Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Helffer

Hypoellipticité analytique sur des groupes nilpotents de rang 2 (d'après G. Metivier)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 1, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

HYPOELLIPTICITE ANALYTIQUE SUR DES GROUPES NILPOTENTS DE RANG 2

(d'après G. METIVIER)

par B. HELFFER

Exposé n° I

16 Octobre 1979

On se propose dans cet exposé de rendre compte de résultats récents obtenus par G. Métivier [16] concernant l'hypoanalyticité pour des opérateurs homogènes invariants à gauche sur certains groupes de rang 2 généralisant le groupe de Heisenberg.

§1. INTRODUCTION ET PRESENTATION DES RESULTATS

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent de rang r dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet la décomposition.

(1.1) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r$

avec $[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}$ si $i+j \leq r$

$[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] = 0$ si $i+j > r$

On identifie $\mathcal{G}$ aux champs de vecteurs invariants à gauche sur G et l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ aux opérateurs différentiels invariants à gauche.
On munit $\mathcal{G}$ (et G) des dilatations usuelles δ_λ $(\lambda > 0)$ définies par :

(1.2) $$\delta_\lambda X = \lambda^j X \qquad \text{pour } X \text{ dans } \mathcal{G}_j$$

δ_λ se prolonge à $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et on désigne par $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ le sous-espace des opérateurs homogènes de degré $m \in \mathbb{N}$.
On désigne par $\hat{G}$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires irréductibles.
Rappelons que l'application exponentielle (notée exp) réalise un difféomorphisme global de $\mathcal{G}$ sur G .
On s'intéresse ici particulièrement au cas où le rang de nilpotence de G est égal à 2.

Pour η dans $\mathcal{G}_2^* \setminus 0$, on considère la forme bilinéaire antisymétrique B_η définie pour tout X, X' dans $\mathcal{G}_1$ par :

(1.3) $$B_\eta (X,X') = \langle \eta, [X,X'] \rangle$$

On dira que G vérifie la condition (H) si, pour tout η dans $\mathcal{G}_2^* \setminus 0$, B_η est non dégénérée. Dans ce cas, la dimension de $\mathcal{G}_1$ est paire. (On pose $\dim \mathcal{G}_1 = 2n$).
Rappelons tout d'abord le théorème suivant qui est plus ou moins un cas particulier

du travail de Métivier [15] , exposé à ce séminaire l'année dernière (cf. également [8]).

<u>Théorème 1.1</u> : Si G ne vérifie pas la condition (H), il n'existe pas d'opérateurs hypoelliptiques analytiques dans $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$.

Le problème de savoir s'il en existe dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ $(m > 2)$ est abordé dans [8] et est lié à un problème de valeurs propres non linéaires (cf [17]) .

Dans [16], G. Métivier démontre le théorème suivant :

<u>Théorème 1.2</u> : On suppose que G vérifie la condition (H) et soit P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) P est hypoelliptique analytique

ii) P est hypoelliptique

iii) Pour toute représentation π dans $\hat{G}$ non triviale, $\pi(P)$ est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$ (espace des vecteurs C^∞ de π)

iv) Pour toute représentation π dans $\hat{G}$ non triviale, $\pi(P)$ est injectif dans E_π (espace des vecteurs entiers de π).

L'exemple le plus connu de groupe nilpotent vérifiant la condition (H) est l'exemple du groupe de Heisenberg. Dans ce cas, l'implication ii) $\Rightarrow$ i) résulte du travail de D. S. Tartakoff [20] .

Lorsque $P = \sum_{i=1}^{2n} X_i^2$ (où X_i, $i = 1,\dots,n$ désigne une base de $\mathcal{G}_1$) une solution explicite de la solution fondamentale a été obtenue par G. B. Folland ([3]) (cf. également le travail de B. Gaveau [4]). Il est démontré dans [7] [13] qu'il existe toute une famille de groupes nilpotents de rang 2 qui admettent le même type de solutions fondamentales.

Lorsque m est égal à 2, P est un opérateur à caractéristiques doubles et la condition (H) dit que la variété caractéristique de cet opérateur est symplectique. Si de plus le symbole principal est réel, l'implication ii) $\Rightarrow$ i) résulte du travail de F. Trèves [21]. C'est d'ailleurs ce travail qui a inspiré les constructions faites ici par G. Métivier.

Avant d'aborder la démonstration de l'implication ii) $\Rightarrow$ i) plus en détail, donnons quelques indications sur les autres points.

L'équivalence de (ii) et de (iii) est vraie pour les groupes nilpotents gradués généraux et est démontrée dans le cas général par B. Helffer et J. Nourrigat (cf [10] et la bibliographie qui y figure pour les cas particuliers démontrés auparavant).

L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) est implicitement dans [19] ; si u est un élément non nul de $\mathcal{S}_\pi$ vérifiant :

$$\pi(P)u = 0$$

La fonction $\tilde{u}(g) = \int_0^{+\infty} <\pi(\delta_\lambda\, g)u,u> \quad e^{-\lambda}d\lambda$ est C^∞ et non analytique au voisinage de l'origine de G (si π est non dégénérée sur exp $\mathcal{G}_2$).

L'implication iii) $\Rightarrow$ iv) est triviale ; la réciproque résulte de l'étude de propriétés d'opérateurs à coefficients polynomiaux et sa démonstration ne fait pas intervenir la condition (H). Nous reviendrons sur sa démonstration au § 6.

On va démontrer l'implication iii) $\Rightarrow$ i) en construisant une solution élémentaire E, analytique en dehors de O, de ${}^tP$. On en déduira un inverse à gauche de P par la formule :

$$\check{E} * Pu = u \qquad \text{pour } u \in \mathcal{E}'(G)$$

(où $\check{E}$ désigne la distribution $\check{E}(g) = E(g^{-1})$).

Comme l'hypoellipticité de P implique celle de ${}^tP$, on construira dans la suite une solution élémentaire pour P.

§2. REPRESENTATIONS. FORMULE DE PLANCHEREL

Pour la construction de cette solution élémentaire, on utilise la formule de Plancherel (cf. G. Lion [14] et C. Rockland [18]).

Si G vérifie la condition (H), on distingue deux familles de représentations :

- Les représentations triviales sur exp $\mathcal{G}_2$, paramétrées par $\mathcal{G}_1^*$ et qui sont scalaires. Pour $\xi \in \mathcal{G}_1^*$, π_ξ est défini par :

$$\forall\ X \in \mathcal{G}\ , \pi_\xi\ (\exp X) = e^{ix.\xi}$$

où on a écrit $X = x + y$ avec $x \in \mathcal{G}_1$, $y \in \mathcal{G}_2$

- D'autre part, les représentations non triviales sur exp $\mathcal{G}_2$ qui sont paramétrées par $\mathcal{G}_2^* \setminus 0$ et dont nous allons maintenant rappeler une construction :

Pour $\eta \in \mathcal{G}_2^*$ fixé, pour $j = 1,\dots,n$, il existe T_j et Z_j dans $\mathcal{G}_1$ tels que :

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} B_\eta(T_j,T_k) &= B_\eta(Z_j,Z_k) = 0 \\ B_\eta(T_j,Z_k) &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

On définit alors π_η dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\pi_\eta(\exp(\sum_{j=1}^n t_jT_j + \sum_{j=1}^n z_jZ_j + y))f(s) = e^{iy.\eta + i\frac{zt}{2} + iz.s} f(s+t)$$

où $t = (t_1,\dots,t_n)$, $s = (s_1,\dots,s_n)$, $z = (z_1,\dots,z_n)$.

La représentation π_η ainsi construite dépend évidemment du choix de la base (T_j,Z_j), mais sa classe dans $\hat{G}$ ne dépend elle que de η .

Pour tout η_o, il existe un voisinage conique Γ de η_o , dans lequel on peut choisir une base $T_j(\eta),Z_j(\eta)$ vérifiant (2.1), dépendant analytiquement de η dans Γ de sorte que, pour tout P dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, $\pi_\eta(P)$ soit un polynôme non commutatif de $\frac{\partial}{\partial s}$ et is, dont les coefficients sont des fonctions analytiques et homogènes de degré m/2 en η , pour η dans Γ .

Enfin, dans les coordonnées (t,z) associés à la base $(T_j(\eta),Z_j(\eta))$, on a

$$(2.2)\qquad dx = (\det B_\eta)^{-1/2} dt.dz \ .$$

Rappelons maintenant la notation suivante : pour φ dans $\mathcal{S}(G)$ et π dans $\hat{G}$, on définit $\pi(\varphi)$ par la formule :

$$(2.3)\qquad \pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\ \pi(g^{-1})dg$$

On démontre alors la formule de Plancherel suivante pour les groupes vérifiant la condition (H).

Formule de Plancherel

$$(2.4)\qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(G)$$

$$\varphi(g) = (2\ \pi)^{-n-n'} \int_{\mathcal{G}_2^*\setminus 0} \operatorname{tr}(\pi_\eta(\varphi)\pi_\eta^*(g))(\det B_\eta)^{1/2} d\eta$$

(avec $2n = \dim \mathcal{G}_1$, $n' = \dim \mathcal{G}_2$)

Il résulte de la formule de Plancherel que le candidat pour être solution élémentaire de P est

$$E = (2\pi)^{-n-n'} \int \operatorname{tr}(\pi_\eta(P)^{-1}\pi_\eta(\varphi)(\det B_\eta)^{1/2} d\eta$$

ou plus correctement

(2.5) $$\langle E,\varphi\rangle = (2\pi)^{-n-n'} \int \operatorname{tr}(\pi_\eta(P)^{-1}\pi_\eta(\check{\varphi}))(\det B_\eta)^{1/2} d\eta$$

§3. ETUDE DE P DANS LES REPRESENTATIONS

Remarquons tout d'abord que P étant hypoelliptique, $\pi_\eta(P)$ est inversible pour tout η dans $\mathcal{G}_2^* \setminus 0$ et que $\pi_\eta(P)^{-1}$ est un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On pose dans la suite : $K_\eta = \pi_\eta(P)^{-1}$.

On montre ensuite le lemme suivant :

Lemme 3.1 : Pour tout η dans $\mathcal{G}_2^* \setminus 0$, il existe une distribution $a(x,\eta)$ dans $\mathcal{S}'(\mathcal{G}_1)$ telle que, pour tout φ dans $\mathcal{S}(G)$, on ait :

(3.1) $$\operatorname{tr}(K_\eta.\pi_\eta(\check{\varphi})) = \int_{\mathcal{G}_1} a(x,\eta)\,\hat{\psi}(x,-\eta)\,dx$$

où $\check{\psi}$ désigne la transformation de Fourier en y de $\psi = \varphi_\circ \exp$.

En outre, le noyau $K_\eta(t,s)$ de K_η est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et

(3.2) $$a(x,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz.\zeta} K_\eta(\zeta + t/2, \zeta - t/2)\,d\zeta$$

où (t,z) sont les coordonnées de x associées à la base (Y_j,Z_j) définie précédemment.

La proposition clef de la démonstration de Métivier est une proposition sur les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux .

Soit $Q = Q(\frac{\partial}{\partial s}, s) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}\, s^\alpha (\frac{\partial}{\partial s})^\beta$ un opérateur sur $\mathbb{R}^n$. On suppose que Q est un isomorphisme de l'espace :

$$\mathcal{H}^m = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \,/\, s^\alpha \partial_s^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour } |\alpha| + |\beta| \leq m\}$$

sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 3.2 : Si l'ordre m de Q est supérieur à $2n+2$, l'inverse K de Q est traçable et son noyau $K(t,s)$ est continu.
L'intégrale $\Phi(t,z) = \int e^{iz.\zeta} K(\zeta + t/2, \zeta - t/2) d\zeta$ converge absolument.
Notant $\tilde{x} = (t,z)$, la fonction $\Phi(\tilde{x}) = \Phi(t,z)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un cône $\Gamma = \{\tilde{x} \in \mathbb{C}^{2n}, |\mathrm{Im}\, \tilde{x}| < \varepsilon |\mathrm{Re}\, \tilde{x}|\}$, continue sur $\bar{\Gamma}$ et y vérifie l'estimation

$$|\Phi(\tilde{x})| \leq C e^{-\rho |\tilde{x}|^2} \tag{3.3}$$

En outre, si les coefficients de Q dépendent analytiquement d'un paramètre $\eta \in \mathbb{C}^{n'}$ (η dans un voisinage de η°), alors, restreignant ce voisinage au besoin, la fonction Φ dépend analytiquement de η, se prolonge dans un cône Γ indépendant de η et vérifie l'estimation (3.3) uniformément en η.

On applique cette proposition à $Q_\eta = \pi_\eta(P)$. La restriction sur l'ordre de l'opérateur n'est pas importante puisque, pour étudier l'hypoellipticité analytique, on peut toujours regarder, à la place de P, P^k. Compte tenu de la formule (3.2), on déduit de la proposition (3.2) la proposition suivante :

Proposition 3.3 : Pour tout η dans $\mathcal{G}_2^* \setminus 0$, $a(x, \eta)$ est une fonction continue sur $\mathcal{G}_1$ et homogène au sens suivant :

$$\forall \lambda, \ a(x, \lambda^2 \eta) = \lambda^{-m} a(\lambda x, \eta) \tag{3.4}$$

L'application $\eta \to a(.,\eta)$ se prolonge en fonction holomorphe dans un cône

$$C_\varepsilon = \{\eta \in \mathbb{C}^{n'} / |\mathrm{Im}\, \eta| < \varepsilon |\mathrm{Re}\, \eta|\}$$

à valeurs dans l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathcal{G}_1$.
Il existe de plus des constantes C et $\rho > 0$ telles que :

$$\forall (x,\eta) \in \mathcal{G}_1 \times C_\varepsilon$$

$$|a(x, \eta)| \leq C |\eta|^{-m/2} e^{-\rho |x|^2 \eta} \tag{3.5}$$

§4. CONSTRUCTION DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE

On pose maintenant :

(4.1) $$E(x,\eta) = (2\pi)^{-n-n'}(\det B_\eta)^{1/2}a(x,\eta)$$

Remarquons tout d'abord que lorsque $2n+2 \leq m < 2n+2n'$, la formule

(4.2) $$\langle E,\varphi\rangle = \int E(x,\eta)\,\hat{\psi}(x,-\eta)\,dx d\eta$$

définit une distribution homogène (au sens de [2]) solution élémentaire de P.
On vérifie en effet que l'intégrale est bien convergente à l'origine .
Si $m \geq 2n+2n'$, on doit utiliser comme dans [14] une procédure de régularisation.
On choisit $\theta \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_2^*)$, θ valant 1 au voisinage de 0 et 0 pour $|\eta| \geq 1$.
On se fixe un entier $k \geq \frac{m}{2} - n - n'$.
Pour χ dans $\mathcal{S}(\mathcal{G}_2^*)$, on note :

(4.3) $$T\chi(\eta) = \chi(\eta) - \theta(\eta)\sum_{|\alpha|\leq k}\frac{\eta^\alpha}{\alpha!}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^\alpha\chi\right)(0)$$

de sorte que :

$$T\chi(\eta) = \chi(\eta) \qquad \text{pour } |\eta| \geq 1 \text{ et que :}$$

$$T\chi(\eta) = O(|\eta|^{k+1}) \quad \text{pour } |\eta| \text{ tendant vers } 0.$$

La formule

(4.4) $$\langle E_0,\varphi\rangle = \int E(x,\eta)\,T\hat{\psi}(x,\eta)\,dx d\eta$$

définit bien une distribution sur G .
Si on pose

(4.5) $$R = PE_0 - \delta$$

On remarque que pour tout A dans $\mathcal{U}_{k+1}(\mathcal{G}_2)$, on a

(4.6) $$A.R = 0$$

Dans les coordonnées exponentielles, en désignant par $\tilde{R}$ la distribution sur $\mathcal{G}$ associé à R sur G, la propriété (4.6) se traduit par :

$$\tilde{R} = \sum_{|\alpha| \leq k} R_\alpha(x) y^\alpha$$

où les R_α sont des distributions sur $\mathcal{G}_1$.

On cherche une distribution E_1 telle que la distribution associée sur $\mathcal{G}$ vérifie

$$P\tilde{E}_1 = -\tilde{R}$$

On cherche $\tilde{E}_1$ sous la forme :

$$\tilde{E}_1 = \sum_{|\alpha| \leq k} E_\alpha(x) y^\alpha$$

et on résoud par récurrence descendante sur (α), en utilisant un théorème de surjection dans $\mathcal{D}'$ pour les opérateurs elliptiques à coefficients constants [11].

Alors $(E_o + E_1) = E$ est une solution élementaire de P.

§5. ANALYTICITE DE LA SOLUTION ELEMENTAIRE

On se place dans les coordonnées exponentielles. On a la proposition suivante :

<u>Proposition 5.1</u> : Soient $\omega_j \subset\subset \mathcal{G}_j$ $(j = 1,2)$ deux ouverts tels que $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ ne contienne pas O. Il existe un entier p tel que, pour toute fonction ψ_1 dans $C_o^p(\omega_1)$ la distribution

$$f(y) = \langle \tilde{E}(.,y), \psi_1 \rangle \tag{5.1}$$

est analytique sur $\bar{\omega}_2$, et si ψ_1 parcourt un borné de $C_o^p(\omega_1)$ cette distribution reste dans un borné de $\mathcal{A}(\bar{\omega}_2)$.

<u>Esquisse de la démonstration</u>

Pour simplifier ne regardons que E_o. On décompose E_o.

$$E_o = E'_o + E''_o$$

avec $\langle \tilde{E}'_o, \psi \rangle = \int_{|\eta| > 1} E(x,\eta)\ \hat{\psi}(x,-\eta)\,dx d\eta$

$\langle \tilde{E}''_o, \psi \rangle = \int_{|\eta| < 1} E(x,\eta)\ T\,\hat{\psi}(x,-\eta)\,dx d\eta$

Le point délicat est de montrer la propriété pour $\tilde{E}'_o$, en supposant que $0 \notin \bar{\omega}_1$. Il résulte de (3.5) que :

$$|E(x,\eta)| < \text{cste } |\eta|^{n-m/2} e^{-\rho|\eta|}$$

On a donc

$$f'_o(y) = <\tilde{E}'_o(.,y), \psi_1> = \int_{|\eta|>1} e^{iy.\eta} \left(\int E(x,\eta)\psi_1(x)dx\right) d\eta$$

On majore $|\int E(x,\eta)\psi_1(x)dx|$ par $C\|\psi_1\|_{L^\infty(\omega_1)} |\eta|^{n-m/2} e^{-\rho|\eta|}$ et l'analyticité en y se déduit aisément .

Si $0 \in \bar{\omega}_1$, alors, par hypothèse, $0 \notin \bar{\omega}_2$ et on obtient l'analyticité de f'_o par déformation du chemin d'intégration dans le complexe grâce à l'analyticité de $E(x,\eta)$ dans le cône C_ε .

On a presque terminé !

<u>Proposition 5.2</u> : La solution élémentaire E de P est analytique en dehors de l'élement neutre e de G.

<u>Démonstration</u> : On a $PE = \delta$.
On en déduit dans les coordonnées exponentielles :

$$\tilde{P}\tilde{E} = \delta_{(o)} .$$

$\tilde{P}$ est elliptique dans les directions $(\xi,0)$ de $\mathcal{G}^*$ (Injectivité de $\pi(P)$ pour les représentations dégénérées). Par conséquent, le front d'onde analytique de $\tilde{E}$. $WF_A(\tilde{E})$ ne contient pas les points de la forme : $((x_o,y_o),(\xi_o,0))$ avec $(x_o,y_o) \neq 0$ et $\xi_o \neq 0$. Il reste à montrer que les points $(X_o,(\xi_o\ \eta_o))$ avec $X_o \neq 0$ et $\eta_o \neq 0$ ne sont pas non plus dans $WF_A(\tilde{E})$.

Fixons $X_o = (x_o,y_o) \neq 0$ et un voisinage de X_o de la forme $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ tel que $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ ne contienne pas 0. Fixons également ψ_1 dans $C_o^p(\omega_1)$; les fonctions $(1+|\xi|)^{-p}\ \psi_1(x)e^{-ix.\xi}$ sont dans un borné de $C_o^p(\omega_1)$; par conséquent, les fonctions $f_\xi(y)$ associées par (5.1) sont dans un borné de $\mathcal{A}(\bar{\omega}_2)$. Il existe alors (cf. [12]) une constante C et une suite de fonctions χ_ν dans $\mathcal{D}(\omega_2)$, telle que :

(5.2) $$|\widehat{\chi_\nu f_\xi}(\eta)| < C\left(\frac{C\nu}{|\eta|}\right)^\nu$$

Compte tenu de la définition de f_ξ, on déduit de (5.2)

$$(5.3) \qquad |< \tilde{E}, \psi_1(x)\chi_\nu(y)e^{-i(x\xi+y\eta)}>| \leq C(1+|\xi|)^p\left(\frac{C\nu}{|\eta|}\right)^\nu$$

Maintenant, comme $\eta_o \neq 0$, on a dans un voisinage conique $\tilde{\Gamma}$ de (ξ_o,η_o) :

$$(5.4) \qquad |\xi| \leq \tilde{c}|\eta|$$

et par conséquent, on a dans $\tilde{\Gamma}$:

$$(5.5) \qquad |\widehat{(\psi_1 \otimes \chi_\nu)\tilde{E}}(\xi,\eta)| \leq \tilde{\tilde{c}}(C\nu)^\nu|\eta|^{p-\nu}$$

Compte-tenu de la définition du front d'onde analytique, ceci exprime que

$$(x_o,(\xi_o,\eta_o)) \notin WF_A(\tilde{E})$$

Ceci termine la démonstration de la proposition .

§6. DEMONSTRATION DE L'EQUIVALENCE (iii) ⇔ (iv)

Rappelons tout d'abord que si π désigne une représentation unitaire dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, on appelle vecteur C^∞ (resp. analytique, resp. entier) de π l'espace des u dans $\mathcal{H}_\pi$ tels que l'application $y \to \pi(g)u$ soit C^∞ (resp. analytique, resp. se prolonge en une fonction entière dans $G_{\mathbb{C}}$). On renvoie à l'article de R. Goodman [5] pour les propriétés de ces espaces . Dans notre cas, il est clair que pour les représentations π triviales sur exp $\mathcal{G}_2$, on a $\mathcal{S}_\pi = E_\pi = \mathbb{C}$.

Il suffit donc de montrer le lemme suivant (qui est en fait valable sans faire l'hypothèse (H)).

Lemme 6.1 : Soit P un opérateur dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$ de rang 2) tel que pour toute représentation T dégénérée sur exp $\mathcal{G}_2$, non triviale, T(P) soit injectif dans $\mathcal{S}_T$ (= E_T), alors, pour toute représentation π non triviale sur exp($\mathcal{G}_2$), on a :

$$(6.1) \qquad \mathrm{Ker}\,\pi(P) \cap \mathcal{S}_\pi = \mathrm{Ker}\,\pi(P) \cap E_\pi .$$

<u>Démonstration</u> : Les représentations sont de la forme π_η avec η dans $\mathcal{G}_2^* \backslash 0$ et on a vu qu'alors

$$\pi_\eta(P) = Q_\eta(s, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s}) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(\eta) s^\alpha (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial s})^\beta \tag{6.2}$$

L'hypothèse sur les représentations dégénérées implique que :

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha\beta} s^\alpha \sigma^\beta \neq 0 \qquad \text{pour } |\sigma|+|s|\neq 0 \tag{6.3}$$

Par conséquent $\pi_\eta(P)$ est un opérateur à indice de $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le lemme (6.1) résulte alors du lemme suivant :

<u>Lemme 6.2</u> : Soit Q défini par (6.2) et vérifiant (6.3). Alors si u dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie Qu = 0, il existe des constantes C et R telles que : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n$

$$\| s^\alpha \partial_s^\beta u \|_{L^2} < C \| u \|_{L^2} \; R^{|\alpha|+|\beta|} \sqrt{(|\alpha|+|\beta|)!} \tag{6.4}$$

Or les vecteurs entiers de π_η peuvent être caractérisés comme l'ensemble des vecteurs u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tels que : $\forall\, \varepsilon$, $\exists C_\varepsilon$, $\forall\, p$,

$$\forall\, \alpha_i \in \mathbb{N}^n \ (i = 1,\dots,p) \ , \ \forall\, \beta_i \in \mathbb{N}^n \ (i = 1,\dots,p)$$

$$\| (\frac{\partial}{\partial s})^{\alpha_1} s^{\beta_1} (\frac{\partial}{\partial s})^{\alpha_2} s^{\beta_2} \dots\dots (\frac{\partial}{\partial s})^{\alpha_p} s^{\beta_p} u \| < C_\varepsilon \, \varepsilon^{|\alpha|+|\beta|} (|\alpha|+|\beta|)! \tag{6.5}$$

et on vérifie que (6.4) implique (6.5).

<u>Remarque 6.3</u> : On déduit de (6.4) qu'il existe $\rho > 0$ tel que $e^{\rho s^2} u$ soit dans L^2. Les solutions de Qu = 0 ont donc des propriétés du même type que les fonctions d'Hermite. C'est ce type de propriété et d'autres estimations plus fines qui permettent de démontrer la proposition (3.2).

§7. <u>QUELQUES RESULTATS CONCERNANT LES GROUPES NILPOTENTS DE RANG DE NILPOTENCE SUPERIEUR A 2.</u>

On peut se poser la question de savoir s'il existe des opérateurs dans $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ qui sont hypoelliptiques analytiques lorsque $\mathcal{G}$ est de rang de nilpotence strictement supérieur à 2. Il y a certaines raisons de penser que la réponse est non (cf [9]). Il est en tout cas nécessaire que $\mathcal{G}$ soit stratifié (cf.[9]).

Dans [9], on démontre par exemple (en utilisant un théorème de Pham The Lai et D. Robert [17] que l'opérateur :

$$D_t^2 + (\frac{t^2}{2} D_x + tD_y + D_z)^2$$

qui peut être considéré comme un opérateur invariant à gauche sur un groupe nilpotent de rang 3, n'est pas hypoanalytique dans $\mathbb{R}^4$ (il est cependant hypoanalytique quand on le considère comme opérant sur des distributions indépendantes de x, ou de (y,z)).

Ceci se déduit en effet de la propriété suivante (démontrée dans [17]) : $\exists\ \alpha \in \mathbb{C}$, tel que $D_t^2 + (t^2 - \alpha)^2$ ne soit pas injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

REFERENCES

[1] L. Boutet de Monvel, P. Krée : Pseudo differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17 (1967) p.295-323.

[2] G. B. Folland : Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. Ark. för. Mat., 13 (1975) p.161-207.

[3] G. B. Folland : A fundamental solution for a subelliptic operator, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) p.373-376.

[4] B. Gaveau : Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta Mathematica 139- 1-2 (1977)p 95-153.

[5] R. Goodman : Analytic and entire vectors for representations of Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969)p.55-76.

[6] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators. Mat. Sb. 83 (185) 1970, n°3 p.456-473, Math. USSR Sb, 12 1972, n°3, p.458-476.

[7] B. Helffer : Opérateurs invariants sur une classe de groupes nilpotents de rang 2. (Manuscrit Juillet 78).

[8] B. Helffer : Remarques sur la non-hypoanalyticité, Séminaire d'Analyse (Janvier 1979), Département de Mathématiques, Université de Nantes.

[9] B. Helffer : Conditions nécessaires d'hypoanalyticité pour des opérateurs invariants à gauche homogènes sur un groupe nilpotent gradué. Séminaire d'Analyse (Sept. 79), Département de Mathématiques, Université de Nantes.

[10] B. Helffer, J. Nourrigat : Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué. Comm. in P.D.E. 4 (8) (1979) p.899-958.

[11] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer Verlag (63).

[12] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets, Comm. Pure and Appl. Math. 24 (1971) p.671-704.

[13] A. Kaplan : A class of nilpotent Lie groups with analytically hypoelliptic sublaplacians (A paraître, Trans. Amer. Math. Soc.).

[14] G. Lion : Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels sur les groupes nilpotents. Preprint (1978).

[15] G. Métivier : Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques Preprint et séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé 12.

[16] G. Métivier : Hypoellipticité analytique sur des groupes nilpotents de rang 2, Manuscrit, Juillet 1978.

[17] Pham The Lai, D. Robert : Sur un problème aux valeurs propres non linéaires, Séminaire d'Analyse (avril 1979), département de Mathématiques, Université de Nantes et article, à paraître.

[18] C. Rockland : Hypoellipticity on the Heisenberg group. Representation theoretic criteria. Trans. of the A.M.S., vol. 240, n°517 p.1-52 (1978).

[19] L. P. Rothschild, E. M. Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Mathematica 137 (1976) p.248-315.

[20] D. S. Tartakoff : Local analytic hypoellipticity for $\Box_b$ on non degenerate Cauchy-Riemann manifolds. Preprint et Proc. Nat. Acad. Sci. Vol. 75 n°7 p.3027-3028 (1978).

[21] F. Treves : Analytic hypoellipticity of a class of pseudo differential operators , Comm. in P. D. E., 3 (1978) p.475-642.

***