

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A. GRIGIS

## Propagation des singularités au bord d'ouverts de $C^n$

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1979-1980), exp. n° 15,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1979-1980\\_\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A16_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 9 - 1 9 8 0

PROPAGATION DES SINGULARITES

AU BORD D'OUVERTS DE  $\mathbb{C}^n$

par A. GRIGIS



Le but de l'exposé est de décrire quelques phénomènes de propagation des singularités en analyse complexe. Le théorème central utilisé (théorème 2) est une extension à des systèmes du résultat [10] sur des opérateurs pseudo-différentiels (scalaires) à caractéristiques doubles, qui a fait l'objet d'une conférence à Saint Cast en 1979. Nous nous intéressons aux singularités des solutions du problème  $\bar{\partial}$ -Neumann ou du laplacien induit  $\square_b$  au bord d'ouverts de  $\mathbb{C}^n$  où la forme de Levi garde un rang constant. On peut rapprocher nos résultats de questions posées par J. J. Kohn [13]. On trouvera des démonstrations complètes dans un article à paraître.

§ 1. RAPPELS SUR LE PROBLEME DE  $\bar{\partial}$ -NEUMANN

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}^n$ . On appellera  $X$  le bord de  $\Omega$  et on supposera  $X$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Localement  $\Omega$  est défini par une inégalité  $\rho < 0$  et

$$X = \{ \rho = 0 \}$$

où  $\rho$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  réelle dont la différentielle est non nulle au voisinage de  $X$ .

La forme de Levi associée à  $\rho$ , au point  $x_0 \in X$ , est la forme hermitienne

$$\mathcal{L}_{(x_0)}(h) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{\partial^2 \rho(x_0)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} h_j \bar{h}_k \quad h \in T'_{x_0}$$

sur l'espace complexe des vecteurs holomorphes tangents à  $X$  en  $x_0$  ( $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_0) h_j = 0$ ).

Une  $(0, q)$ -forme sur  $\Omega$  s'écrit

$$u = \sum_{|J| = q} u_J d\bar{z}_J \in \Lambda^{0, q}$$

avec  $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$   $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$ .

L'opérateur  $\bar{\partial} : \Lambda^{0, q} \rightarrow \Lambda^{0, q+1}$  s'écrit :

$$\bar{\partial} u = \sum_{|J|=q} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_J}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_J .$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux  $(0,q)$ -formes à coefficients  $L^2$  on pose

$$(u,v)_0 = 2^q \sum_{|J|=q} \int_{\Omega} u_J \bar{v}_J \, dx \, dy$$

On note  $\bar{\partial}^*$  l'adjoint formel de  $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial}^* : \Lambda^{0,q+1} \rightarrow \Lambda^{0,q}$$

et on forme le laplacien  $\square = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ , qui est un système d'opérateurs différentiels, diagonal et elliptique

$$\square u = - \frac{1}{2} \sum_{|J|=q} \Delta u_J \, d\bar{z}_J$$

Le problème de  $\bar{\partial}$ -Neumann ([7]) est le problème aux limites suivant :

Etant donné  $f \in \Lambda^{0,q}$  trouver  $u \in \partial^{0,q}$  solution de

$$(\bar{\partial} - N) \quad \begin{cases} \square u = f \\ u \in \mathfrak{D}(\bar{\partial}^*) \\ \bar{\partial}u \in \mathfrak{D}(\bar{\partial}^*) \end{cases}$$

Les conditions aux limites peuvent s'exprimer autrement. Si  $\sigma(\bar{\partial}^*)(x, d\rho)$  est la matrice valeur au point  $(x, d\rho) \in \mathbb{T}_X^*$  du symbole de  $\bar{\partial}^*$  elles s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma(\bar{\partial}^*)(x, d\rho) u = 0 \\ \sigma(\bar{\partial}^*)(x, d\rho) \bar{\partial}u = 0 \end{cases} \quad \text{sur } X .$$

Si  $\bar{\partial}f = 0$  et si  $f$  est orthogonale aux formes harmoniques,  $v = \bar{\partial}^* u$  est la solution minimale dans  $L^2$  de  $\bar{\partial}v = f$ .

La question est la régularité jusqu'au bord de la solution de  $(\bar{\partial}-N)$ , elle a été beaucoup étudiée. Donnons quelques résultats connus, en nous limitant au cas pseudoconvexe (la forme de Levi est positive) pour simplifier.

- 1) Si en un point  $x_0 \in X$  la forme de Levi a  $r$  valeurs propres  $> 0$ , alors  $(\bar{\partial}-N)$  est  $\frac{1}{2}$  sous-elliptique au voisinage de  $x_0$  dans les  $(0,q)$ -formes si  $q > n-1-r$  (voir par exemple Hörmander [11]).
- 2) Si  $C$  est une variété complexe de dimension  $d$  passant par  $x_0$  et contenue dans le bord, alors  $(\bar{\partial}-N)$  n'est pas hypoelliptique au voisinage de  $x_0$  dans les  $(0,q)$ -formes  $q \leq d$  (d'après les résultats de [13],[6],[4]).

Les conditions sur  $q$  qui interviennent dans 1) et 2) sont des expressions de la condition  $Z(q)$  (ou non  $Z(q)$ ) usuelle. Les résultats connus sont bien plus avancés : pour le 1) étude de la  $\varepsilon$ -sous-ellipticité ( $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ) et pour le 2) utilisation de la dimension holomorphe mais nous voulons seulement donner une idée (voir M. Derridj [5] ou la bibliographie de [13]).

Nous nous intéressons aux résultats négatifs (comme en 2) et plus précisément au lieu des singularités des solutions (éventuelles) de  $(\bar{\partial}-N)$ .

Conjecture 1 : Soit  $V$  un voisinage de  $x_0 \in X$  et  $C$  une variété complexe, passant par  $x_0$  et contenue dans  $X$ . Soit  $f$  une  $(0,q)$  forme  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\bar{\Omega} \cap V$ . Si  $u$  est une solution de  $(\bar{\partial}-N)$  et  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $u$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de la composante connexe de  $C \cap V$  qui contient  $x_0$  (réciproquement si  $u$  est singulière en  $x_0$  elle est singulière sur  $(C \cap V)_{x_0}$ ).

Dans un langage moins précis on dit que les singularités se propagent le long de la sous-variété  $C$ . Cette expression n'a pas le même sens que celui donné par J. J. Kohn [13] ou K. Diederich, P. Pflug [6].

Pour étudier  $(\bar{\partial}-N)$  on se ramène au bord. L'étude de la régularité pour ce problème est équivalente à celle pour un système d'opérateurs pseudodifférentiels sur le bord (voir Trèves [19], Øvrelid [14], Greiner-Stein [9], Tartakoff [18] ou encore Hörmander [12]).

Ce système  $\mathcal{B}$  est de degré 1, à caractéristiques doubles, très lié à  $\square_b$ .

$$\square_b = \bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b$$

$\bar{\partial}_b$  : opérateur de Cauchy-Riemann induit sur  $X$

$\bar{\partial}_b^*$  : adjoint formel de  $\bar{\partial}_b$ .

Le système  $\square_b$  est à caractéristiques doubles sur  $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$  avec

$$\Sigma^\pm = \{(x, \lambda \tau), x \in X, \lambda \in \mathbb{R}^\pm, \tau = i(\bar{\partial} - \partial) \rho|_X\}$$

( $\Sigma$  est donc un fibré en droites sur  $X$ ).

$\mathcal{B}$  est elliptique hors de  $\Sigma^+$ , et sur  $\Sigma^+$ ,  $\mathcal{B}$  a les mêmes invariants que  $\square_b$  (à la multiplication par un O.P.D. elliptique près). Ces invariants seront précisés pour  $\square_b$  au paragraphe 4.

§ 2. HYPERSURFACES FEUILLETEES

Soit  $X$  l'hypersurface de  $\mathbb{C}^n$  constituée par le bord de  $\Omega$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Dans toute la suite on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 01 : On suppose que dans  $V \cap X$ , la forme de Levi garde un rang constant  $r$ .

Pour éviter les trivialités on supposera  $r < n-1$ . ( $\Omega$  non strictement pseudoconvexe).

Proposition 1 : (voir par exemple Freemann [8] ou Sommer [17]). Sous l'hypothèse 01, l'hypersurface réelle  $X$  est, dans  $V$ , feuilletée par des variétés complexes de dimension  $n-1-r$ . L'espace tangent à ces sous-variétés est le radical de la forme de Levi.

Théorème 1 : Soit  $\Omega$  un ouvert pseudoconvexe, dont le bord  $X$  vérifie l'hypothèse 01 dans un ouvert  $V$ . Le problème  $(\bar{\partial}-N)$  est hypoelliptique dans  $V$  pour les  $(0,q)$ -formes si et seulement si  $q > n-1-r$ . Si  $q \leq n-1-r$  les singularités des solutions se propagent sur les feuilles complexes contenues dans  $V \cap X$  (la conjecture 1 est vérifiée pour chacune de ces feuilles).

Remarque 1 : Seule la partie propagation des singularités de ce théorème est nouvelle. On peut énoncer le théorème 1 sans hypothèse de pseudoconvexité, c'est à dire dans le cas à  $r_+$  valeurs propres  $> 0$  et  $r_-$  valeurs propres  $< 0$ ,  $r_+$  et  $r_-$  constants dans  $V$ .

Preuve de la proposition 1 : Considérons la forme réelle  $\tau = \frac{1}{i}(\bar{\partial} - \partial)\rho|_X$ . Elle s'annule sur les fibrés complexes  $T'$  et  $T''$  des champs tangents à  $X$  respectivement holomorphes et antiholomorphes. En posant :

$$\langle Z, W \rangle = i\langle \tau, [Z, \bar{W}] \rangle \quad Z, W \in T' \oplus T''$$

on définit sur  $T' \oplus T''$  une forme hermitienne dont la restriction à  $T'$  est la forme de Levi associée à  $\rho$ . Remarquons que  $T'' = \bar{T}'$  et donc que  $T' \oplus T'' = (\text{Re } T') \oplus \mathbb{C}$ . D'autre part  $T'$  et  $T''$  sont formellement intégrables; on en conclut que le radical de la forme ci-dessus est  $(\text{Re } T'_0) \otimes \mathbb{C}$  ou  $T'_0 \subset T'$  est le radical de la forme de Levi. Il suffit donc de montrer que  $\text{Re } T'_0$  est formellement intégrable, ce qui résulte immédiatement de l'identité de Jacobi. D'après le théorème de Frobenius  $V \cap X$  est feuilletée par des feuilles complexes dont le fibré tangent est  $T'_0$  le radical de la forme de Levi.

Remarque 2 : D'après C. Rea [15] ce feuilletage n'est pas toujours la restriction à  $X$  d'un feuilletage de l'ouvert  $V \subset \mathbb{C}^n$  (même si on restreint  $V$ ).

§ 3. THEOREME MICROLOCAL

Nous énonçons ici le résultat microlocal de propagation des singularités qui permet de montrer le théorème 1 ainsi que le théorème 3 sur  $\square_b$  (voir § 4).

Soit  $E$  un fibré de dimension  $\nu$  sur une variété réelle de dimension  $\mu$  et  $P$  un opérateur pseudo-différentiel de  $E$  dans  $E$  de degré  $m$  (voir [12]). Localement  $E$  est le fibré trivial  $W \times \mathbb{C}^\nu$ ,  $W$  ouvert de  $\mathbb{R}^\mu$  et  $P$  est un  $\nu \times \nu$  système d'opérateurs pseudodifférentiels sur  $W$  classiques de degré  $m$ . Le symbole de  $P$  s'écrit

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x, \xi)$$

et chaque terme  $p_{m-j}$  est une  $\nu \times \nu$  matrice homogène de degré  $m-j$  en  $\xi$ .

Soit  $U$  un ouvert conique de  $T^*W \setminus \{0\}$  et  $\Sigma$  une sous-variété conique de  $U$ .

Hypothèse 1 : On suppose que la restriction à  $\Sigma$  de la forme symplectique  $\omega$  garde un rang constant et que le champ radial n'est pas orthogonal à  $\Sigma$  pour  $\omega$ . La variété  $\Sigma$  admet un feuilletage canonique et est dite  $\omega$ -feuilletée régulière (voir [10]).

Hypothèse 2 : On suppose que la partie principale de  $P$  s'écrit

$$p_m(x, D) \text{Id}_E$$

avec  $p_m(x, D)$  O.P.D. scalaire dont le symbole  $p_m$  est réel elliptique ( $> 0$ ) dans  $U \setminus \Sigma$  et s'annule à l'ordre 2 exactement sur  $\Sigma$ .

Définition 1 : On appelle invariant de Melin de  $P$  le morphisme de fibrés  $E|_\Sigma \rightarrow E|_\Sigma$  défini (sur  $\Sigma$ ) par :

$$I(P) = (p_{m-1})_{\nu \times \nu} - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial x_j} \text{Id}_\nu + \text{tr}^+ (\text{Hess } p_m) \text{Id}_\nu$$

Hypothèse 3 : On suppose que  $I(P)$  est autoadjoint positif et de rang constant  $r'$  sur  $\Sigma$ .



Soit  $\pi$  un système d'opérateurs pseudodifférentiels de degré 0 dont le symbole coïncide sur  $\Sigma$  avec la projection orthogonale sur le noyau de  $I(P)$ . Il est possible de construire un tel système et il est unique modulo les systèmes dont les symboles s'annulent à l'ordre 1 sur  $\Sigma$ . Dans le cas où  $I(P)$  est bijectif on peut prendre  $\pi = 0$  et si  $I(P)$  est nul (sur  $\Sigma$ ) on peut prendre  $\pi = \text{Id}_V$ .

Si  $u = (u_1, \dots, u_\nu)$  est une section distribution de  $E$  on pose

$$\text{WF}(u) = \bigcup_{i=1}^{\nu} (\text{WF} u_i).$$

Théorème 2 : Soit  $P$  un système tel que les hypothèses 1, 2 et 3 soient vérifiées et  $\pi$  défini ci-dessus. On a pour  $u$  section distribution de  $E$  :

- i) Dans  $U \setminus \Sigma$ ,  $\text{WF}(u) = \text{WF}(Pu)$  (hypoellipticité)
- ii) Sur  $\Sigma$ ,  $\text{WF}(u) = \text{WF}(Pu) \cup \text{WF}(\pi u)$  (hypoellipticité conditionnelle)
- iii)  $\text{WF}(u) \setminus \text{WF}(Pu)$  est une réunion de feuilles canoniques de  $\Sigma$  (propagation des singularités).

Remarque 3 : La partie i) est une banalité, car on a supposé  $P$  elliptique dans  $U \setminus \Sigma$ ; on aurait pu aussi bien le supposer seulement hypoelliptique.

Remarque 4 : Si  $r' = \nu$  alors  $P$  est hypoelliptique dans  $U$  car  $\pi = 0$  et  $\text{WF}(u) = \text{WF}(Pu)$  dans  $U$ . Dans ce cas  $P$  admet une paramétrix dans la classe de  $L$ . Boutet de Monvel (voir [1] et [3]).

Idée de la preuve : On utilise la méthode de réduction de Grusin après avoir simplifié  $P$  à l'aide d'une transformation par un opérateur intégral de Fourier. Ceci se fait à peu près comme dans le cas scalaire [10]. On est ramené à l'étude d'un système  $E^\pm$  du type ci-dessus avec  $\Sigma$  involutive et  $I(P) = 0$ . On montre la propagation des singularités pour  $E^\pm$  en adaptant aux systèmes le travail de J. Sjöstrand [16] qui utilise des inégalités de Carleman.

#### § 4. L'OPERATEUR $\square_b$

Nous allons décrire, un peu en détails, le résultat pour l'opérateur  $\square_b$  en vue d'éclairer le théorème 2.

On peut se placer sur une variété presque quasi complexe (de dimension  $2n-1$ ) ou en particulier sur le bord d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^n$ . On suppose cette variété munie d'une métrique hermitienne (voir [2]).

Soit  $T''$  le fibré complexe des champs antiholomorphes tangents à  $X$ . Soient  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}$  une base orthogonale de  $T''$  et  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{n-1}$  la base duale. Une  $(0, q)$ -forme sur  $X$  s'écrit :

$$u = \sum_J u_J \bar{\omega}_J \in \Lambda^q T''$$

et on a

$$\bar{\partial}_b u = \sum_{jJ} \bar{z}_j u_J \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_J + \sum_J u_J \bar{\partial}_b \bar{\omega}_J$$

$$\bar{\partial}_b^* u = - \sum_{kJ} z_k u_J \bar{\omega}_k \lrcorner \bar{\omega}_J + \sum_J u_J \bar{\partial}_b^* \bar{\omega}_J$$

Après un calcul simple qui se trouve dans [9] et beaucoup d'autres on obtient :

$$\begin{aligned} - \square_b u &= \sum_J \left( \sum_{j=1}^{n-1} z_j \bar{z}_j \right) u_J \bar{\omega}_J \\ &+ \sum_{j,k,J} [\bar{z}_j, z_k] u_J \bar{\omega}_j \wedge (\bar{\omega}_k \lrcorner \bar{\omega}_J) \\ &+ \mathfrak{L}(u, \bar{\partial}_b u, \bar{\partial}_b^* u) \end{aligned}$$

Dans  $\mathfrak{L}(u, \bar{\partial}_b u, \bar{\partial}_b^* u)$  on représente une somme de termes où  $u$ , ou  $\bar{\partial}_b u$  ou  $\bar{\partial}_b^* u$  sont multipliées par des matrices (c'est-à-dire des systèmes d'opérateurs différentiels de degré 0).

Le terme principal de  $\square_b$  est donc diagonal, et il vérifie l'hypothèse 2 avec (en notant  $\sigma(Z_j)$  le symbole de  $Z_j$ ) :

$$\begin{aligned} (*) \quad \Sigma &= \{ \text{Re } \sigma(Z_j) = \text{Im } \sigma(Z_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \} \\ \Sigma &= \{ (x, \lambda\tau), x \in X, \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \tau = i(\bar{\partial} - \partial)\rho|_X \} \end{aligned}$$

Pour étudier le rang de la restriction à  $\Sigma$  de la forme symplectique on peut considérer la restriction à  $\Sigma$  de la matrice des crochets de Poisson des fonctions  $\text{Re } \sigma(Z_j), \text{Im } \sigma(Z_j)$  qui définissent  $\Sigma$ . Or on a :

$$\{ \sigma(Z_j), \sigma(\bar{z}_j, \cdot) \} (x, \lambda\tau) = \lambda \langle \tau, [Z_j, Z_j] \rangle (x)$$

ce qui montre que l'hypothèse 1 sur  $\Sigma$  est vérifiée si on suppose que le forme de Levi a un rang constant (hypothèse O1).

Pour calculer l'invariant de Melin de  $\square_b$  on calcule d'abord celui de  $\sum_{j=1}^{n-1} z_j \bar{z}_j$  qui vaut

$$\sum_{j=1}^{n-1} (|\lambda \lambda_j| - \lambda \lambda_j) \quad \text{au point } (x_0, \lambda \tau) \in \Sigma$$

où  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$  sont les valeurs propres de la matrice de Levi associée à  $\rho$  au point  $x_0$ .

D'autre part il faut calculer le symbole sur  $\Sigma$  du 2ème terme de  $\square_b$  (les termes de degré 1 intervenant dans  $\mathcal{L}(u, \bar{\partial}u, \bar{\partial}^*u)$  sont caractéristiques sur  $\Sigma$ ). On trouve une matrice  $\mathcal{L}_{(x_0)}^{(q)}$  qui est définie ainsi :

pour  $q = 0$   $\mathcal{L}^{(0)}$  est nulle

$q = 1$   $\mathcal{L}^{(1)}$  est la matrice de Levi (qu'on peut considérer comme un endomorphisme de  $\Lambda^1 T''$ ) et

$$\mathcal{L}^{(q_1+q_2)}(\bar{\omega}_{j_1} \wedge \bar{\omega}_{j_2}) = (\mathcal{L}^{(q_1)} \bar{\omega}_{j_1}) \wedge \bar{\omega}_{j_2} + \bar{\omega}_{j_1} \wedge \mathcal{L}^{(q_2)} \bar{\omega}_{j_2}, \quad |j_1| = q_1, |j_2| = q_2$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{L}^{(q)}$  sont donc les sommes  $\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_q}$  ( $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n-1$ ) et par suite les valeurs propres de  $I(P)$  ( $x_0, \lambda \tau$ ) sont

$$\sum_{j=1}^{n-1} (|\lambda \lambda_j| - \lambda \lambda_j) + \lambda (\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_q}) \quad 1 \leq j_1 \dots \leq j_q$$

Elles sont positives ou nulles et si le rang de la forme de Levi est constant, le rang de  $I(P)$  est constant sur chacune des nappes  $\Sigma^+$  et  $\Sigma^-$  (hypothèse 3 vérifiée).

Supposons la matrice de Levi de rang constant  $r$  et  $\Omega$  pseudodonvexe (pour simplifier). Les valeurs propres  $\lambda_j$  sont alors positives ou nulles. On peut alors trouver une base orthogonale de  $T''$

$$\bar{z}_1^+, \dots, \bar{z}_r^+, \quad \bar{z}_1^0, \dots, \bar{z}_{n-1-r}^0$$

tels que les  $\bar{z}^0$  engendrent le noyau de la forme de Levi et les  $\bar{z}^+$  engendrent l'espace orthogonal. Soit

$$\bar{\omega}_1^+, \dots, \bar{\omega}_r^+, \quad \bar{\omega}_1^0, \dots, \bar{\omega}_{n-1-r}^0$$

la base duale.

(\*) On appelle  $\pi_q^+$  la projection orthogonale sur l'espace engendré par les formes  $\bar{\omega}_{j_1}^0 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{j_q}^0$   $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n-1-r$  (non nul si  $q \leq n-1-r$ ) et  $\pi_q^-$  la projection orthogonale sur l'espace engendré par les formes  $\bar{\omega}_1^+ \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_r^+ \wedge \bar{\omega}_{j_1}^0 \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{j_{q-r}}^0$   $1 \leq j_1 < \dots < j_{q-r} \leq n-1-r$  (non nul si  $q \geq r$ ).

Remarquons que les feuilles canoniques de  $\Sigma$  se projettent sur les feuilles complexes de  $X$  et rappelons que le support singulier est la projection sur  $X$  du front d'onde (contenu dans  $T^*X$ ). On déduit du théorème 2 (avec  $\mu = 2n-1$ ,  $v = C_{n-1}^q, v-r^+ = C_{n-1-r}^q, v-r^- = C_{n-1-r}^{q-r}$ ) le

Théorème 3 : Soit  $\square_b$  sur le bord  $X$  d'un ouvert  $r$  de  $\mathbb{C}^n$  tel que l'hypothèse 1 soit vérifiée sur  $V \cap X$ , ouvert relatif de  $X$ . Soient  $\Sigma$  et  $\pi_q^\pm$  définis comme ci-dessus (\*). On a pour  $u$   $(0,q)$ -forme :

- i)  $WF(u) = WF(\square_b u)$  hors de  $\Sigma$   
 $WF(u) = WF(\square_b u) \cup WF(\pi_q^\pm u)$  sur  $\Sigma^\pm$
- ii)  $WF(u) \setminus WF(\square_b u)$  est une réunion de feuilles canoniques de  $\Sigma$   
 $SS(u) \setminus SS(\square_b u)$  est une réunion de feuilles complexes de  $X$

Remarque 5 : On peut écrire sans peine un théorème analogue dans le cas non pseudoconvexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators, CPAM 27 (1974), 585-639.

[2] L. Boutet de Monvel : Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites formelles, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, exposé n°9 .

[3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, Astérisque 34-35 (1976) 93-121.

[4] D. Catlin : Boundary behaviour of holomorphic functions on weakly pseudoconvex domains, Thesis, Princeton Univ. 1978.

[5] M. Derridj : Sur la régularité des solutions du problème de Neumann pour  $\bar{\partial}$  dans quelques domaines faiblement pseudoconvexes, J. Diff. Geom. (à paraître).

- [6] K. Diederich, P. Pflug : Necessary conditions for hypoellipticity of the  $\bar{\partial}$ -problem, preprint.
- [7] G. B. Folland, J. J. Kohn : The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton University Press, 1972.
- [8] M. Freemann : Local complex foliation of real submanifolds, Math. Annalen 209 (1974) 1-30.
- [9] P. C. Greiner, E. M. Stein : Estimates for the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem, Princeton University Press (1977).
- [10] A. Grigis : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Comm. in P.D.E. 4-11 (1979) 1233-1262.
- [11] L. Hörmander :  $L^2$  estimates and existence theorems for the  $\bar{\partial}$  operator, Acta Math. 113 (1965) 89-152.
- [12] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems Ann. of Math. 83 (1966), 129-209.
- [13] J. J. Kohn : Subellipticity of the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains : Sufficient conditions, Acta Math. 142 (1979), 79-121.
- [14] N. Øvrelid : Estimées pour l'opérateur  $\bar{\partial}$ , conférence à l'Université d'Alger (mai 1977).
- [15] C. Rea : Levi-flat submanifolds and holomorphic extension of foliations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972) 664-681.
- [16] J. Sjöstrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics, Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 26-1 (1978), 141-155.
- [17] F. Sommer : Komplex-analytische Blätterung reeller Hyperflächen im  $\mathbb{C}^n$ , Math. Ann. 137 (1959), 392-411.
- [18] D. S. Tartakoff : The local real analyticity of solutions to  $\square_b$  and the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem, to appear.
- [19] F. Trèves : Analytic hypoellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and application to the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem, Comm. in P. D. E. 3, 6 et 7 (1978), 475-642.