H. Brezis

Cordes vibrantes non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n^{o} 16, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

CORDES VIBRANTES NON LINEAIRES

par H. BREZIS

Exposé n° XVI

20 Mars 1979

On considère l'équation

$$(1)\quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x,t) \text{ dans } (0,\pi)\times\mathbb{R} \\ u(x,t) = 0 \quad \text{pour } x=0,\ x=\pi \\ u \text{ est } 2\pi\text{-périodique en } t, \end{cases}$$

où g est une fonction continue croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f(x,t)$ est une fonction donnée 2π-périodique en t.

On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles (1) admet une solution. On notera qu'en général (1) n'a pas nécessairement de solution pour tout f. Par exemple si $g \equiv 0$, alors (1) admet une solution si et seulement si f est orthogonal au noyau N de $\Box u = u_{tt} - u_{xx}$ qui consiste en toutes les fonctions de la forme $p(t+x) - p(t-x)$ avec p fonction 2π-périodique arbitraire.

Notre résultat principal est le suivant :

<u>Théorème 1</u> : On suppose que :

(2) $$|g(u)| \le \gamma|u| + C,\ \forall u \in \mathbb{R}, \text{ avec } \gamma < 3$$

(3) $f \in L^\infty(\Omega)$, où $\Omega = (0,\pi)\times(0,2\pi)$, admet une décomposition :

$$f(x,t) = f'(x,t) + f''(x,t) \quad \text{avec}$$

$$f' \in N^\perp \quad \text{et} \quad g(-\infty) < \operatorname*{Inf}_{\Omega} f'' \le \operatorname*{Sup}_{\Omega} f'' < g(+\infty).$$

Alors il existe $u \in L^\infty$ solution (généralisée) de (1).

<u>Remarques</u> :

1) Notons que l'hypothèse (3) est "presque" nécessaire et suffisante pour résoudre (1). En effet si (1) admet une solution on écrit $f = f' + f''$ avec $f' = \Box u$, $f'' = g(u)$, de sorte que $g(-\infty) \le f'' \le g(+\infty)$. Lorsque g est <u>strictement croissante</u> on a en plus $g(-\infty) < \operatorname{Inf} f'' \le \operatorname{Sup} f'' < g(+\infty)$, et dans ce cas (3) est nécessaire et suffisant.

2) Lorsque $g(-\infty) = -\infty$ et $g(+\infty) = +\infty$, le Théorème 1 montre qu'il existe une solution u pour tout $f \in L^{\infty}$. Ce cas avait été traité dans H. Brézis-L. Nirenberg [3]. La démonstration du Théorème 1 (dû à A. Bahri-H. Brézis [1]) repose de manière cruciale sur les techniques introduites dans [2] et [3].

3) La conclusion du Théorème 1 tombe en défaut si on suppose seulement $\gamma \leq 3$ dans (2). Par exemple, l'équation $\Box u + 3u = f$ n'admet pas de solution pour tout f car -3 est une valeur propre de $\Box$).

4) Si g est strictement croissante et si $g'(u) \leq \gamma < 3$, $\forall u \in \mathbb{R}$ alors la solution de (1) est unique (cf. [2] [3]). Par ailleurs si g est strictement croissante et si $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ $f \in C^{\infty}([0,\pi] \times \mathbb{R})$, alors toute solution $u \in L^{\infty}$ de (1) est en fait C^{∞} (cf. [3]).

5) L'hypothèse (3) peut encore s'écrire :

$$g(+\infty) \int_{\Omega} \psi^{+} - g(-\infty) \int_{\Omega} \psi^{-} \geq \delta \|\psi\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} f\psi , \qquad \forall \psi \in N$$

avec $\delta > 0$ (appliquer Hahn-Banach).

Sous cette forme, l'hypothèse (3) est à rapprocher de la condition introduite par Landesman-Lazer [5] dans l'étude d'équations non linéaires elliptiques à la résonance. La difficulté majeure qui s'introduit ici provient du fait que le noyau de $\Box$ est de dimension infinie.

6) Des questions analogues pour l'équation

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u_t) = f(x,t)$$

sont considérées par Haraux [4].

7) La démonstration du Théorème 1 fait appel à un mélange de techniques de monotonie et de compacité. La monotonie de g joue un rôle <u>essentiel</u> (on peut aussi considérer le cas où g est décroissante et obtenir une variante du Théorème 1). Par exemple nous ne savons pas s'il existe pour tout f une solution de l'équation $\Box u + u + 36 \sin u = f$ (bien que l'on ait des estimations a priori L^{∞} pour toutes les solutions).

Principe de la démonstration du théorème 1

Soit $H = L^2(\Omega)$. Pour tout $u \in H$, on écrira systématiquement $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in N^\perp$, $u_2 \in N$. On considère le problème approché

$$(4) \qquad \varepsilon u_{2\varepsilon} + \square u_\varepsilon + g(u_\varepsilon) = f \qquad \varepsilon > 0 .$$

Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

Etape 1 : Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout f, (4) admet une solution

Etape 2 : $\|\square u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$

Etape 3 : $\|u_\varepsilon\|_{L^1} \leq C$

Etape 4 : $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$

Etape 5 : Passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Dans toute la suite C désigne diverses constantes indépendantes de ε.

Etape 1 : On utilise une décomposition du type Lyapunov-Schmidt. Pour simplifier on supprime l'indice ε et on écrit (4) sous la forme projetée sur $N^\perp$ et N :

$$(5_1) \qquad \square u_1 + g_1(u_1 + u_2) = f_1$$

$$(5_2) \qquad \varepsilon u_2 + g_2(u_1 + u_2) = f_2$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u_1 \in N^\perp$, l'équation (5_2) admet une solution unique $u_2(u_1)$ qui dépend continûment de u_1 ; ceci résulte d'un théorème classique de Minty-Browder. On applique ensuite le théorème de point fixe de Schauder à l'équation (5_1) i.e. :

$$u_1 = \square^{-1}(f_1 - g_1(u_1 + u_2(u_1))) \ ;$$

l'opérateur $\square^{-1}$ envoie $N^\perp$ dans H^1 (ceci se vérifie à l'aide des séries de Fourier) et est donc compact de $N^\perp$ dans $N^\perp$.

Etape 2 : $\|\square u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$.

On utilisera l'inégalité

(5) $$(\square v, v)_{L^2} \geq -\frac{1}{3}\|\square v\|^2_{L^2} \quad , \quad \forall v \in D(\square)$$

(facile à vérifier sur les séries de Fourier). Grâce à l'hypothèse (3) on peut écrire $f = \square v + g(w)$ pour un certain $v \in L^2$ et un certain $w \in L^\infty$.

On a alors

(6) $$\varepsilon u_{2\varepsilon} + \square(u_\varepsilon - v) + g(u_\varepsilon) - g(w) = 0 \quad .$$

Prenant le produit scalaire L^2 de (6) avec $(u_\varepsilon - v)$ et appliquant (5) on obtient :

(7) $$\varepsilon \int_\Omega u_{2\varepsilon}(u_\varepsilon - v) + \int_\Omega (g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - v) \leq \frac{1}{3}\int |\square(u_\varepsilon - v)|^2$$
$$= \frac{1}{3}\int |g(u_\varepsilon) - g(w) + \varepsilon u_{2\varepsilon}|^2$$

Comme

$$(g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - v) = (g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - w + w - v)$$
$$\geq |g(u_\varepsilon) - g(w)|\,|u_\varepsilon - w| - |g(u_\varepsilon) - g(w)|\,|w-v|$$
$$\geq |g(u_\varepsilon) - g(w)|\left[\frac{1}{\gamma}(|g(u_\varepsilon)| - C) - |w|\right] - |g(u_\varepsilon) - g(w)|\,|w-v| \, ,$$

on a donc

$$\int (g(u_\varepsilon) - g(w))(u_\varepsilon - v) \geq \frac{1}{\gamma}\|g(u_\varepsilon)\|^2_{L^2} - C\|g(u_\varepsilon)\|_{L^2} - C \, .$$

On déduit alors de (7) que $\sqrt{\varepsilon}\,\|u_{2\varepsilon}\|_{L^2} \leq C$ et $\|g(u_\varepsilon)\|_{L^2} \leq C$ quand $\varepsilon \to 0$. On conclut avec (4) que $\|\square u_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$.

<u>Etape 3</u> : $\|u_\varepsilon\|_{L^1} \leq C$.

On fixe $r < \mathrm{Min}\,\{g(+\infty) - \mathrm{Sup}\, f'', \mathrm{Inf}\, f'' - g(-\infty)\}$. Alors pour tout $h \in L^\infty$ avec $\|h\|_{L^\infty} \leq r$, on a $f + h = \square v + g(w_h)$ pour un certain $w_h \in L^\infty$, tel que $\|w_h\|_{L^\infty} \leq C$ (indépendant de h) puisque $g(-\infty) < f'' + h < g(+\infty)$. On obtient alors :

$$\varepsilon u_{2\varepsilon} + \square(u_\varepsilon - v) + g(u_\varepsilon) - g(w_h) = -h .$$

Multipliant par $(u_\varepsilon - v)$ et raisonnement comme à l'étape 2 on voit que :

$$\int u_\varepsilon \cdot h \leq C, \text{ C indépendant de } \varepsilon \text{ et } h,$$

pour tout $h \in L^\infty$ tel que $\|h\|_{L^\infty} < \delta$. On conclut que $\|u_\varepsilon\|_{L^1} \leq C$.

<u>Etape 4</u> : $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$. On utilise d'abord l'inégalité

$$\|u_1\|_{L^\infty} \leq C \|\square u\|_{L^2} \qquad , \forall u \in D(\square)$$

(qui peut se vérifier à l'aide des séries de Fourier) pour conclure que $\|u_{1\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C$. Il reste donc à montrer que $\|u_{2\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C$. On introduit l'opérateur Q qui à toute fonction $\varphi(x,t)$ fait correspondre

$$(Q\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\varphi(x,t-x) - \varphi(x,t+x)]dx .$$

On vérifie aisément que :

(i) Si $\varphi \in N$ et si l'on pose $p = (Q\varphi)$, alors $\varphi(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$

(ii) Si $\varphi \in N^\perp$, alors $Q\varphi = 0$. On écrit alors :

$$u_\varepsilon(x,t) = u_{1\varepsilon}(x,t) + p_\varepsilon(t+x) - p_\varepsilon(t-x)$$

avec $p_\varepsilon = Qu_\varepsilon$. Il résulte de la définition de Q et de l'étape 3 que $\|p_\varepsilon\|_{L^1(0,2\pi)} \leq C$. Il nous reste donc à montrer que $\|p_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$. Appliquant Q à (4) on obtient :

$$\varepsilon p_\varepsilon(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [g(u_{1\varepsilon}(x,t-x) + p_\varepsilon(t) - p_\varepsilon(t-2x)) - g(u_{1\varepsilon}(x,t+x) + p_\varepsilon(t+2x) - p_\varepsilon(t))]dx$$

(8)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [f''(x,t-x) - f''(x,t+x)]dx \qquad \forall t \in [0,2\pi] .$$

Soit $\mu_\varepsilon = \sup_{[0,2\pi]} p_\varepsilon$; en choisissant pour t une suite t_n tel que $p_\varepsilon(t_n) \to \mu_\varepsilon$

on voit que

$$(9) \qquad \varepsilon\mu_\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [g(-C+\mu_\varepsilon - p_\varepsilon(t_o-2x)) - g(C+p_\varepsilon(t_o+2x)-\mu_\varepsilon)]dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\,(g(+\infty) - g(-\infty) - \delta$$

avec $\delta > 0$ (on a utilisé (3), la monotonie de g et l'estimation $\|u_{1\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C$).

Posons $G(u) = \frac{1}{2}[g(u) - g(-u)]$; on déduit immédiatement de (9) que

$$(10) \qquad \varepsilon\mu_\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(-C+\mu_\varepsilon - p_\varepsilon(s))ds \leq G(+\infty) - \delta$$

On introduit enfin les ensembles :

$$\Sigma_\varepsilon = \{s \in [0,2\pi] \quad ; \ p_\varepsilon(s) \geq \frac{\mu_\varepsilon}{2}\}$$

$${}^c\Sigma_\varepsilon = \{s \in [0,2\pi] \quad ; \ p_\varepsilon(s) < \frac{\mu_\varepsilon}{2}\}$$

(noter que $\mu_\varepsilon \geq 0$ car $\int_0^{2\pi} p_\varepsilon(s)ds = 0$).

On a alors

$$\frac{\mu_\varepsilon}{2}\,|\Sigma_\varepsilon| \leq \|p_\varepsilon\|_{L^1(0,2\pi)} \leq C$$

et donc

$$|{}^c\Sigma_\varepsilon| \geq 2\pi - \frac{2C}{\mu_\varepsilon}$$

D'autre part on a

$$(11) \qquad \int_{\Sigma_\varepsilon} G(-C+\mu_\varepsilon - p_\varepsilon(s))ds \geq -|G(-C)|\,|\Sigma_\varepsilon|$$

$$\geq -|G(-C)|\frac{2C}{\mu_\varepsilon} \quad ,$$

et

$$\int_{{}^c\Sigma_\varepsilon} G(-C+\mu_\varepsilon - p_\varepsilon(s))ds \geq G(-C+\frac{\mu_\varepsilon}{2})\,|{}^c\Sigma_\varepsilon| \geq G(-C+\frac{\mu_\varepsilon}{2})(2\pi - \frac{2C}{\mu_\varepsilon}) \tag{12}$$

(pourvu que μ_ε soit assez grand).

Combinant (10), (11) et (12) on voit que

$$G(-C+\frac{\mu_\varepsilon}{2})(2\pi - \frac{2C}{\mu_\varepsilon}) - |G(-C)|\frac{2C}{\mu_\varepsilon} \leq G(+\infty) - \delta \quad ;$$

ceci fournit une borne supérieure pour μ_ε (car le membre de gauche tend vers $G(+\infty)$ quand $\mu_\varepsilon \to \infty$). Le même argument montre que $\operatorname{Inf} p_\varepsilon$ reste borné quand $\varepsilon \to 0$.

<u>Etape 5</u> : <u>Passage à la limite quand</u> $\varepsilon \to 0$

La monotonie de g et la compacité de A^{-1} interviennent ici de façon essentielle.

On peut extraire une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que

$$u_{\varepsilon_n} \to u \quad \text{faiblement dans } L^2$$

$$\Box u_{\varepsilon_n} \to \Box u \quad \text{faiblement dans } L^2$$

$$(\Box u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}) \to (\Box u, u)$$

Cette dernière propriété se déduit du fait que $(\Box u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (\Box u_\varepsilon, u_{1\varepsilon}) \to (\Box u, u_1) = (\Box u, u)$ ($\{u_{1\varepsilon}\}$ est compact dans L^2 car $\Box^{-1}$ est un opérateur compact de $N^\perp$ dans $N^\perp$).

Appliquant la monotonie de g on a

$$\int_\Omega (g(u_\varepsilon) - g(\varphi))(u_\varepsilon - \varphi) \geq 0 \qquad \forall \varphi \in L^2$$

i.e.

$$\int_\Omega (f - \Box u_\varepsilon - \varepsilon u_{2\varepsilon} - g(\varphi))(u_\varepsilon - \varphi) \geq 0$$

Passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, il vient

$$\int_\Omega (f - \Box u - g(\varphi))(u-\varphi) \geq 0 \ , \quad \forall \varphi \in L^2$$

On conclut alors avec l'artifice de Minty, en choisissant $\varphi = u + t\psi$, et en faisant $t \to 0$ que $\Box u + g(u) = f$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bahri, H. Brézis : Periodic solutions of a nonlinear wave equation, A paraître.

[2] H. Brézis, L. Nirenberg : Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, Ann. Sc. Norm. Pisa, 5 (1978) p.225-326.

[3] H. Brézis, L. Nirenberg : Forced vibrations for a nonlinear wave equation, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) p.1-30.

[4] A. Haraux : Ocillations forcées pour des équations d'onde nonlinéaires faiblement dissipatives, J. Roy. Soc. Edinburgh, à paraître.

[5] E. Landesman, A. Lazer : Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19 (1970) p.609-623.