S. Mizohata

Sur le théorème de Cauchy-Kowalewski

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 19, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

SUR LE THEOREME DE CAUCHY-KOWALEWSKI

par S. MIZOHATA

Exposé n° XIX

24 Avril 1979

§ 1. INTRODUCTION

Il s'agit du problème de Cauchy dans la classe holomorphe. Etant donné une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine

$$(1.1)\qquad \partial_t^m u(t,x) - \sum_{j=1}^{m} a_j(t,x;\partial x)\partial_t^{m-j}u(t,x) = 0$$

et la donnée de Cauchy holomorphe

$$(1.2)\qquad \partial_t^j u(t,x) = u_j(x) \qquad (0 \leq j \leq m-1).$$

Alors on sait que toutes les dérivées $\partial_t^i u(0,x)$ sont déterminées uniquement par (1.1) et (1.2). En effet, en dérivant (1.1) par rapport à t, h fois on aura

$$\partial_t^{m+h} u(t,x) = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(h)}(t,x;\partial_x)\partial_t^{m-j} u(t,x) \ ,$$

et en posant $t=0$, $\partial_t^{m+h}u(0,x)$ - fonction holomorphe - s'exprime par $u_o(x),\ldots,u_{m-1}(x)$. Comme il s'agit toujours de solutions holomorphes, on forme la solution formelle :

$$(1.3)\qquad u(t,x) \sim \sum_{j=o}^{\infty} \frac{u_j(x)}{j!} t^j$$

Le théorème de Cauchy-Kowalewski dit que, si la condition

$$(K)\qquad \underset{\partial x}{\text{ordre}}\ a_j(t,x;\partial_x) \leq j$$

est vérifiée, alors la solution formelle exprime une fonction holomorphe.

Le but de cet exposé est de montrer que la condition (K) est nécessaire pour obtenir la conclusion du théorème de Cauchy-Kowalewski. Enonçons-le sous la forme du

<u>Théorème</u> : Si la condition (K) est violée, le théorème de Cauchy-Kowalewski ne subsiste plus. Autrement dit, toutes les fois que la condition (K) est violée, il existe au moins une donnée de Cauchy holomorphe (1.2) telle que la solution formelle (1.3) ne soit pas convergente.

Ce théorème a été démontré par Miyaké dans le cas $m=1$ [1]. Ensuite, l'auteur a montré le fait suivant : Soit

$$a_j(t,x;\zeta) = \sum_k a_{jk}\, a_{jk}(t,x;\zeta) \tag{1.4}$$

où a_{jk} est la partie homogène d'ordre k en ζ. Soit $q(j,k)$ l'ordre de zéro de a_{jk} par rapport à t :

$$a_{jk}(t,x;\zeta) = t^{q(j,k)} \mathring{a}_{jk}(t,x;\zeta) \quad (\mathring{a}_{jk}(o,x;\zeta) \not\equiv 0), \tag{1.5}$$

alors la condition

$$\max_{j,k} \frac{k}{q(j,k)+j} \leq 1$$

est nécessaire pour que le théorème de Cauchy-Kowalewski soit vrai [2].

Finalement, Kitagawa-Sadamatsu ont démontré que la condition suivante est nécessaire (voir [3]) ;

$$\max_{k>j} \frac{k}{q(j,k)+j} < \max_{k\leq j} \frac{k}{q(j,k)+j} \tag{K.S.}$$

Observons que le second membre est au plus égal à 1. Nous appelons la condition ci-dessus la condition (K.S.), et les termes a_{jk} avec $k>j$ des termes non-kowalewskiens. Le cas où les coefficients ne dépendent que de t se traite d'une autre manière. En effet, dans ce cas en posant

$$u_\zeta(t,x) = e^{\zeta x} v_\zeta(t)$$

$v_\zeta(t)$ devient la solution de l'équation différentielle

$$v_\zeta^{(m)}(t) - \sum_j a_j(t;\zeta)\, v_\zeta^{(m-j)}(t) = 0$$

Si l'on suppose que les termes non kowalewskiens existent, alors on peut montrer qu'il existe une famille de solutions $v_\zeta(t)$ telle que leurs données de Cauchy à $t=0$ sont restées bornées et que

$$|v_\zeta(t)| \geq \exp(\delta|\zeta|^p t)$$

avec $p>1$, lorsque $\zeta \in \mathbb{C}^\ell$ tend vers l'infini convenablement. Ceci démontre que le théorème de Cauchy-Kowalewski ne subsiste plus (voir [4]). La méthode de la démonstration du théorème est une extension de celle-ci.

Je vais donner les grandes lignes de la démonstration. Un article ultérieur donnera la démonstration.

§ 2. PRELIMINAIRES

Je suppose désormais que la condition (K) est violée, cependant le théorème de Cauchy-Kowalewski subsiste. On peut supposer la condition nécessaire (K. S.). Notre raisonnement qui va suivre est celui par l'absurde. Plus précisément, on va montrer deux inégalités qui ne sont pas compatibles. Les deux propositions qui vont suivre sont fondamentales ([4]).

Proposition 1 : Supposons que pour toute donnée de Cauchy holomorphe $\Psi \equiv (u_0(x),\dots,u_{m-1}(x)) \in H(\mathcal{O}_x)^m$, il existe une solution holomorphe de (1.1) $u(t,x) \in H(V_\Psi)$, V_Ψ étant un voisinage de l'origine, alors il existe un polydisque D ayant son centre à l'origine tel que pour toute $\Psi \in H(\mathcal{O}_x)^m$ il existe toujours une solution holomorphe unique $u(t,x)$ dans $H(D)$.

Proposition 2 : L'application $\Psi \in H(\mathcal{O}_x)^m$ dans $u \in H(D)$ est continue.

Désormais, on va considérer une famille -ou une suite, si on veut - de données initiales de la forme :

$$\partial_t^i u(0,x) = e^{n\xi_0 x} \varphi_{n,i}(x) \qquad (0 \le i \le m-1) \tag{2.1}$$

où $\xi_0 \in \mathbb{R}^\ell$, et $\varphi_{n,i}(x)$ sont des fonctions entières, et $\varphi_{n,i}(x)$ satisfait

$$|\partial^\alpha \varphi_{n,i}(x)| \le C_0(n).(nA)^{|\alpha|}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^\ell . \tag{2.2}$$

Alors compte-tenu de la condition (K.S.), la Proposition 2 implique, en posant

$$u_n(t,x) = e^{n\xi_0 x} v_n(t,x),$$

Proposition 3 : Il existe des constantes positives (C,K,t_0) qui dépendent seulement de l'équation telles qu'on ait :

$$|v_n(t,x)| \le C\ c_0(n) \exp\{n(|\xi_0| + A)K|t|\}. \tag{2.3}$$

pour $x \in \mathbb{R}^\ell$, $|x| < r'$, $|t| \le t_0$. Il en est de même pour $\partial_t^i v_n(t,x)$ $(0 \le i \le m-1)$ si l'on remplace la constante C par un polynome en n.

§ 3. LOCALISATION DE L'OPERATEUR

Rappelons que nous avons posé $u_n = e^{n\xi_o x} v_n$. v_n satisfait

$$\partial_t^m v_n - \sum_j a_j(t,x;n\xi_o + \partial x)\partial_t^{m-j} v_n = 0 \tag{3.1}$$

Posons

$$a_j(t,x;n\xi_o + \partial x) = n^j h_j \ . \tag{3.2}$$

Alors, en désignant l'espace dual de x par η, compte tenu de (1.4),

$$a_j(t,x;n\xi_o + i\eta) = n^j \Big[\sum_{k\leq j} a_{jk}(t,x;\xi_o+i\eta')n^{k-j} + \sum_{k<j} a_{jk}(t,x;\xi_o+i\eta')n^{k-j}\Big] \tag{3.3}$$

où $\eta' = \eta/n$.

Regardons les termes non-kowalewskiens. Compte-tenu de la condition (K.S.), on a en particulier

$$\max_{k>j} \frac{k}{q(j,k) + j} < 1 \ .$$

Alors, on définit σ_1 (> 0) par

$$\max_{k>j} \frac{k-j}{q(j,k)} = \sigma_1 < 1 \ . \tag{3.4}$$

C'est-à-dire

$$k-j = \sigma_1 \ q(j,k) - \delta_{jk} \qquad \delta_{jk} \geq 0. \tag{3.5}$$

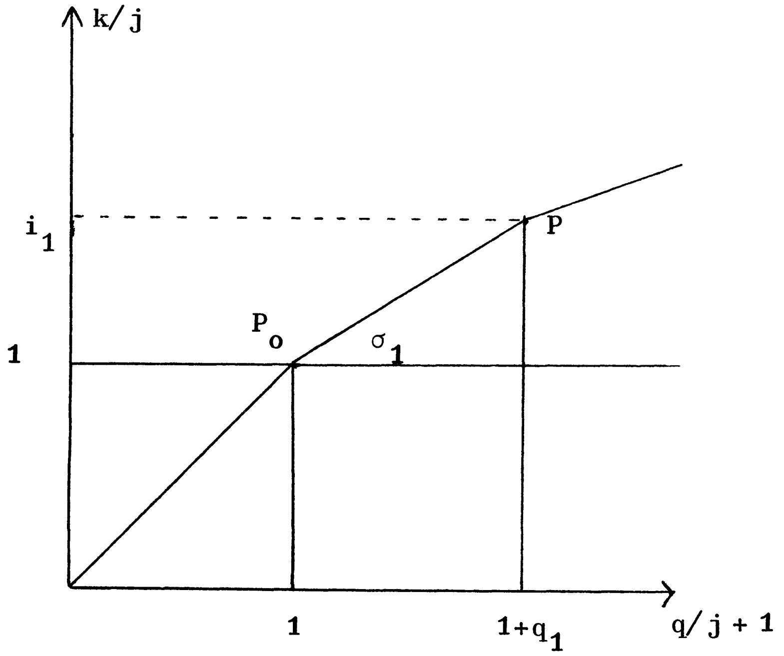
Dans (3.3), les termes non-kowalewskiens s'écrivent

$$\sum_{k>j} (n^{\sigma_1} t)^{q(j,k)} \mathring{a}_{jk}(t,x;\xi_o + i\eta')n^{-\delta_{jk}}$$

Au lieu de t, on prend :

$$s = n^{\sigma_1} t \tag{3.6}$$

Dans l'expression ci-dessus, regardons les termes avec $\delta_{jk} = 0$. Alors $q(j,k) \leq jq_1$.



On va voir que lorsque n et s tend vers ∞, dans h_j les termes qui correspondent au point P dans le diagramme de Newton :

$$\mathring{a}_{j,ji_1}(t,x;\xi_o + i\eta')\, s^{jq_1}$$

jouent le rôle prépondérant. Considérons donc "l'équation caractéristique"

$$\mu^m + \sum_j \mathring{a}_{j,ji_1}(0,0;\zeta_o)\mu^{m-j} = 0 \tag{3.7}$$

Si, éventuellement tous les coefficients sont identiquement nuls, en déplaçant un peu l'origine dans la direction x, on peut supposer qu'au moins les a_{j,ji_1} (comme fonctions de ζ) ne sont pas identiquement nuls.
On choisit $\zeta_o \in \mathbb{C}^{\ell}$ $|\zeta_o| = 1$, de telle manière que (3.7) ait au moins une racine μ_1 dont la partie réelle soit positive. Posons

$$\zeta_o = \xi_o + i\eta_o \; .$$

Maintenant on va localiser l'opérateur $\gamma^{(1+\varepsilon)}$ désigne la classe $(1+\varepsilon)$ de Gevrey. $\Phi(\;)$ désigne une fonction $\gamma^{(1+\varepsilon)}$, avec les propriétés :
1) $0 \leq \Phi(r) \leq 1$, 2) $\Phi(r) = 1$, pour $0 \leq r \leq \varepsilon'$ $= 0$ pour $r \geq 2\varepsilon'$. On choisit :

$$(3.8) \qquad 0 < \varepsilon < \sigma_1/2$$

La localisation en x signifie que pour tout symbole $a(x,\eta')$ on fait correspondre

$$\tilde{a}(x,\eta') = a(x,\eta')\,\Phi(|x|) + a(0,\eta')(1-\Phi(|x|)).$$

La localisation en η' signifie que

$$a(x,\eta') \mapsto \tilde{a}(x,\eta') = a(x,\eta')\Phi(|\eta'-\eta_o|) + a(x,\eta_o)(1-\Phi(|\eta'-\eta_o|)).$$

Soit $\alpha(\eta)$ (resp. $\beta(x)$) $\in \gamma^{(1+\varepsilon)}$, qui est égal à 1 dans $|\eta-\eta_o| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ (resp. $|x| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$), et égal à 0 dans $|\eta-\eta_o| \geq \varepsilon'$ (resp. $|x| \geq \varepsilon'$).

Alors d'abord en opérant à gauche $\beta(x)$ à

$$L(v_n) \equiv \partial_t^m v_n - n\sum_j h_j|t,x;\xi_o + D')n^{j-1}\partial_t^{m-j} v_n = 0 ,$$

où $D' = \frac{1}{n}\partial x$, on a :

$$(3.9) \qquad L(\beta v_n) = g_n$$

où

$$g_n = n\sum_p \frac{(-1)^{(p)}}{p!} h_j^{|p|}(t,x;\xi_o + D')n^{j-1}\partial_t^{m-j}(\beta_{(p)}v_n),$$

on fait la localisation en x, expliquée plus haut. Cette localisation ne change pas l'équation, car sur le support de $\beta(x)$, $|x| \leq \varepsilon'$, les coefficients ne changent pas .

On écrit l'équation modifiée par

$$(3.10) \qquad \tilde{L}(\beta v_n) = g_n .$$

Ensuite, on fait la localisation en η', après avoir opéré $\alpha(\eta')$ ($= \alpha(\eta/n) = \alpha_n(\eta)$) à gauche,

$$L_{loc}(\alpha_n\beta v_n) = f_n ,$$

où

$$\frac{1}{n} f_n = \sum_{|p|\geq 1} \frac{(-1)^{|p|}}{p!} \sum_j \tilde{h}_j^{(p)} n^{j-1} \partial_t^{m-j}(\alpha_n \beta_{(p)} v_n)$$
$$+ \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^{|p|}}{p!} \sum_j [\alpha_n, \tilde{h}_j^{(p)}] n^{j-1} \partial_t^{m-j}(\beta_{(p)} v_n) \ .$$

Observons que les coefficients $\tilde{\tilde{h}}_j$ dans L_{loc} ne sont plus opérateurs différentiels, mais les opérateurs pseudo-différentiels bornés en x opèrant sur $L^2(\mathbb{R}^\ell)$. Le symbole $\tilde{\tilde{h}}_j(t,x;\eta')$ a la propriété que

$$\tilde{\tilde{h}}_j(t,x;\eta') - \tilde{\tilde{h}}_j(t,x;\eta_o)$$

a son support dans $|\eta' - \eta_o| \leq 2\varepsilon'$. Donc, comme fonction de η, il a son support dans $|\eta - n\,\eta_o| \leq 2n\varepsilon'$. Maintenant :

(3.11) $$L_{loc}(\mathcal{W}_n) = 0$$

peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_n = n\, A\, \mathcal{W}_n$$

où $\mathcal{W}_n = {}^t(n^{m-1} \mathcal{W}_n, n^{m-2} \partial_t \mathcal{W}_n, \dots, \partial_t^{m-1} \mathcal{W}_n)$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ h_m & \cdots & \cdots & \cdots & h_1 \end{bmatrix}$$

ou bien ,

(3.12) $$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{W}_n(s) = \nu\, A_\nu(s,x;D)\, \mathcal{W}_n ,$$

où

(3.13) $$\nu = n^{1-\sigma_1}$$

Observons que ν tend vers l'infini avec n.

Nous devons considérer un autre système équivalent, qui est nécessaire quand s est assez grand.

En posant dans (3.11),

$$\tilde{\mathcal{W}}_n = (s^{(m-1)s_1}\, n^{m-1} w_n, \dots, \partial_t^{m-1} w_n)$$

on aura

$$(3.14) \qquad \frac{\partial}{\partial S}\tilde{\mathcal{W}}_n = \nu S^{q_1}\, \tilde{A}_\nu \tilde{\mathcal{W}}_n$$

On voit que, si ν et s sont assez grands, le symbole de $\tilde{A}_\nu$ est presque égal à :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \\ a_{m,mj_1}(0,0;\zeta_0) & \dots & \dots & \dots & a_{1,i_1}(0,0;\zeta_0) \end{bmatrix}$$

Soient

$$\mathrm{Re}\,\mu_1, \dots, \mathrm{Re}\,\mu_k > 0$$

$$\mathrm{Re}\mu_{k+1}, \dots, \mathrm{Re}\mu_m \leq 0$$

Alors, soit N_o une matrice constante telle que

$$N_o \mathcal{H} N_o^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \mu_m \end{bmatrix}$$

où on peut supposer que les éléments * soient aussi petits qu'on le veut . En posant

$$N_o \tilde{\mathcal{W}}_n = {}^t(u_1^{(n)}, \dots, u_m^{(n)}) ,$$

on considère

$$E_n(s; \mathcal{W}_n) = \sum_{i=1}^{k} \|u_i^{(n)}\|^2_{L^2} - \sum_{i=k+1}^{m} \|u_i^{(n)}\|^2_{L^2}$$

Si éventuellement il existe un μ_j telle que Re $\mu_j = 0$, on doit mettre devant la somme $\exp(-\delta'\nu S^{q_1+1})$ (δ' petit). On a alors, si s et ν sont assez grands ,

<u>Proposition 4</u> : $E_n(s;\mathcal{W}_n) \geq \exp\{\nu(s^{q_1+1} - s_o^{q_1+1})\delta''\}E_n(s_o;\mathcal{W}_n)$

où δ'' est une constante positive.

§ 4. CHOIX DES DONNEES INITIALES

Soit $\psi(\eta') \in \gamma^{(1+\varepsilon)}$, $0 \leq \psi(\eta') \leq 1$, $\mathrm{supp}(\psi) \subset \{\eta' ; |\eta'-\eta_o| < \frac{\varepsilon'}{2}\}$.

Il serait naturel de choisir $u_1^{(n)} = \tilde{\psi}_n(x)$, image inverse de Fourier de $\psi(\eta')$, et les autres composantes sont 0, dans l'expression précédente de $E_n(s;\mathcal{W}_n)$.

Alors $\mathcal{W}_n(s_o)$ sont déterminés. On considère (3.12). $\mathcal{W}_n(0)$ est défini par (3.12). Pour notre raisonnement ultérieur, il est nécessaire de savoir la propriété de $\mathcal{W}_n(0)$. Dans ce but, il convient d'introduire

<u>Définition 1</u> : Une fonction $f_\nu \in L^2(\mathbb{R}^\ell)$ ou un opérateur a_ν opérant sur $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ est dit <u>négligeable</u> si pour tout K (> 0), $\|f\nu\|$ ou $\|a_\nu\|$ tend vers 0 plus rapidement que $\exp(-\nu K)$, lorsque ν tend vers ∞.

<u>Définition 2</u> : $\mathcal{L}^{(1+\varepsilon)}$. Un opérateur a_ν opérant sur $L^2(\mathbb{R}^\ell)$ appartient à $\mathcal{L}^{(1+\varepsilon)}$ si a_ν s'exprime sous la forme

$$a_\nu = \mathring{a}_\nu + a_{\nu,R} ,$$

où $a_{\nu,R}$ est négligeable et $\mathring{a}_\nu$ est un opérateur p.d. dont le symbole a la forme $a_\nu(x,\eta')$ (où $\eta' = \eta/n$) et de plus

i) il existe des constantes C_1 et K telles que

$$|\partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta a_\nu(x,\eta')| \leq \alpha!^{1+\varepsilon}\,\beta\,!^{1+\varepsilon}\,K^{|\alpha+\beta|}/n^{|\alpha|}\ \exp(C_1\nu)$$

ii) $a_\nu(x,\eta') - a_\nu(x,\eta_o)$ a son support (comme fonction de η') dans $|\eta' - \eta_o| \leq 2\varepsilon'$.

Soit $\Phi(s,s_o)$ la matrice fondamentale de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{W} = \nu A_\nu \mathcal{W} .$$

<u>Proposition 5</u> : $\Phi_\nu(s,s_o) \in \mathcal{L}^{(1+\varepsilon)}$. Alors comme $\Phi_\nu(0,s_o) = \mathring{\Phi}_\nu(0,s_o) + \Phi_{\nu,R}$, $\mathring{\Phi}_\nu(0,s_o) = (t_{ij,\nu}(x,\eta'))_{1\le i,j\le m} \subset \mathcal{L}^{(1+\varepsilon)}$ et $\Phi_{\nu,R}$ est négligeable.

Finalement, en prenant une fonction $\gamma(\eta')$ qui vaut 1 sur le support de $\psi(\eta')$ et que $\mathrm{supp}[\gamma(\eta')] \subset \{\eta' ; |\eta' - \eta_o| < \varepsilon'\}$, on prend

$$\gamma_n(D)\,\mathring{\Phi}_\nu(0,s_o)\,\mathcal{W}(s_o),$$

($\gamma_n(D)$ est opérateur de convolution, ou plutôt p.d.o. $\hat{\gamma}_n(\eta) = \gamma(\eta')$),

cela signifie qu'on prend comme donnée initiale $\varphi_{n,i}$ les fonctions de la forme :

$$\varphi_{n,i}(x) = \gamma_n(D)\,t_{i,\nu}(x,D')\,\tilde{\psi}_n(x), \tag{4.1}$$

Remarquons que $[\gamma_n(D), t_{i,\nu}]$ est <u>négligeable</u>, et que $\gamma_n(D)\,\tilde{\psi}_n(x) = \tilde{\psi}_n(x)$, d'où $\varphi_{n,i}(x) - t_{i,\nu}\tilde{\psi}_n(x)$ est négligeable. $\varphi_{n,i}(x)$ est une fonction entière et on a

$$|\partial^\alpha \varphi_{n,i}(x)| \le \exp(C_1\nu)(nA)^{|\alpha|} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^\ell \tag{4.2}$$

§ 5. <u>DEMONSTRATION DU THEOREME</u>

Maintenant nous considérons

$$L_{loc}(\alpha_n \beta \mathcal{V}_n) = f_n \; .$$

Ou bien le système équivalent

$$\frac{\partial}{\partial s}(\alpha_n \beta \mathcal{V}_n) = \nu A_\nu(\alpha_n \beta \mathcal{V}_n) + F_n \quad , \quad F_n = {}^t(0,\ldots,0,n^{-\sigma_1} f_n) \tag{5.1}$$

Nous comparons ce système avec

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{W}_o = \nu A_\nu \mathcal{W}.$$

D'abord

$$\mathcal{W}_n(s) = \mathring{\Phi}_\nu(s,s_o)\,\mathcal{W}_n(s_o)$$

satisfait à

$$(5.2) \qquad \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{V}_n(s) = \nu A_\nu \mathcal{W}_n(s) + F_\nu(s),$$

où $F_\nu(s)$ est négligeable. D'après la définition de $\mathcal{V}_n(0)$, $\mathcal{V}_n(0) - \mathcal{W}_n(0)$ est négligeable. Une considération détaillée montre que

<u>Proposition 6</u> : $F_n(s)$ est négligeable. Par conséquent $\alpha_n\beta(\mathcal{V}_n(s) - \mathcal{W}_n(s))$ est négligeable dans $s \in [0,s_o]$.

Notons que cette propriété de $F_n(s)$ tient à deux faits :
1) la forme particulière des données initiales ;
2) les symboles de tous les opérateurs p.d. appartiennent à $\gamma^{(1+\varepsilon)}$.

Evaluons $E_n(s_o;\alpha_n\beta\,\mathcal{V}_n)$. Comme la différence $\alpha_n\beta\,\mathcal{V}_n - \alpha_n\beta\,\mathcal{W}_n$ est négligeable, il suffit d'évaluer $E_n(s_o;\alpha_n\beta\,\mathcal{W}_n)$. On voit facilement

<u>Proposition 7</u> : $E_n(s_o;\alpha_n\beta\,\mathcal{V}_n) \geq \exp(-\delta''\nu)$, ($\delta'' > 0$, constante).
D'où, compte tenu de la Proposition 4, on a :

<u>Proposition 8</u> : $E_n(s;\alpha_n\beta\,\mathcal{V}_n) \geq \exp(\delta''\,\nu\, s^{q_1+1})$,
si s et ν sont assez grands.

Cette inégalité n'est pas compatible avec celle de la Proposition 3. En effet, on a, compte-tenu de (3.16),

$$|\mathcal{V}_n(s,x)| \leq C \exp(C_1\nu)\exp(K'\nu s),$$

où K' est une constante fixe, et cette inégalité vaut au moins pour x sur le support de $\beta(x)$. Cette inégalité entraînerait l'inégalité de la forme

$$E_n(s;\alpha_n\beta\,\mathcal{V}_n) \leq p(\nu,s)\exp(C'\nu s),$$

où $p(\nu,s)$ est un polynome en (ν,s). Or dans l'inégalité de la Proposition 8, $q_1 > 0$ et on peut prendre ν et s aussi grands qu'on le veut, donc l'inégalité précédente et celle de la Proposition 8 ne sont pas compatibles, ce qui démontre le Théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Miyaké : A remark on Cauchy-Kowalewski's theorem, Pub. R. I. M. S. Kyoto Univ., 10 (1974) 245-255.

[2] S. Mizohata : On Cauchy-Kowalewski's theorem ; a necessary condition, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ., 10 (1975), 509-519.

[3] K. Kitagawa, T. Sadamatsu : A remark on a necessary condition of the Cauchy-Kowalewski theorem, Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. (1976).

[4] S. Mizohata : Une remarque sur le théorème de Cauchy-Kowalewski, Ann. Scuola Norm. Pisa, 5 (1978).