Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. MIYATAKE

Le problème mixte des équations des ondes et applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 21, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 8 - 1 9 7 9

LE PROBLEME MIXTE DES EQUATIONS DES ONDES ET APPLICATIONS

par S. MIYATAKE

Exposé n° XXI

24 Avril 1979

On se propose d'étudier le problème mixte pour le système des équations des ondes dans un espace de Sobolev et de l'appliquer aux problèmes des équations de Maxwell concernant les potentiels électromagnétiques. Mais d'abord, on rappelle les résultats et les méthodes pour une seule équation des ondes, parce que cela nous donne les bases de nos considérations.

Pour avoir des notations plus simples, on se limite aux problèmes dans un ouvert de la forme $R_{+}^{n+1} \times]0,\infty[$. On trouvera des énoncés généraux concernant l'équation hyperbolique du second ordre dans [6] et [7]. On divise cet exposé comme suit :

§ 1. Enoncé du problème et du résultat pour l'équation des ondes.

§ 2. La condition (H) et le théorème d'Hermite.

§ 3. L'opérateur de Green et son estimation.

§ 4. Transformation de l'estimation pour obtenir (H).

§ 5. Le problème mixte pour le système des équations des ondes .

§ 6. Les équations de Maxwell et leurs potentiels locaux .

§ 7. L'introduction des conditions aux bord pour les potentiels globaux.

§ 8. Des exemples.

Finalement donnons une bibliographie successive. Concernant l'existence et l'unicité pour le problème d'une équation, on citera les articles [8], [3], [4], [9] et [1]. Plus récemment on peut consulter [10] et [11] qui ont traité des problèmes voisins. Quant aux équations de Maxwell, il est impossible d'en donner une bibliographie complète. (Citons par exemple [12]).

§ 1. ENONCE DU PROBLEME ET DES RESULTATS POUR L'EQUATION DES ONDES

Un peu d'histoire.

Les problèmes mixtes pour les équations hyperboliques sont apparus depuis longtemps. Il s'agit de montrer l'existence et l'unicité de la solution pour

$$\begin{cases} \square u = f(x,t) \ , \quad \Omega \times]0,\infty[, \quad \Omega \subset R^{n+1} \\ Bu\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

et d'étudier ses diverses propriétés. Les conditions de Dirichlet $u|_{\partial\Omega} = 0$ et de Neumann $\frac{\partial}{\partial x} u|_{\partial\Omega} = 0$ sont célèbres.

La considération de conditions plus générales ou d'équations plus générales, s'est effectuée plus récemment. Après l'exposé de S. Mizohata [8] et les considérations générales de H. O. Kreiss [4], R. Sakamoto [9] a obtenu la bonne estimation pour une classe de problèmes contenant le problème de Dirichlet non homogène (i.e. $u|_{\partial\Omega} = g$), estimation qui permettent de démontrer l'existence de la solution et sa continuité par rapport aux données, comme dans le cas du problème de Cauchy. Mais cette classe que l'on appelle celle vérifiant la condition de Lopatinsky uniforme, ne contient pas le problème de Neumann pour l'équation des ondes. C'est ainsi qu'il restait à considérer le problème de Neumann et surtout à obtenir une bonne estimation pour ce problème avec la condition non-homogène : $\frac{\partial}{\partial x} u|_{\partial\Omega} = g$. Dans ce cas-là, il faut résoudre une classe de problèmes qui contient le problème de Neumann pour des équations hyperboliques du second ordre général. En effet, même lorsqu'on veut démontrer des propriétés de propagation à vitesse finie pour l'équation des ondes, on est amené à faire des transformations "spatiales" (par exemple celles d'Holmgren), qui conduisent à l'étude d'une classe plus générale. C'est ainsi que l'on arrive au problème mixte pour l'équation régulièrement hyperbolique du second ordre, qui s'écrit :

$$\begin{cases} Pu = f(x,t), & \Omega \times]0,\infty[\\ Bu|_{\partial\Omega} = g(y,t) & \\ (\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=o} = u_j(x) \ , & (j = 0,1) \end{cases}$$

dans un ouvert $\Omega \times]0,\infty[$, avec $\partial\Omega$ assez régulière. Ici l'opérateur au bord B est un opérateur du premier ordre qui est non-caractéristique par rapport à $\partial\Omega$.

Enoncé du problème et des résultats

Considérons ici simplement le problème dans le cas particulier suivant (cf. [6] et [7] pour les théorèmes généraux) :

$$(P)\quad \begin{cases} \Box u = f(x,y,t), & x>0,\ y\in R^n,\ t>0, \\ Bu\big|_{x=o} = g(y,t) & \\ (\frac{\partial}{\partial t})^j u\big|_{t=o} = u_j(x,y), & (j=0,1) \end{cases}$$

où

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \ , \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial y_j} - c\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{avec } b_j = b_j(y,t) \text{ et } c = c(y,t).$$

Etudions le problème de la continuité de la solution $(u(t),u'(t))$ par rapport aux données (u_o,u_1) dans le même espace :

$$(C)\qquad \begin{array}{rcl} (u_o,u_1) & \longrightarrow & (u(t),u'(t)) \\ H'\times L^2 & \longrightarrow & H'\times L^2 \\ \text{ou } H^m\times H^{m-1} & \longrightarrow & H^m \times H^{m-1} \end{array}$$

C'est la même continuité que le problème de Cauchy. Et cela se traduit par l'inégalité (*) suivante : étant donné T positif, il existe une constante C, telle que l'on ait :

$$(*)\qquad \|u(t)\|_1 + \|u'(t)\|_o \le C\{\|u(0)\|_1 + \|u'(0)\|_o + \int_o^t \|(Pu)(s)\|_o \, ds\}$$

pour toutes les fonctions test : $u \in C_o^\infty(\overline{R_+^{n+1}\times R_+^1})$ vérifiant $Bu\big|_{x=o} = 0$, $0 < t < T$.

Alors on obtient :

<u>Théorème 1</u> : On a l'inégalité (*), si et seulement si la condition au bord satisfait à la condition (H) suivante. En posant :

$$\alpha(\eta) = c + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\eta_j}{|\eta|} \quad (= \alpha(y,t,\eta)) \ ,$$

on peut écrire :

$$(H)\begin{cases} A \equiv \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Re}\,\alpha(\eta) & \mathrm{Im}(\alpha(\eta)\overline{\alpha(-\eta)}) \\ \mathrm{Im}(\alpha(\eta)\overline{\alpha(-\eta)}) & 2\,\mathrm{Re}\,\alpha(-\eta) \end{pmatrix} \gneqq 0 & \text{si } |\mathrm{Re}\,\alpha(\eta)|+|\mathrm{Re}\,\alpha(-\eta)| \neq 0, \\ I + (\mathrm{Im}\,\alpha(\eta))(\mathrm{Im}\,\alpha(-\eta)) > 0 \quad , & \text{si } |\mathrm{Re}\,\alpha(\eta)| + |\mathrm{Re}\,\alpha(-\eta)| = 0 \\ \text{pour tous } (\eta, t, \eta) \in R^n \times R^1_+ \times S^{n-1} \quad . \end{cases}$$

Maintenant en parallèle avec l'inégalité (*), nous devons chercher une inégalité convenable dans le cas où $g \neq 0$, telle que cette inégalité assure le théorème d'existence de la solution, la solution vérifiant les propriétés de continuité que nous avons mentionnées ci-dessus par (C). En conséquence nous avons :

<u>Théorème 2</u> : Si on suppose (H), alors il existe une et une seule solution du problème (P) et on a l'inégalité d'énergie suivante :

$$(**)\quad \begin{aligned} &\|u(t)\|_1^2 + \|u'(t)\|_o^2 + \int_o^t (\langle\langle(\frac{\partial}{\partial t}u)(s)\rangle\rangle^2_{-1/2} + \langle\langle(\frac{\partial}{\partial x})(s)\rangle\rangle^2_{-1/2} + \langle\langle u(s)\rangle\rangle^2_{1/2})\,ds \\ &\leq C_T\{\|u_o\|_1^2 + \|u_1\|_o^2 + t\int_o^t (\|f(s)\|_o^2 + \langle\langle g(s)\rangle\rangle^2_{1/2})\,ds\} \end{aligned}$$

pour $0 < t < T$, où $\langle\langle v\rangle\rangle_r = \|v\|_{H^r(R^n)}$, $R^n \ni y$.

<u>Remarque</u> : Si $g \equiv 0$ on peut retrouver (*).

<u>Remarque</u> : Si on impose des conditions de compatibilité, on peut augmenter en même temps tous les indices dans (**), c'est à dire qu'on peut remplacer $-1/2$, 0, $1/2$ et 1 par $-1/2 + k$ etc..., pour tout entier positif k. Mais au lieu de $\|f(s)\|_k^2 + \langle\langle g(s)\rangle\rangle^2_{1/2}$ on utilise

$$\sum_{j=o}^{k} (\|\frac{\partial^{k-j}}{\partial t^{k-j}} f)(s)\|^2_{k-j} + \langle\langle(\frac{\partial^{k-j}}{\partial t^{k-j}} g)(s)\rangle\rangle^2_{1/2+k-j}) \; .$$

<u>Remarque</u> : En ce qui concerne l'inégalité (**), $\int_o^t \langle\langle(Bu)(s)\rangle\rangle^2_{1/2}\,ds$ est très naturel, si on le compare à $\int \|(Pu)(s)\|_o^2 ds$, parce qu'on a l'identité :

(ordre de P) + (l'indice de norme de Pu) = (ordre de B)+(l'indice de norme de Bu) $+ \frac{1}{2}$.

Mais en même temps, il est très important de remarquer que dans $\int \langle\langle g(s)\rangle\rangle^2_{1/2} ds$ l'indice $\frac{1}{2}$ concerne seulement la direction y. C'est un point tout à fait différent du cas elliptique où l'indice $\frac{1}{2}$ doit concerner les directions y et t.

Remarque : L'estimation (**) est très utile pour montrer le théorème d'existence satisfaisant la continuité (C). Cependant la preuve de (**) n'est pas obtenue simplement. On doit en effet microlocaliser les estimations dans l'espace $(y,t,\eta,\tau) \in R^n \times R' \times R^n \times C_-$, $C_- \ni \tau = \sigma - i\gamma$, $\gamma > 0$, cette microlocalisation étant associée à la transformation de Laplace. (Pour une démonstration précise, voir [6] et [7].)

§ 2. LA CONDITION (H) ET LE THEOREME D'HERMITE

La condition (H) est équivalente à :

$$(H')\quad \begin{cases} \text{Toutes les racines } z_1 \text{ et } z_2 \text{ de l'équation } \alpha(\eta)z^2 - 2iz - \alpha(-\eta) = 0, \\ \text{ils sont dans } \bar{C}_+ = \{z \in C,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\} \text{ et puis } z_1 \neq z_2 \text{ si} \\ \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2 = 0 \text{ pour tous } (y,t,\eta) \in R^n \times R'_+ \times S^{n-1}\ . \end{cases}$$

On déduit (H) de (H'), en utilisant une sorte de prolongement du théorème d'Hermite. Le théorème d'Hermite concerne un polynôme général f(z) qu'on peut écrire :

$$f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = p(z) + iq(z) \ , \text{ où}$$

$$p(z) = z^m + (\mathrm{Re}\, a_1)\, z^{m-1} + \dots + (\mathrm{Re}\, a_m) \ ,$$

et il énonce que les trois conditions suivantes sont toutes équivalentes :

(C_1) : Toutes les racines de f(z) sont dans $C_+ = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$

(C_2) : $A = (A_{ij}) > 0$, où (A_{ij}) est définie par :

$$\frac{p(x)q(y) - q(x)p(y)}{x-y} \equiv \sum_{i,k=0}^{m-1} A_{ij}\, x^i y^k \ .$$

(C_3) Toutes les racines de $p(z) = 0$ et de $q(z) = 0$ sont réelles , et entre elles il y a des relations : $\mu_k < \nu_k < \mu_{k+1}$, $(k = 1,\dots,m-1)$, où $p(\mu_k) = 0$ et $q(\nu_k) = 0$.

Remarque sur le théorème d'Hermite :

(C_2) $\Leftrightarrow$ (C_3) est utilisé pour montrer que le problème de Cauchy pour un opérateur régulier et hyperbolique est bien posé au sens L^2 (Cf. les démonstrations de J. Leray [5] et L. Gårding [2]). Quand on considère le problème mixte, on rencontre nécessairement la propriété (C_1) sous la forme suivante.

Lemme : Si $f(z)$ n'a pas de couple de racines $\{z_{i_1}, z_{i_2}\}$ qui satisfont $z_{i_1} = \bar{z}_{i_2}$, alors les conditions ($\bar{C}_1$) est ($\bar{C}_2$) sont équivalentes :

($\bar{C}_1$) : Toutes les racines de $f(z)$ sont dans $\bar{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$

($\bar{C}_2$) : $(A_{ij}) \geq 0$

D'après ce lemme, on obtient : (H') $\Leftrightarrow$ (H). La condition (H') est encore équivalente à

(H") Il existe une constante δ positive telle que l'on ait $|\alpha(\eta)z^2 - 2iz - \alpha(-\eta)| > \delta |\operatorname{Im} z|$, pour tout z appartenant à $C_- = \{z \in C, \operatorname{Im} z < 0\}$ et pour tous $(y,t,\eta) \in R^n \times R^!_+ \times S^{n-1}$.

§ 3. L'OPERATEUR DE GREEN ET SON ESTIMATION

a) D'après l'inégalité (*) on obtient :

$$(*)' \qquad |u|_{1,\gamma} \leq \frac{C}{\gamma} |Pu|_{o,\gamma} \ , \ \forall \gamma > 0.$$

pour $u \in C_o^\infty (\overline{R_+^{n+1}} \times R_+^!)$ telle que $Bu\big|_{x=o} = 0$, où

$$|u|^2_{k,\gamma} = \overline{\sum_{i+j+|\alpha|+\ell=k}} \iiint |D_x^i D_t^j D_y^\alpha \gamma^\ell e^{-\gamma t} u|^2 dx\, dy\, dt \ .$$

On peut vérifier (*)' en intégrant (*) par rapport à t et en utilisant l'identité de Plancherel. Montrons l'esprit de la méthode dans le cas le plus simple : $\frac{d}{dt} v = f(t)$. Si $f(t)\, e^{-\gamma t}$ appartient à L^2, $(\gamma > 0)$ et si

Dans cette preuve, on utilise l'inégalité suivante que l'on a globalement :

$$(4)\qquad C_1 \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|} < \frac{|\mathrm{Im}\,\xi_+|}{|\mathrm{Im}\,\tau|} \; \frac{|\eta|}{|1+z^2|} < C_2 \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}, \quad (0 < C_1 < C_2).$$

pour tout $z \in C_-$ et tous $(\eta,\tau) \in \Sigma$ (voir [6]). L'inégalité (3) équivaut à (H"), qui est égale à (H).

§ 5. LE PROBLEME MIXTE POUR LE SYSTEME DES EQUATIONS DES ONDES

Ici nous allons étendre le résultat précédent au cas d'un système d'équations. Ecrivons $U = {}^t(u_o, u_1, \dots, u_n)$, $F = {}^t(f_o, f_1, \dots, f_n)$, $x_o = t$, $x_1 = x$, $(x_2, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_n)$. Le problème s'écrit simplement :

$$(P)_s \qquad \begin{cases} \Box U = F & , \; 0 < x_o, \; 0 < x_1, \\ \displaystyle\sum_{j=o}^{n+1} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U \Big|_{x_1 = o} = 0 & , \end{cases}$$

où les $B_j = (b^{(j)}_{i,k})_{i,k=0,\dots,n+1}$ sont des matrices constantes. Au lieu de $(*)'$, on considère de la même façon l'inégalité :

$$(*)'_s \qquad |U|_{1,\gamma} \le \frac{C}{\gamma} |\Box U|_{o,\gamma} \quad , \quad \forall \gamma > 0$$

pour tout $U \in C_o^\infty(\overline{R_+^{n+1}} \times R_+^1)$ telle que $\displaystyle\sum_{j=o}^{n+1} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U\Big|_{x_1=o} = 0$.

Alors on obtient :

<u>Théorème</u> : $(*)'_s$ équivaut à la condition $(3)_s$ suivante :

$$(3)_s \qquad \begin{cases} \|(A(\eta)z^2 + 2i B_1 z - A(-\eta))^{-1} B_1\| \le \dfrac{C}{|\mathrm{Im}\, z|} \\ \text{pour tout } z \in C_- \text{ et tout } \eta \in S^{n-1}, \text{ où } A(\eta) = B_o + \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} B_j \eta_j \text{ et} \\ \|\cdot\| \text{ signifie la norme de l'opérateur matriciel.} \end{cases}$$

Si on suppose $(3)_s$, alors on a la solution de $(P)_s$ telle que $U \equiv 0$ dans $x_o < 0$, si $F \equiv 0$ dans $x_o < 0$.

<u>Le cadre de la preuve</u> : D'après (*)' on a

$$(1)_s \qquad \|\mathcal{B}(\xi_+)^{-1}\mathcal{B}(\xi_-)\|\,|\xi_+ - \xi_-|^{-1}\,|\mathrm{Im}\,\xi_+|^{-1} \le \frac{C}{\gamma} \quad \text{for} \quad (\eta,\tau) \in \Sigma\,,$$

où $\mathcal{B}(\xi_\pm) = B_o\tau \pm B_1\sqrt[+]{\tau^2 - |\eta|^2} + \sum_{j=2}^{n+1} B_j\eta_j$.

Dans le cas des systèmes, (2) est remplacé par :

$$(2)_s \qquad \mathcal{B}(\xi_+)^{-1}\,\mathcal{B}(\xi_-) = I - \mathcal{B}(\xi_+)^{-1}B_1(\xi_+ - \xi_-).$$

Donc on a $(3)_s$ en utilisant la transofrmation (T) et l'inégalité globale (4) dans le paragraphe 4.

§ 6. LES EQUATIONS DE MAXWELL ET LEURS POTENTIELS LOCAUX

Envisageons les équations de Maxwell dans $\Omega \times (-\infty,\infty) \ni (x,t)$, où Ω est l'ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

$$(M) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} E = 4\pi\rho & \text{(i)} \\ \operatorname{div} B = 0 & \text{(ii)} \\ \operatorname{rot} B - \frac{\partial}{\partial t}E = 4\pi \mathfrak{i} & \text{(iii)} \\ \operatorname{rot} E + \frac{\partial}{\partial t}B = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

Remarquons que (i) et (iii) entrainent

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{i} = 0 \qquad \text{(v)}$$

Rappelons la :

<u>Proposition</u> : Quand on considère le système (M) localement, c'est-à-dire au voisinage d'un point, qui ne contient par $\partial\Omega$, le problème (M) est équivalent au problème suivant :

$$
\text{(W)} \qquad \begin{cases} \square \emptyset = 4\pi \rho \\ \square A = 4\pi \mathbf{i} \ , \text{ telles que } \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0 \\ \dfrac{\partial \emptyset}{\partial t} + \operatorname{div} A = 0 \end{cases}
$$

Cet énoncé s'écrit simplement : $(M)_{loc} \Leftrightarrow (W)_{loc}$.

<u>Preuve</u> : D'après le théorème de Poincaré et ii) on peut trouver une fonction vectorielle A telle que <u>$B = \operatorname{rot} A$</u>. Et puis de (iv), on trouve une fonction $\emptyset$ telle que $E + \frac{\partial}{\partial t} A = -\operatorname{grad} \emptyset$, i.e. <u>$E = -\frac{\partial}{\partial t} A - \operatorname{grad} \emptyset$</u> .

Les équations (i) et (iii) s'écrivent

$$
(6.1) \qquad \operatorname{div}\left(-\frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{grad} \emptyset\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \emptyset - \Delta \emptyset - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} \emptyset + \operatorname{div} A\right) = 4\pi \rho
$$

$$
(6.2) \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t} A - \operatorname{grad} \emptyset\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A - \Delta A + \operatorname{grad}\left(\frac{\partial}{\partial t} \emptyset + \operatorname{div} A\right) = 4\pi \mathbf{i}
$$

Remarquons que l'on peut prendre $\{\emptyset, A\}$ telle que

$$
\text{(L)} \qquad \frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \operatorname{div} A = 0
$$

En effet si $\{\varphi_o, A_o\}$ vérifie (ii) et (iv), alors $\{\varphi_o - \frac{\partial \chi}{\partial t}, A_o + \operatorname{grad} \chi\}$ vérifie également (ii) et (iv). Par conséquent, on trouvera un couple $\{\varphi, A\} = \{\varphi_o - \frac{\partial \chi}{\partial t} , A_o + \operatorname{grad} \chi\}$ vérifiant (L), en choisissant χ telle que :

$$
\text{(I)} \qquad \square \chi = \frac{\partial \varphi_o}{\partial t} + \operatorname{div} A_o
$$

Si $\{\varphi_o, A_o\}$ vérifie (L), (I) s'écrit simplement $\square \chi = 0$. Par conséquent, le couple $\{\emptyset, A\}$ n'est pas déterminé par la condition (L).

En ce qui concerne la relation globale entre les problèmes (M) et (W), on peut avoir seulement $(W)_{glob.} \Rightarrow (M)_{glob.}$, c'est-à-dire, s'il y a une solution globale de (W), on peut construire la solution globale de (M) par : $B = \operatorname{rot} A$, et $E = -\frac{\partial}{\partial t} A - \operatorname{grad} \emptyset$. Mais on ne sait pas démontrer l'implication inverse sauf dans le cas où $C\Omega$ est vide.

§ 7. L'INTRODUCTION DES CONDITIONS AU BORD POUR LES POTENTIELS GLOBAUX

Si nous voulons construire les potentiels électromagnétiques globalement, il nous semble qu'il faut ajouter des conditions globales. En fait, si la solution de (W) est assez régulière jusqu'au bord, on a nécessairement la condition au bord $(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} A)\big|_{\partial\Omega} = 0$ grâce à (2). Cette condition est appelée la condition de Lorentz. Ce qui est important maintenant, c'est la réciproque :

Remarque : Si (W) a une solution $U = (\phi, A)$ régulière qui satisfait $(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} A)\big|_{\partial\Omega} = 0$ et si $e^{-\gamma t} U \in H^2(\Omega \times (-\infty, \infty))$, alors on a (L).

Preuve : En posant $v = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} A$ on a $\Box v = 0$ et $v\big|_{\partial\Omega} = 0$. Donc, d'après l'unicité du problème de Dirichlet, on a $v = 0$.

Et puis comme nous avons vu dans § 6, il y a encore l'indétermination (I). De manière heuristique, on doit ajouter une condition au bord pour lever cette indétermination. Remarquons que cette condition ajoutée disparaît quand on passe au problème (M), s'il y a unicité pour le problème au bord concernant (M).

§ 8. DES EXEMPLES

Nous montrons ici des exemples de problèmes pour le système des équations des ondes associé aux équations de Maxwell. On considère simplement dans l'espace $R \times R_+ \times R^2 \ni (t, x_1, x_2, x_3)$, $x_1 > 0$. Alors on peut dire que les exemples suivants sont L^2-bien posés, en ce sens que l'inégalité $(*)_s'$ est vérifiée :

Exemple 1 : Le problème $(P)_s$ avec

$$\sum_{j=o}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U = {}^t\Big(\sum_{j=o}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} u_j, p \frac{\partial}{\partial x_1} u_o + q \frac{\partial}{\partial x_o} u_1, \frac{\partial}{\partial x_2} u_o + \frac{\partial}{\partial t} u_2, \frac{\partial}{\partial x_3} u_o + \frac{\partial}{\partial t} u_3\Big)$$

qui correspond au problème (M) avec $e_2 = e_3 = 0$ au bord, par la relation $U = {}^t(u_o, u_1, u_2, u_3) = {}^t(\phi, A)$, $E = {}^t(e_1, e_2, e_3)$, c'est L^2-bien posé si $p \neq q$ et $pq \neq 0$.

Exemple 1' : Le problème $(P)_s$ avec $\sum_{j=o}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U$

$$= {}^t\Big(\sum_{j=o}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} u_j,\ \frac{\partial}{\partial x_1} u_1,\ \frac{\partial}{\partial x_2} u_o + \frac{\partial}{\partial t} u_2,\ \frac{\partial}{\partial x_o} u_o + \frac{\partial}{\partial t} u_3\Big) .$$

est aussi L^2- bien posé.

Exemple 2 : Le problème $(P)_s$ avec

$$\sum_{j=o}^{3} B_j \frac{\partial}{\partial x_j} U = {}^t\Big(\sum_{j=o}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} u_j,\ \frac{\partial}{\partial x_o} u_1,\ \frac{\partial}{\partial x_2} u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} u_2,\ \frac{\partial}{\partial x_1} u_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} u_1\Big)$$

qui correspond au problème (M) avec $b_2 = b_3 = 0$, $(B = (b_1, b_2, b_3))$, est aussi L^2-bien posé.

Preuve : Pour calculer plus facilement on pose

$$\mathcal{L}(\eta, z) = A(\eta)z + 2i\, B_1 - A(\eta) z^{-1} .$$

Alors la relation $(3)_s$ dans § 5 s'écrit :

$$(3)'_s \qquad \|\mathcal{L}^{-1}(\eta, z) B_1\| \le C \frac{|z|}{|\operatorname{Im} z|}, \text{ pour } \eta \in S^{n-1} \text{ et } z \in C_- .$$

Dans le cas des exemples 1 et 2, on a respectivement :

$$\mathcal{L}(\eta, z) = \begin{pmatrix} a & 2i & \eta_2 b & \eta_3 b \\ 2ip & qa & 0 & 0 \\ \eta_2 b & 0 & a & 0 \\ \eta_3 b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ où } a = z - z^{-1},\quad b = z + z^{-1} \quad (a^2 - b^2 = -4),$$

$$\mathcal{L}(\eta, z) = \begin{pmatrix} a & 2i & \eta_2 b & \eta_3 b \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_2 b & 2i & 0 \\ 0 & -\eta_3 b & 0 & 2i \end{pmatrix} .$$

Donc on peut montrer $(3)'_s$ par des calculs simples en remarquant qu'au voisinage de $z = \pm 1$, on a :

$$|a| \ge |\operatorname{Im} z| / |z| .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Agemi : On energy inequality of mixed problems for hyperbolic equations of second order, J. Fac Sci. Hokkaido Univ., 21, n°3, 4 (1971), 221-236 .

[2] L. Gårding : Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperbolique, Coll. sur e.d.p. du C.N.R.S (1956), 141-160.

[3] M. Ikawa : A mixed problem for hyperbolic equation of second order with first order derivative boundary condition, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 5 (1969), 119-147.

[4] H. O. Kreiss : Initial boundary problems for hyperbolic systems C.P.A.M. 23 (1970), 277-298.

[5] J. Leray : Hyperbolic equation, Princeton Lecture note, 1954.

[6] S. Miyataké : Mixed problems for hyperlolic equations of second order with first order complex boundary operators. Jap. J. of Math. New Series 1. (1) (1975), 111-158 .

[7] S. Miyataké : A sharp form of the existence theorem for hyperbolic mixed problems of second order. J. Math. Kyoto Univ., 17 (2) (1977), 199-223.

[8] S. Mizohata : Quelques problèmes aux bord du type mixte pour des équations hyperboliques, séminaire de J. Leray, Collège de France (1966-1967).

[9] R. Sakamoto : Mixed problem for hyperbolic equation I and II, J. Math. Kyoto Univ. 10 (1970) 349-373, 403-417.

[10] L. Gårding : Le problème de la dérivée oblique pour l'équation des ondes. C. R. Acad. Sc. 285 (1977), 773-775.

[11] V. M. Gordienko : Un problème mixte pour l'équation vectorielle des ondes. C. R. Acad. Sc., à paraître.

[12] W. Pauli : Electrodynamics Pauli lecture on Physics . Traduct. japonaise (1976).