SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. C. NOSMAS

Paramétrix du problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques à caractéristiques réelles involutives de multiplicité variable

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1978-1979____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 8 - 1 9 7 9

Paramétrix du problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques à caractéristiques réelles involutives de multiplicité variable.

par J. C. NOSMAS

Exposé n° VIII   19 Décembre 1978

§ 1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner la construction d'une paramétrix du problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques à caractéristiques réelles involutives de multiplicité variable ; classe pour laquelle on sait, a priori, que le problème de Cauchy est bien posé.

Par soucis de clarté, nous nous contenterons de décrire nos résultats dans un cas simple et indiquerons brièvement les résultats plus généraux que nous obtenons par une méthode analogue . (Pour plus de détails nous renvoyons à [19].

Nous nous intéressons aux systèmes 2×2 dans $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_{x_o} \times \mathbb{R}^n_x$ qui s'écrivent

1.1 $$P(\bar{x},\bar{D}) = D_o I - \begin{pmatrix} A_1(\bar{x},D) & 0 \\ 0 & A_2(\bar{x},D) \end{pmatrix} + Q(\bar{x},D)$$

où A_i est un opérateur pseudo-différentiel classique, d'ordre 1 en x, qui dépend régulièrement de x_o, Q une matrice 2×2 d'opérateurs pseudo-différentiels classiques, d'ordre 0 en x, qui dépendent régulièrement de x_o.

Nous supposons que le symbole principal homogène a_i de A_i est une fonction à valeurs réelles, indépendante de $\bar{x}$, pour $\bar{x}$ hors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ et que

Condition (I) : Si $\lambda_i = \xi_o - a_i(\bar{x},\xi)$, il existe h_1 et h_2 deux fonctions C^∞, homogène de degré 0 en $\bar{\xi}$, telles que

1.2 $$\{\lambda_1,\lambda_2\} = h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2$$

Pour décrire nos résultats, nous avons besoin de la

Proposition 1.1 : Sous la condition (I), il existe

1) une fonction α dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n+2}_{z,\bar{x}} \times \mathbb{R}^{n*}_{\xi})$, homogène de degré 0 par rapport à ξ, telle que les fonctions

$$t_1(z,\bar{x},\bar{\xi},\zeta) = \lambda_1(\bar{x},\bar{\xi}) + \zeta$$

$$t_2(z,\bar{x},\bar{\xi},\zeta) = \lambda_2(\bar{x},\bar{\xi}) - \alpha(z,\bar{x},\xi)\zeta$$

soient en involution sur $\{t_1 = t_2 = 0\}$ avec dt_1 et dt_2 indépendants

2) une fonction Φ, solution locale au voisinage de $\{z = x_o = 0\}$ de

1.3
$$\begin{cases} t_i(z,\bar{x},d_{z,\bar{x}}\Phi) = 0 & i = 1,2 \\ \Phi|_{z=x_o=0} = x\cdot\eta \end{cases}$$

en outre, elle vérifie

1.4
$$\Phi|_{z=x_o} = \varphi_1, \quad \Phi|_{z=-x_o} = \varphi_2$$

où les fonctions φ_i sont les solutions locales (en voisinage de $x_o = 0$) de

1.5
$$\begin{cases} \lambda_i(\bar{x},d_{\bar{x}}\varphi_i) = 0 \\ \varphi_i|_{x_o=0} = x\cdot\eta \end{cases}$$

Les phases φ_i et Φ engendrent localement les relations canoniques C_i et C.

<u>Théorème 1.2</u> : Sous la condition (I), il existe E_i dans $\mathcal{J}^{-1/4}(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}^n;C_i')$ et F_i dans $\mathcal{J}^{-1/2}(\mathbb{R}^{n+2}_{z,\bar{x}},\mathbb{R}^n,C')$ tels que

$$\mathcal{C} = \pi_1 E_1 + \pi_2 E_2 + \int_{-x_o}^{+x_o}(\pi_1 F_1 + \pi_2 F_2)dz$$

est solution de

1.6
$$\begin{cases} P\,\mathcal{C} \equiv 0 \\ \gamma_o\mathcal{C} \equiv \mathrm{Id} \end{cases}$$

où $\mathcal{J}^{\cdot}(\ )$ désigne les matrices 2×2 à coefficients dans $I^{\cdot}(\ )$ et $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous en déduisons la description suivante des singularités des solutions du problème de Cauchy .

Soit :

1.7 $\Sigma = \{(\bar{x},\bar{\xi};y,\eta) \in T_o^*\mathbb{R}^{n+1} \times T_o^*\mathbb{R}^n /$ en $(0,y,\eta) = a_2(0,y,\eta)$; il existe
$s,t \in \mathbb{R}$ tels que $s+t = x_o$, $st \geq 0$ et
$(\bar{x},\bar{\xi}) = F_1^t\, F_2^s((0,y,\eta);a_1(0,y,\eta),\eta))\ \}$

où $F_i^{\cdot}$ désigne le flot du champ hamiltonien H_{λ_i} .

Théorème 1.3 : Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})^2$ telle que $Pu \in C^\infty$, alors nous avons l'inclusion

1.8 $$WF(u) \subset [C_1 \circ WF(\gamma_o u)] \cup [C_2 \circ WF(\gamma_o u)] \cup [\Sigma \circ WF(\gamma_o u)]$$

où $\gamma_o u$ désigne la trace de u sur $\{x_o = 0\}$.

§ 2. REMARQUES ET EXEMPLES

Remarque 2.0 : La condition (I) est satisfaite si $a_1 - a_2$ ne s'annule pas; autrement dit , notre construction redonne la construction d'une paramétrix pour des systèmes analogues au système 1.1 à caractéristiques de multiplicité constante.

Remarque 2.1 : De même, nous obtenons par cette méthode la construction d'une paramétrix du problème de Cauchy pour des opérateurs scalaires du type de Weierstrass, bien décomposables qui satisfont la condition (I), i.e. les opérateurs qui s'écrivent

2.1 $$R(\bar{x},\bar{D}) = (D_o - A_1)(D_o - A_2) + B_1(D_o - A_1) + B_2(D_o - A_2) + C$$

où plus généralement

2.2 $$R(\bar{x},\bar{D}) = \Lambda^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} A_\beta \Lambda^\beta$$

avec $\Lambda_j = D_o - A_j(\bar{x},D)$

Remarque 2.2 : Nous ne faisons aucune hypothèse sur l'indépendance linéaire des champs hamiltoniens H_{λ_1} et H_{λ_2} ; en ce sens nous généralisons les constructions de S. Alinhac [1] et de G. A. Uhlmann ([22] et [23]) à des opérateurs qu'on ne peut pas "modèliser" plus avant .

Remarque 2.3 : Le théorème 1.3 résulte d'une étude grossière des singularités des termes complémentaires : "$\int_{-x_0}^{x_0} \ldots dz$. Dans le cas scalaire, pour des opérateurs du type 2.2, B. Helffer [6] et R. Lascar [13] obtiennent des résultats de propagation de singularités plus précis.

Exemples d'opérateurs scalaires du type 2.1

(i) $P(\bar{x},\bar{D}) = (D_o - a_1(D))(D_o - a_2(D)) + r(\bar{x})$

(2i) $P(\bar{x},\bar{D}) = (D_o - f(x)D_x)(D_o + f(x)D_x) + q(\bar{x})$

(3i) $P(\bar{x},\bar{D}) = D_o(D_o - f(x)\, e^{g(x_o,x)} D_x) + r(\bar{x})$

§ 3. CONSTRUCTION D'UNE PARAMETRIX (Esquisse)

Démonstration de la proposition 1.1 : Comme $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ est indépendant de ξ_o, en regardant l'identité 1.2 au point $\xi_o = a_2(\bar{x},\xi)$, il vient

3.1 $$\{\lambda_1,\lambda_2\} = h_1(\bar{x}, a_2(\bar{x},\bar{\xi}),\xi)(a_2 - A_1) = \ell(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Pour déterminer α, nous résolvons

3.2 $$\{t_1,t_2\} = \ell(t_1 - t_2)$$

équation équivalente à

3.3 $$-\{t_1,\alpha\} = \ell(\alpha+1)$$

Comme le champ H_{t_1} est transverse à $z + x_o = 0$, nous prenons pour α l'unique solution de

3.4 $$\begin{cases} -\{t_1,\alpha\} = \ell(\alpha+1) \\ \alpha|_{z+x_o=o} = 1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : $\alpha+1$ solution d'une équation différentielle homogène, ne s'annule en aucun point ; en conséquence dt_1 et dt_2 sont linéairement indépendants. L'existence de la phase Φ résulte du Th. 3.6.3 (Duistermaat [4]) .

<u>Fin de la construction</u> : A priori $\mathcal{C} = \pi_1 E_1 + \pi_2 E_2 + \int_{-x_o}^{+x_o} (\pi_1 F_1 + \pi_2 F_2) dz$

les opérateurs E_i sont solution de

3.5 $$\begin{cases} \Lambda_i E_i + Q\pi_i E_i \equiv 0 \\ \gamma_o E_i \equiv Id \end{cases}$$

Un calcul élémentaire, montre que

3.6 $$P\int_{-x_o}^{+x_o} \pi_1 F_1 \, dz = 2/i(\pi_1 F_1)\big|_{z+x_o=0} + \int_{-x_o}^{+x_o} (\pi_1 T_1 + R_1) F_1 \, dz$$

avec $T_1(z,\bar{x},D_z,D_{\bar{x}}) = D_o - A_1 + D_z$

3.7 $$P\int_{-x_o}^{+x_o} \pi_2 F_2 dz = \frac{1}{i}((1+\alpha(z,\bar{x},D))\pi_2 F_2\big|\big|_{z-x_o=0} + \int_{-x_o}^{+x_o} (\pi_2 T_2 + R_2) F_2 dz$$

avec

$$T_2(z,\bar{x},D_z,\bar{D}) = D_o - A_2(\bar{x},D) - D_z(\alpha(z,\bar{x},D))$$

Enfin :

3.8 $$P\pi_1 E_1 = \pi_2 \Lambda_1 E_1$$

$$P\pi_2 E_2 = \pi_1 \Lambda_2 E_2$$

En conséquence F_1 et F_2 doivent satisfaire les équations

3.9 $$\begin{cases} (\pi_1 T_1 + R_1) F_1 + (\pi_2 T_2 + R_2) F_2 \equiv 0 \\ 2/i \quad F_1\big|_{z+x_o=0} \equiv \Lambda_2 E_2 \\ \frac{1}{i}(1+\alpha(x_o,x_o,x,D))(F_2\big|_{z-x_o=0}) \equiv \Lambda_1 E_1 \end{cases}$$

équations que nous résolvons en imposant la condition supplémentaire

3.10 $$T_1F_1 \equiv T_2F_2$$

Ce qui équivaut, au niveau des symboles principaux homogènes à résoudre un problème de Cauchy avec données initiales sur des hypersurfaces caractéristiques (cf. [1] par exemple).

§ 4. GENERALISATION A LA MULTIPLICITE QUELCONQUE

Nous nous intéressons aux systèmes du type

4.1 $$P(\bar{x},\bar{D}) = D_o I - Q(\bar{x},D)$$

où Q est une matrice $N \times N$ d'opérateurs pseudo-différentiels classiques du 1er ordre en x, qui dépendent régulièrement de x_o.

Nous supposons que Q vérifie les conditions suivantes.

<u>Condition</u> (S) : Le symbole principal homogène q de Q est uniformément symétrisable et ses valeurs propres a_j ($j = 1,\ldots,k+1$), de multiplicité minimale m_j, sont des fonctions C^∞, positivement homogènes de degré 1 par rapport à ξ, qui vérifient

4.2 $$a_j(\bar{x},\xi) = a_j(\xi)$$

pour $\bar{x}$ hors d'un compact

<u>Condition</u> (I) : Si $\lambda_i = \xi_o - a_i$, il existe des fonctions h_{ij} C^∞, homogènes de degré 0 par rapport à ξ, telles que

4.3 $$\{\lambda_i,\lambda_j\} = h_{ij}\lambda_j + h_{ji}\lambda_i$$

Notons $s(\bar{x},\bar{\xi})$, la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de $p(\bar{x},\bar{\xi})$. A priori, nous savons que $s(\bar{x},\bar{\xi})$ est divisible par $(\xi_o - a_j)^{m_j-1}$; posons 4.4, $s_j(\bar{x},\bar{\xi}) = s(\bar{x},\bar{\xi})(\xi_o - a_j)^{1-m_j}$.

<u>Condition</u> (D) : $S_i\ (\bar{x},a_i(\bar{x},\xi),\xi)$ est divisible par $\prod_{j\neq i}(a_j - a_i)^{m_j}$, pour tout $i = 1\ldots k+1$.

<u>Remarque 4.1</u> : La condition (D) est satisfaite, si $q(\bar{x},\xi)$ est uniformément diagonalisable.

Remarque 4.2 : Cette condition est, en pratique, aisément vérifiable et on peut montrer qu'elle est vérifiée sous certaines hypothèses sur la "géométrie" de l'ensemble des points où la multiplicité des caractéristiques change. En particulier, dans le cas où deux valeurs propres a_1 et a_2 peuvent coïncider (les autres sont distinctes) ; si $a_1 - a_2 = \alpha f_1^{m_1} \dots f_p^{m_p}$ où f_i sont des équations d'hypersurfaces, alors la condition (D) est satisfaite.

Sous les conditions (S) (I) et (D), par des techniques analogues à celles développées dans le paragraphe 3, nous construisons une paramétrix du problème de Cauchy relatif à l'opérateur P et en déduisons une description des singularités de la solution semblable au théorème 1.3. Pour plus de détails, nous renvoyons à [19].

Remarque 4.1 : Terminons en indiquant, comment, la construction locale que nous avons exposée peut se globaliser. En utilisant des arguments analogues à ceux qui sont dévéloppés dans [2] et [4], il est facile de voir que, sous nos hypothèses, les relations C_i et C sont définies globalement; les équations de transport que nous obtenons (système 3.9, 3.10) sont définies globalement de manière intrinsèque. Comme dans [16], nous sommes alors en mesure de définir globalement les opérateurs dont nous avons donné une définition locale .

REFERENCES

[1] S. Alinhac : A class of hyperbolic operators with double involutive characteristics of Fuchsian type. C.P.D.E., vol.3 n° 10 (1978).

[2] J. Chazarain : Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante. Ann. Inst. Fourier 24 (1974).

[3] Y. Demay : Paramétrix pour des systèmes hyperboliques du 1er ordre à multiplicité constante. J. Math.Pures et appliquées 56 (1977)

[4] J. J. Duistermaat : Fourier integral operators. Courant Institute of Math. Sciences, N. Y. University (1973).

[5] J. J. Duistermaat et L. Hörmander : Fourier integral operators II. Acta Math. 128 (1972)

[6] B. Helffer : Addition de variables et application à la régularité. Ann. Inst. Fourier 28 (1978).

[7] L. Hörmander : Fourier integral operators I. Acta Math. 127 (1971).

[8] L. Hörmander : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics. J. Anal. Math. Israel (1978)

[9] V. Ia Ivrii : On wave fronts of solutions of the system of crystal optics. Sov. Math. Dokl. , vol. 18, n°1 (1977).

[10] V. Ia Ivrii : Wave fronts of solutions of some hyperbolic equations and conical refraction. Sov. Math. Dokl. vol. n° 1 (1976).

[11] T. Kawai et G. Nakamura : Microlocal properties of local elementary solutions for Cauchy problems for a class of hyperbolic linear differential operators. R.I.M.S., vol. 14, n°2 (1978).

[12] H. Kumano-Go, K. Taniguchi et Y. Tozaki : Multiproducts of phase functions for Fourier integral operators with an application. C.P.D.E. (Janvier 1978).

[13] R. Lascar : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques de multiplicité variable (à paraître).

[14] D. Ludwig et B. Granoff : Propagation of singularities along characteristics with non uniform multiplicity. J. of Math. Anal. and Appl., n° 21 (1968).

[15] Nakamura : The singularities of solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristics roots are non uniform multiple. R.I.M.S. vol. 13 (1977).

[16] R. B. Melrose et G. A. Uhlmann : Lagrangian intersection and the Cauchy problem. Courant Institute. Preprint (Mai 1978).

[17] L. Nirenberg : Pseudo-differential operators. Proceedings of symposia in pure mathematics, Vol. XVI, p.148.

[18] J. C. Nosmas : Note aux C. R. A. S., t. 285 (19 Dec. 1977). Série A, p.1065.

[19] J. C. Nosmas : Paramétrix du problème de Cauchy pour une classe de systèmes hyperboliques symétrisables à caractéristiques involutives de multiplicité variable. Note aux C. R. Acad. Sc. (à paraître) et article (à paraître).

[20] J. Sjöstrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics. Ann. Inst. Fourier, Tome XXVI, Fasc. 1 (1976).

[21] G. A. Uhlmann : Pseudo-differential operators with involutive double characteristics. C. P. D. E., vol.2, n°7 (1977).

[22] G. A. Uhlmann : The Cauchy problem for hyperbolic operators with double characteristics. Courant Institute. Preprint (Mai 1978).

[23] G. A. Uhlmann : Paramérices for operators with multiple involutive characteristics. Preprint (Octobre 1978).

[24] M. Zeman : C.P.D.E., vol. 2, n° 3 (1977).