Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

C. Bardos
M. Cessenat

Spectre de l'opérateur de transport

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 20, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

SPECTRE DE L'OPERATEUR DE TRANSPORT

par C. BARDOS et M. CESSENAT

Exposé n° XX

24 Avril 1979

§ 1. INTRODUCTION

L'équation de transport s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\vec{\Omega}\,\nabla u + \sigma u - \int_{S^2} f(x,\Omega,\Omega')u(x,v\Omega')d\Omega' = 0 \tag{1}$$

$$u(v,v\vec{\Omega},t) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial X \;,\; \nu.\vec{\Omega} < 0 \tag{2}$$

$$u(x,v\vec{\Omega},0) = u_o(x,v\vec{\Omega}) \;. \tag{3}$$

Dans (1) u désigne une fonction scalaire représentant la quantité de neutrons situés à l'instant t au point x et animés de la vitesse $v.\vec{\Omega}$; x appartient à un ouvert X de $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière ∂X, on notera ν la normale extérieure à ∂X en tout point $x \in X$, $\vec{\Omega}$ appartiendra à la sphère unité et v à $\mathbb{R}_+$, on notera V l'ensemble des points $v\vec{\Omega}$; $\frac{\partial}{\partial t} + v\vec{\Omega}.\nabla$ représente la différence entre ce qui rentre dans un élément volume et ce qui en sort. σ représente un terme d'absorbtion et d'émission et le terme intégrale représente la quantité de neutrons qui repartiront dans la direction $v\vec{\Omega}$ après être arrivé dans la direction $v\vec{\Omega}'$ et avoir eu leurs trajectoires modifiées par suite de chocs. La condition aux limites (2) exprime qu'aucune particule ne pénètre dans X, (3) décrit l'état initial.

Avec la condition aux limites (2) l'opérateur $v.\vec{\Omega}\nabla$ définit le générateur d'un semi-groupe (ou d'un groupe unitaire lorsque $X = \mathbb{R}^3$), dans $H = L^2(X \times V)$

$$\sigma \,. \; - \int_{S^2} f(\cdot,\cdot,\Omega').d\Omega'$$

est autoadjoint et borné dans H.

Le spectre de l'opérateur de transport ainsi défini a été étudié par beaucoup d'auteurs en particulier pour prévoir le comportement asymptotique des solutions et aussi pour montrer que la densité moyenne

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u(x,t,v\vec{\Omega})\, d\vec{\Omega}$$

peut être approchée par la solution d'une équation de diffusion. Le spectre de l'opérateur de transport :

$$Tu = -\Omega \nabla u - \sigma u + \int_{S^2} f(.,.,\Omega')u(.,.\Omega')d\Omega'$$

présente une grande variété de configurations.

Jorgens [3] a montré que si X est borné et que si le module des vitesses v est borné inférieurement par un nombre, $\alpha > 0$, alors le spectre de T est formé d'une suite de valeurs propres simples de multiplicité finie sans point d'accumulation à distance finie.

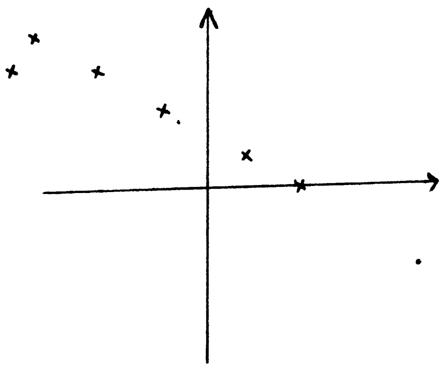
Albertoni et Montagnini [1] ont considéré le cas où σ dépend de v (module de vitesse, racine de l'énergie). Ils supposent que X est borné que les modules des vitesses peuvent s'annuler et que f satisfait à des propriétés de symétrie. Ils ont montré alors que le spectre de T est formé du demi plan $\mathrm{Re}\, z \leq \sigma(0)$ et d'une suite de valeurs propres réelles de multiplicité finie situés dans l'intervalle $[\sigma(0), A]$ sans autre point éventuel d'accumulation que $\sigma(0)$. Le demi plan $\mathrm{Re}\, z \leq \sigma(0)$ correspond au spectre continu. Dans leur démonstration ils s'appuient sur un cas particulier traité par Lehner et Wing [4]: l'opérateur

$$T_o u = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} u(x,\mu')d\mu'.$$

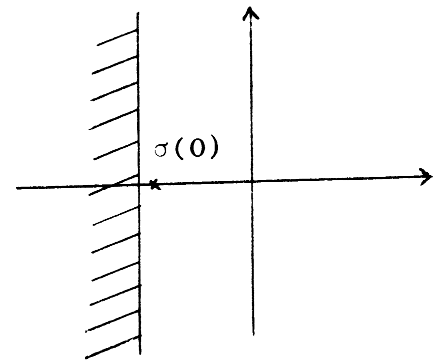
défini dans l'espace $L^2(]-a,a[\times]-1,1[)$ avec la condition aux limites

$$(4) \qquad \begin{cases} u(-a,\mu) = 0 & \text{si } 0 \leq \mu \leq 1 \\ u(a,\mu) = 0 & \text{si } -1 \leq \mu \leq 0 . \end{cases}$$

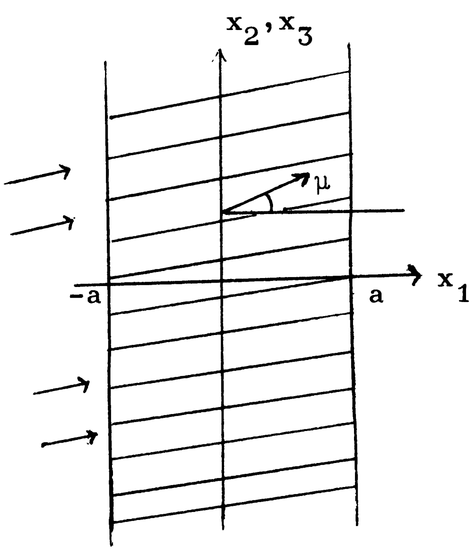
Cet exemple correspond à une bande de longueur infinie dans les directions x_2 et x_3, d'épaisseur 2a, traversée par un flux de neutrons invariants par translation selon le plan x_2, x_3 ; μ désigne alors le produit scalaire du vecteur $\vec{\Omega}$ avec la direction x_1. Lehner et Wing trouvent pour le spectre de T le demi plan $\mathrm{Re}\, z \leq 0$ et une suite infinie de valeurs propres de mulitplicité finie convergeant vers zéro (voir figures) :

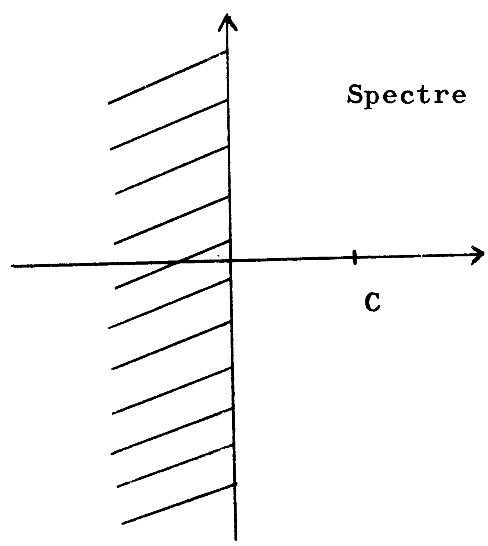


Spectre de T dans le cas étudié par Jorgens



Spectre de T dans le cas étudié par Albertoni et Montagnini





Spectre de T

Le problème étudié par Lehner et Wing.

Pour étudier l'équation de la diffusion Case et Zweifel [2] ont considéré l'opérateur $T = -\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} d\mu'$ dans l'espace $H = L^2(\mathbb{R} \times [-1,1]$ et ont étudié pour cet opérateur des fonctions propres généralisées. Le sens qu'ils donnent à cet objet est assez vague et n'est en particulier pas relié à la théorie spectrale usuelle. Le but de cet exposé est de montrer comment, en s'inspirant des idées de Case et Zweifel

[2] il est possible de construire une décomposition spectrale complète de l'opérateur T. Ceci permet de donner l'exemple de décomposition spectrale d'un opérateur (qui est donc spectral) mais qui n'est pas normal, ni à résolvante compacte, et de fournir un outil pour l'étude de l'approximation de la diffusion.

§ II. REMARQUES GENERALES SUR L'OPERATEUR $-\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1}$.

On étudiera donc l'opérateur T défini dans l'espace

$$H = L^2(\mathbb{R} \times]-1,1[)$$

par les relations :

$$D(T) = \{u \in H \mid \mu \frac{\partial u}{\partial x} \in H^2, \quad Tu = -\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} .$$

On remarque que T est générateur d'un groupe dans H et que son image numérique (l'ensemble des nombres de la forme $z = (Tu,u)$, $u \in D(T), |u| = 1$) est contenu dans la bande $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq c$. Il en est donc de même de son spectre. On remarque également que l'adjoint de T est l'opérateur T^* défini sur le même domaine par la relation

$$T^* u = \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} u(x,\mu')d\mu' . \tag{5}$$

La résolution de l'équation

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} u(x,\mu')d\mu' - \lambda u = f(x,\mu) \tag{6}$$

se fait en utilisant la transformation de Fourier par rapport à la variable x. On obtient

$$-(\lambda + i\mu\xi)\hat{u} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \hat{u}(\xi,\mu')d\mu' = \hat{f}(\xi,\mu) . \tag{7}$$

Si λ n'appartient pas à l'axe imaginaire, cette équation est équivalente au système :

$$\hat{u}(\xi,\mu) = \frac{1}{(\lambda + i\mu\xi)} [\frac{c}{2} \hat{q}(\xi) - \hat{f}(\xi,\mu)] \tag{8}$$

$$(1 - \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\lambda + i\mu\xi})\hat{q}(\xi) = - \int_{-1}^{1} \frac{\hat{f}(\xi,\mu)d\mu}{(\lambda + i\mu\xi)} \tag{9}$$

dans (8) et (9) $\hat{q}(\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction $q(x) = \int_{-1}^{1} u(x,\mu')d\mu$. On introduit alors la fonction

$$\lambda \to \Lambda(\xi,\lambda) = 1 - \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\lambda + i\mu\xi}$$

Cette fonction est analytique en dehors de l'intervalle $(-i\xi, i\xi)$ l'équation (6) aura une unique solution $u \in D(T)$ dès que $\Lambda(\xi,\lambda)$ ne s'annulera pas. On montre que $\Lambda(\xi,\lambda)$ ne s'annule que pour $0 \leq \lambda \leq C$, il existe alors deux nombres $\xi(\lambda)$ et $-\xi(\lambda)$ tel que l'on ait

$$\Lambda(\xi(\lambda),\lambda) = \Lambda(-\xi(\lambda),\lambda) = 0.$$

Les nombres $\xi(\lambda)$ parcourent l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}C, \frac{\pi}{2}C]$, on a donc prouvé la :

<u>Proposition 1</u> : Le spectre de T est contenu dans la réunion de l'axe $i\mathbb{R}$ et de l'intervalle réel $[0,C]$.

§ 3. FONCTIONS PROPRES GENERALISEES DE L'OPERATEUR T

On va montrer dans ce paragraphe qu'il existe en tout point de $i\mathbb{R} \cup [0,C]$ des fonctions propres généralisées. C'est-à-dire des distributions appartenant à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi \times [-1,1])$ solution de l'équation

$$(10) \qquad -\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} u(x,\mu)d\mu - \lambda u = 0 .$$

(L'intégrale d'une distribution $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi \times [-1,1])$ est donnée par la formule

$$(11) \qquad <\int_{-1}^{1} \psi(\xi,\mu)d\mu, \varphi(\xi,\mu)> = <\psi, \int_{-1}^{1} \varphi(\xi,\mu)d\mu>)$$

per contre on montrera qu'il n'existe aucune fonction $u \in L^2(\mathbb{R} \times]-1,1[)$ solution de (10). Des arguments analogues étant valables pour T^* qui présente la même structure, on déduit par dualité le :

<u>Théorème 1</u> : Le spectre de l'opérateur T est l'ensemble $i\mathbb{R} \cup [0,C]$, en tout point de ce spectre l'opérateur $T - \lambda I$ est injectif et d'image dense.

Montrons maintenant la

Proposition 2 : Pour tout $\lambda \in i\mathbb{R} \cup [0,C]$ il existe des distributions solutions de (10). Ces distributions ne sont pas des fonctions de carré sommable mais sont de la forme suivante :

a) pour $\lambda \in [0,C]$

(12) $$u(\xi,\mu) = \frac{\delta(\pm\xi(\lambda))}{\pm i\mu\xi(\lambda) + \lambda}$$

b) pour $\lambda \in i\mathbb{R}$

(13) $$\hat{u}(\xi,\lambda) = Y(|\xi| - |\lambda|)\hat{q}(\xi)\left(\frac{C}{2} VP \frac{1}{i\mu\xi + \lambda} + \Lambda_o(\xi,\lambda)\delta(\mu + \frac{\lambda}{i\xi})\right) .$$

Dans (12) δ désigne la distribution en la variable ξ au point $\pm\xi(\lambda)$ sa transformée de Fourier inverse est bien entendu la fonction $e^{\pm ix\xi(\lambda)}$, dans (13) est la fonction d'Heaviside, $\hat{q}$ est une fonction arbitraire de ξ, $\delta\ (\mu + \lambda/i\xi)$ est la distribution δ en μ au point $-\lambda/i\xi$ et enfin $\Lambda_o(\xi,\lambda)$ sera défini comme une valeur au bord de la fonction $\Lambda(\xi,\lambda)$.

Démonstration : Pour $\lambda \in [0,C]$, les seules solutions de (10) non identiquement nulles correspondent à des distributions vérifiant $\Lambda(\xi,\lambda)\hat{q}(\xi) = 0$. Elles sont donc données par la relation (12). Pour $\lambda \in i\mathbb{R}$, $|\lambda| \leq |\xi|$, on remarque que les uniques solutions de l'équation $(i\mu\xi + \lambda)\hat{u}(\xi,\mu) = 0$ sont proportionnelles à la distribution $\delta(\mu + \frac{\lambda}{i\xi})$, cette distribution a pour intégrale, sur $[-1,1]$ la fonction 1. Ainsi toute solution de (10) vérifie la relation

(14) $$\hat{u}(\xi,\mu) = VP\left(\frac{1}{i\mu\xi + \lambda}\right)\hat{q}(\xi) + A(\lambda,\xi)\,\delta(\mu + \frac{\lambda}{i\xi})$$

en intégrant de -1 à 1 en μ on déduit de (14) la relation (13), en identifiant $A(\lambda,\xi)$, ce qui donne :

$$A(x,\xi) = \Lambda_o(\xi,\lambda) = \left(1 - \frac{C}{2} VP \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{i\mu\xi + \lambda}\right).$$

§ 4. COMPLETUDE DES FONCTIONS PROPRES

Dans ce paragraphe on va montrer que les fonctions propres identifiées au paragraphe 3 forment un système complet. (Des résultats de ce type sont usuellement établis pour des opérateurs autoadjoints dans des ouverts non bornés en particulier en théorie du "scattering"). On va, pour une fonction régulière, établir la formule :

(15) $$u(x,\mu) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{ix\cdot\xi}\Big(\frac{\hat{q}(\xi)Y(\frac{\pi}{2}c - |\zeta|)}{i\mu\xi + \lambda(\xi)} + \int_{i\mathbb{R}} \hat{q}(\xi,\lambda)Y(|\xi| - |\lambda|)$$

$$\big(\frac{C}{2}VP(\frac{1}{i\mu\xi+\lambda}) + \Lambda_o(\xi,\lambda)\delta(\mu + \frac{\lambda}{i\zeta})d\lambda\Big)$$

Par transformation de Fourier, cette formule devient la relation (pour ξ fixé, $\mu \in [-1,1]$)

(16) $$\hat{u}(\xi,\mu) = \frac{\hat{q}(\xi)}{i\mu\xi + \lambda(\xi)} + i\hat{q}(\xi,-i\mu\xi)\Lambda_o(\xi,-i\mu\xi) +$$

$$+ \frac{C}{2}VP\int_{i\mathbb{R}\cap\{|\lambda|<|\xi|\}} (\hat{q}(\xi,\lambda)/(i\mu\xi + \lambda))d\xi$$

On pose $\hat{q}(\xi,-i\mu\xi) = A(\mu)$ et on obtient

(17) $$(\hat{u}(\xi,\mu) - \hat{q}(\xi)/(i\mu\xi + \lambda(\xi))) = \Lambda_o(\xi_1 - i\mu\xi)A(\mu) - \frac{C}{2}VP\int_{-1}^{1}\frac{A(\tau)}{(\tau-\mu)}\,d\tau .$$

Ce qui conduit à déterminer $A(\mu)$ comme une valeur au bord sur l'intervalle $[-1,1]$, plutôt que de déterminer $A(\mu)$ on va déterminer

$$n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-1}^{1}\frac{A(z)}{(z-z)}\,dz .$$

Les formules d'inversion usuelles donnent

(18) $$n^+(\mu) + n^-(\mu) = \frac{1}{i\pi}VP\int_{-1}^{1}\frac{A(z)}{\tau-\mu}\,dz$$

(19) $$n^+(\mu) - n^-(\mu) = A(\mu).$$

En remarquant que $\Lambda_o(\xi,-i\mu\xi)$ s'identifie à la valeur au bord de la fonction $\Lambda(\xi,-i\xi z)$, on voit que $n(z)$ est déterminé par la relation :

(20) $$n(z)\Lambda(\xi,-i\xi z) = \frac{1}{2in}\int_{-1}^{1}\frac{1}{i\xi}(\hat{u}(\xi,\mu) - \hat{q}(\xi)/(i\mu\xi + \lambda(\xi)))/(\mu-z))d\mu .$$

$\Lambda(z)$ tend vers 1 lorsque $|z| \to \infty$. Elle est holomorphe dans le plan privé de l'intervalle $[-1,1]$. Pour que $n(z)$ soit une fonction holomorphe dans le plan privé de $[-1,1]$, décroissant à l'infini comme $1/|z|$ il faut et il suffit que le second membre de (20) s'annule dès que $\Lambda(\xi,-i\xi z) = 0$, ce qui correspond aux zéros simples de la fonction $\lambda \to \Lambda(\xi,\lambda)$. On détermine ainsi $\hat{q}(\xi)$ de manière unique.

§ 6. COMMENTAIRES

Les calculs des coefficients $\hat{q}(\xi)$ et $\hat{q}(\xi,\lambda)$ sont assez explicites, il s'expriment comme des produits scalaires avec les fonctions de l'adjoint T^*.

La démonstration de la complétude a été faite en supposant u régulière, on peut vraisemblablement l'étendre à $u \in L^2(\mathbb{R}\times[-1,1])$. Cette démonstration utilise la représentation de la fonction $A(\mu)$ inconnue par la fonction inconnue

$$n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^{1} \frac{A(\mu)}{\mu - z} d\mu .$$

il est possible que cet argument puisse se simplifier.

On peut généraliser les résultats à certains opérateurs à plusieurs dimensions en utilisant la transformation de Radon. On peut également considérer des noyaux plus généraux que la constante C, les résultats dépendront des zéros de la fonction

$$\lambda \to \Lambda(\xi,\lambda) = (1 - \int_{-1}^{1} \frac{g(\mu)}{i\mu\xi+\lambda} d\mu).$$

Bibliographie

[1] S. A. Albertoni et B. Montagnini : On the spectrum of Neutron transport equation in finite bodies. Journal of Math. Analysis and Applications Vol. 13, no 1, Janvier 1966, 19-48.

[2] K. Case et P. F. Zweifel : Linear Transport theory. Addison Wesley, 1967.

[3] K. Jorgens : An asymptotic expansion in the theory of neutrons transport. Comm. Pure App. Math. 11 (1958)219-242 .

[4] J. Lehner et F. M. Wing : On the spectrum of an asymptotic operator arising in the transport theory of neutrons. Comm. Pure App. Math 8 (1955) 217-234.