

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. ALINHAC

M. S. BAOUENDI

## **Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1978-1979), exp. n° 22,  
p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1978-1979\\_\\_\\_A22\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979___A22_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS NULLES ET SINGULIÈRES  
POUR DES OPÉRATEURS DE TYPE PRINCIPAL

par S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI.

Exposé n° XXII

22 Mai 1979



Nous donnons dans cet exposé deux types de résultats dont les démonstrations détaillées paraîtront ultérieurement .

Dans la suite  $P(x,D)$  désignera un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients  $C^\infty$  définis dans  $\Omega$ , voisinage ouvert de l'origine dans  $R^n$ . Son symbole principal est noté  $p(x,\xi)$ .

Le premier résultat est une généralisation au cas où les coefficients sont  $C^\infty$  (au lieu d'être analytiques) des théorèmes 2 et 2' de [1]. Soient  $M$  une variété et  $S$  une hypersurface, toutes les deux  $C^\infty$ , satisfaisant

$$0 \in M \subset S \subset \Omega .$$

On pose :

$$\Sigma = N^*(S)|_M \quad A = \text{Re } p \quad B = \text{Im } p ;$$

$H_A$  désignera le champ hamiltonien de  $A$ .

Théorème 1 : On suppose :

- i) Pour tout  $\gamma \in \Sigma$ , la projection de  $H_A(\gamma)$  n'est pas tangente à  $M$ ,
- ii) Il existe un entier impair  $k \geq 1$  satisfaisant

$$A|_\Sigma = H_A^j B|_\Sigma = 0 \quad \text{pour } 0 \leq j < k \quad \text{et} \quad H_A^k B|_\Sigma \neq 0 ,$$

- iii) Pour tout  $\gamma \in \Sigma$  et tout  $j$ ,  $0 \leq j < \frac{k-1}{2}$ ,  $H_A^j(\gamma)$  est engendré par

$H_A(\gamma)$  et l'espace tangent de  $\Sigma$  au point  $\gamma$ .

Alors il existe  $U \subset \Omega$ , voisinage ouvert de  $0$ , et deux fonctions  $a$  et  $u \in C^\infty$  dans  $U$ , plates sur  $U \cap M$ ,  $u \neq 0$  dans  $U \setminus M$ , telles que

$$Pu + au = 0 \quad \text{dans } U .$$

Théorème 1' : Sous les hypothèses du théorème 1, pour tout entier  $\ell \geq m$  il existe  $U \subset \Omega$ , voisinage ouvert de  $0$ ,  $u \in C^\ell(U)$ , ( $u$  n'étant  $C^{\ell+1}$  au voisinage d'aucun point de  $U \cap M$ ),  $a \in C^\infty(U)$  tels que

$$au \in C^\infty(U) \quad \text{et} \quad Pu + au = 0 \quad \text{dans } U .$$

Remarque 1 : Notons que si les coefficients de P et les variétés M et S sont analytiques il est démontré dans [1] que l'on peut prendre  $a \equiv 0$  dans les conclusions des théorèmes 1 et 1'. En général, il n'en est pas ainsi dans le cas des coefficients  $C^\infty$  comme le montre l'exemple suivant. Soit L l'opérateur de Hans Lewy dans  $\mathbb{R}^3$

$$L = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + ix_2)D_3$$

Il est bien connu (voir Hörmander [3]) qu'il existe une fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  telle que la seule solution  $C^1$  de

$$Pu = Lu + fu = 0$$

est la solution triviale. Pour cet opérateur P les hypothèses des théorèmes 1 et 1' sont satisfaites avec M réduit par exemple à l'origine. On ne peut donc prendre  $a \equiv 0$  dans les conclusions de ces théorèmes. Des exemples similaires peuvent être obtenus à partir des opérateurs du premier ordre dont les seules solutions sont les constantes, donnés par Nirenberg [5].

Nous passons maintenant au deuxième type de résultat de nature différente des théorèmes 1 et 1'.

Théorème 2 : On suppose :

i) Il existe  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ , réelle satisfaisant

$$p(x, \nabla\varphi) = 0 \text{ et } X = p'_\xi(x, \nabla\varphi) \cdot \partial_x \neq 0 ,$$

ii) Il existe  $\psi \in C^\infty(\Omega)$ , réelle  $\psi(0) = 0$   $\nabla\psi \neq 0$ , et des constantes  $C > 0$ ,  $\alpha \in [0, \infty[$  telles que pour tout  $x \in \Omega$

$$|p(x, \nabla\psi(x))| \geq C |\psi(x)|^\alpha ,$$

iii)  $X\psi = 0$  dans  $\Omega$ .

Alors il existe  $U \subset \Omega$ , voisinage de 0, et deux fonctions  $a$  et  $u$   $C^\infty$  dans  $U$  avec  $\text{supp } u = U \cap \{\psi \geq 0\}$ ,  $\text{supp } a \subset U \cap \{\psi \geq 0\}$ , et telles que :

$$Pu + au = 0 \text{ dans } U .$$

Exemple : Soit  $P$  l'opérateur des ondes dans  $\mathbb{R}^3$

$$P = D_{X_3}^2 - D_{X_1}^2 - D_{X_2}^2 .$$

Il est immédiat de vérifier que le théorème 2 s'applique en prenant

$$\varphi = X_3 + X_1 \text{ (donc } X = 2(\partial_{X_3} - \partial_{X_1})) \text{ et } \psi = X_2 .$$

Idée de la démonstration des Théorèmes 1 et 1'

Après un changement convenable de coordonnées on peut supposer que les variables de  $\mathbb{R}^n$  sont  $(x, t, y) = (x_1, \dots, x_r, t, y_1, \dots, y_\ell)$  avec  $r + 1 + \ell = n$ ,  $r \geq 1$ . Dans ces coordonnées  $S$  est définie par  $x_1 = 0$  et  $M$  par  $x = 0$  et  $t = 0$ .  $\Sigma$  est alors donnée par

$$x = 0, t = 0, \eta = 0, \xi' = (\xi_2, \dots, \xi_r) = 0, \tau = 0.$$

Grâce à i) on peut supposer que l'on a

$$\partial_\tau p|_\Sigma \neq 0.$$

Le point essentiel de la démonstration est la construction d'une fonction  $C^\infty \phi$  "presque caractéristique" pour  $P$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$p(x, t, y, \nabla \phi) = O(t^N) \text{ pour tout } N > 0.$$

et satisfaisant les deux propriétés suivantes :

$$(1) \quad M = \{\phi = 0\}$$

$$(2) \quad \operatorname{Re} \phi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \phi \geq K(|x|^2 + t^{k+1}) \quad (K > 0) .$$

L'invariance des propriétés i) ii) et iii) par multiplication par un symbole non nul est cruciale ici, elle est démontrée dans [1] même dans le cas des coefficients  $C^\infty$ .

On construit  $u$  par un développement asymptotique de la forme

$$u(x, t, y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} E_j(\phi(x, t, y)) u_j(x, t, y)$$

avec  $\frac{d}{dz} E_j(z) = E_{j-1}(z)$  et, dans le cas du théorème 1 ,

$$E_0(z) = e^{-\frac{1}{z^{1/5}}}.$$

(Notons que (2) implique que  $E_0(\phi)$  est  $C^\infty$  et est plate sur  $M$ ). Dans le cas du théorème 1' on prend  $E_0(z) = z^{\ell+1/2}$ . Les  $u_j$  sont déterminées par les équations de transport habituelles.

Le reste de la démonstration se fait alors sans grande difficulté.

### Idée de la démonstration du théorème 2

Après un changement convenable de coordonnées, on peut supposer que les variables de  $\mathbf{R}^n$  sont

$$(t, y) = (t, y_1, \dots, y_{n-1})$$

et que l'on a

$$\psi(t, y) = t \quad \text{et} \quad X = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

$P$  s'écrit alors

$$P(t, y, D_t, D_y) = q(t, y) D_t^m + \sum_{\substack{|\gamma|+j \leq m \\ 0 \leq j < m}} q_{\gamma, j}(t, y) D_y^\gamma D_t^j.$$

La condition ii) implique que l'on a

$$|q(t, y)| \geq C|t|^\alpha.$$

Alors que la fonction phase  $\phi$  a joué le rôle crucial dans la démonstration du théorème 1, ici la fonction phase réelle  $\varphi$  ne servira qu'à réduire  $P$  à son équation de transport. Une construction plus minutieuse à la Cohen [2] (voir Hörmander [3], [4]) est alors utilisée pour obtenir les fonctions  $a$  et  $u$ .

On cherche d'abord une solution approchée de  $Pf = 0$  par la méthode de l'optique géométrique sous la forme

$$f \sim e^{i\tau\varphi} \left( b_0 + \frac{b_1}{\tau} + \frac{b_2}{\tau^2} + \dots \right),$$

les  $b_j$  étant données par les équations de transport habituelles. En fait on prend  $b_0$  dépendant du grand paramètre  $\tau$  comme suit :

On pose  $\tau = \delta^{-2\rho}$  ( $\delta$  petit et  $\rho > 0$  fixé) et on prend  $b_0(t, y, \delta) = c_0(t, y) e^{\hat{\varphi}(t, \delta)}$  avec  $c_0(0, 0) \neq 0$  et

$$\hat{\varphi}(t, \delta) = -\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^4} \theta\left(\frac{t-\delta}{\delta^2}\right)(t-\delta)$$

où  $\theta \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\theta(s) = 1$  pour  $s \geq \frac{1}{8}$  et  $\theta(s) = -\frac{1}{2}$  pour  $s \leq -\frac{1}{8}$ .

On pose aussi

$$b_j = c_j e^{\hat{\varphi} \tau^{j/2}}.$$

Il est alors assez facile de construire une fonction  $c(t, y, \delta)$  ayant le développement asymptotique

$$c \sim \frac{1}{c_0} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \delta^{j\rho} \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0.$$

(En fait  $c$  est  $C^\infty$  des variables  $t, y, \delta$  et de  $\frac{t-\delta}{\delta^2}$ ). En posant

$$v(t, y, \delta) = e^{i\delta^{-2\rho}\varphi(t, y)} e^{\hat{\varphi}(t, \delta)} c_0(t, y) (1 + c(t, y, \delta)),$$

on obtient finalement :

$$(3) \quad Pv = rv$$

où  $r$  est  $C^\infty$  de  $(t, y, \delta)$ , plate en  $\delta = 0$ .

Maintenant la construction de  $u$  se fait grosso modo comme suit. S'inspirant de [2] la première idée et de poser

$$v_k(t, y) = v\left(t, y, \frac{1}{k}\right) \quad \text{pour } \frac{1}{k+1} < t < \frac{1}{k-1},$$

(en fait on ramène  $v_k$  d'une manière  $C^\infty$  à être nulle au voisinage des points  $\frac{1}{k+1}$  et  $\frac{1}{k-1}$ ) et de prendre



$$u = \sum_{k=k_0}^{\infty} v_k .$$

Là où  $|v_k| = |v_{k+1}|$  ou bien  $|v_k| = |v_{k-1}|$ ,  $u$  est susceptible de s'annuler il faudrait alors s'assurer que  $Pu$  soit suffisamment nulle en ces points pour que l'on ait  $\frac{Pu}{u}$  de classe  $C^\infty$ . Ceci nous oblige à modifier un peu la fonction  $v$  satisfaisant (3), ce qui se fait à l'aide du théorème de prolongement de Whitney appliqué dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  aux surfaces  $\delta = 0$ , ainsi qu'à celles définies par

$$|v(t, y, \delta)| = |v(t, y, \frac{\delta}{\delta+1})|$$

$$|v(t, y, \delta)| = |v(t, y, \frac{\delta}{1-\delta})| .$$

La démonstration du théorème se termine en vérifiant que la fonction  $a = \frac{Pu}{u}$  vérifie bien les propriétés annoncées !

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Baouendi, F. Trèves and E. C. Zachmanoglou : Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients. A paraître. Duke Journal (1979).
  - [2] P. Cohen : The non-uniqueness of the Cauchy problem O. N. R. Techn. Report 93, Stanford (1960).
  - [3] L. Hörmander : Linear partial differential operators. Springer Verlag (1963).
  - [4] L. Hörmander : Non-uniqueness for the Cauchy problem. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag n° 459, Fourier integral operators and PDE's (1975) p.36-72.
  - [5] L. Nirenberg : Lectures on linear partial differential equations. C. B. M. S. Amer. Math. Soc. n° 17 (1970).
-