^{mN+M'} |\xi|^{-mN+M'}$$

pour $|\xi| \geq mN$ et $\xi \in F$ (la constante M' étant liée à l'ordre de u dans K).

A partir de ces majorations, il est facile d'en déduire que $(x_0, \xi_0) \notin WF_L(u)$. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.

Comme corollaire, on retrouve le résultat de régularité donné par Hörmander ([2]; théorème 5.4) :

Corollaire 1 : Soient $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ et P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω . Alors :

$$WF_L(u) \subset WF_L(Pu) \cup \{(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0, P_m(x, \xi) = 0\}.$$

Si l'on a des majorations locales sur les itérés de u , on a le corollaire suivant :

Corollaire 2 : Si $u \in C^L(\Omega; P)$ où P est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques dans Ω , alors $WF_L(u) \subset \{(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0, P_m(x, \xi) = 0\}$.

Pour terminer, on peut écrire un dernier corollaire relatif à un système d'opérateurs qui généralise le théorème de Kotaké-Narasimhan :

Corollaire 3 : Soient P_1, \dots, P_r des opérateurs différentiels à coefficients analytiques dans Ω d'ordre m_1, \dots, m_r respectivement et tels que $\bigcap_{j=1}^r \{(x, \xi) \in T^*(\Omega) \setminus 0 ; P_{m_j}(x, \xi) = 0\} = \emptyset$. Alors $\bigcap_{j=1}^r C^L(\Omega; P_j)$, $L = C^L(\Omega)$.

Remarque : Un résultat analogue au corollaire 3 a été démontré par Damlakhi [1], lorsque les $P_{m_j}(x; \xi)$ sont réels et lorsque l'espace $C^L(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques ; la méthode utilisée dans [1] consiste à introduire une variable supplémentaire t et des opérateurs de la forme $Q_j = D_t^{m_j} - P_j(x, D)$ auxquels on applique le théorème de régularité analytique de Hörmander ([2]; théorème 5.4) (que l'on retrouve ici dans le corollaire 1).

Signalons que cette méthode permet également de traiter le cas où les P_{m_j} sont complexes ; plus précisément elle permet de démontrer le corollaire 2 lorsque l'espace $C^L(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Damlakhi : Analyticité et itérés d'opérateurs pseudo-différentiels. A paraître dans J. Math. Pures et Appl.
- [2] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math., Vol. XXIV, 671-704 (1971).
- [3] T. Kotaké, M. S. Narasimhan : Fractional powers of a linear elliptic operator. Bull. Soc. Math. France, 90, 449-471 (1962).
-