Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

# Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1979-1980), exp. n° 22, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

# PROPAGATION DES SINGULARITES POUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

par J. M. BONY

Exposé n° XXII

20 Mai 1980

## § 1. INTRODUCTION

Nous avons montré dans [1] que, si $u$ est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre $m$, et si $u$ appartient à $H^s$ ($s$ assez grand), alors le $H^t$-spectre singulier de $u$ (ensemble des $(x,\xi)$ tels que $u$ n'appartienne pas à $H^t$ microlocalement en $(x,\xi)$) se propage le long des bicaractéristiques, pourvu que l'on ait $t < t_o$ , où $t_o$ est de l'ordre de $2s$. Nous nous proposons d'étudier ici, avec des hypothèses plus fortes, et dans les cas les plus simples, ce qui se passe pour $t > t_o$ .

Dans tout l'exposé, $\Omega^- \subset \Omega$ seront deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ , et nous étudierons des solutions réelles $u$ de l'équation

$$(1) \qquad P(x,\partial)u(x) = F(x,u(x),\ldots,\partial^\beta u(x),\ldots)_{|\beta| \leq m-1}$$

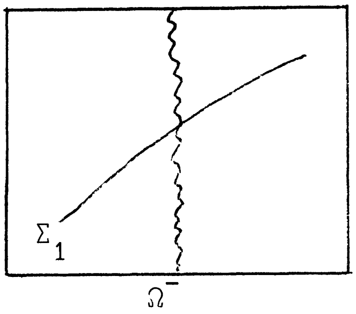
définie dans $\Omega$ , sous les hypothèses suivantes.

(H1) $P$ est un opérateur (pseudo-) différentiel d'ordre $m$, à coefficients réels, dont les caractéristiques réelles sont simples. La fonction $F$ est réelle et de classe $C^\infty$ .

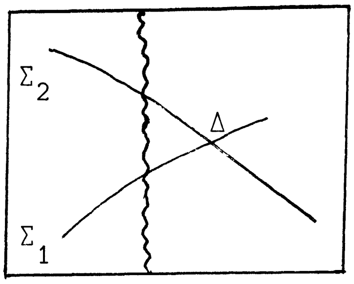
H2) Si $(x_o,\xi_o) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , avec $p_m(x_o,\xi_o) = 0$ , l'une des 2 demi-bicaractéristiques issues de $(x_o,\xi_o)$ entre dans $\Omega^-$ avant de sortir de $\Omega$ .

L'exemple type est évidemment celui d'un opérateur $P$ strictement hyperbolique dans $\mathbb{R}^{n-1}_x \times \mathbb{R}_t$ , où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et où $\Omega^-$ est défini par $t < 0$ .

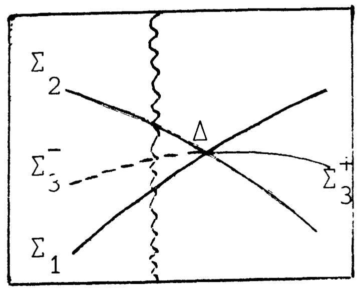
Nous allons montrer que, pour une solution $u$ de (1), si la restriction de $u$ à $\Omega^-$ n'a que des singularités d'un type simple (en gros $u$ doit y être une distribution de Fourier), alors on peut contrôler la régularité de $u$ dans $\Omega$ , jusqu'à l'ordre $C^\infty$ , dans les trois cas suivants:




Cas A




Cas B




Cas C

Cas A : dans $\Omega^-$ , la fonction u n'est singulière que sur une hypersurface caractéristique $\Sigma_1$ . Il en est alors de même dans $\Omega$ .

Cas B : dans $\Omega^-$ , la fonction u n'est singulière que sur deux hypersurfaces caractéristiques $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ . Ces hypersurfaces se coupent en $\Delta$ , mais par $\Delta$ il ne passe aucune autre hypersurface caractéristique. Alors u est régulière hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .

Cas C : dans $\Omega-$ , la situation est la même que précédemment mais par $\Delta$ , il passe une troisième hypersurface caractéristique $\Sigma_3$. Alors u est régulière en dehors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+$ . En outre, u est moins singulière sur $\Sigma_3^+$ que sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .

Dans ce dernier cas, il y a tout lieu de penser que, "en général", il "nait" effectivement une singularité sur $\Sigma_3^+$. Quoi qu'il en soit, Rauch et Reed [4] ont donné un exemple de ce type où il nait effectivement une singularité sur $\Sigma_3^+$ . Il s'agit là d'un phénomène typiquement non linéaire. Un autre exemple, ne rentrant pas dans les trois cas étudiés ici, de "naissance" de singularités inhabituelles lors de la rencontre de singularités antérieures, est dû à B. Lascar [2] .

## § 2. RAPPEL DES RESULTATS DE [1]

Appliqués à l'équation (1), les théorèmes 5.4. et 6.1. de [1] donnent immédiatement les résultats suivants (on a ici, avec les notations de [1] , $d = \mathrm{Max}(k_o, p(k)) = m - 1$).

Proposition 1 : Soit u solution de (1) appartenant à $H^r(\Omega)$ avec $r > n/2 + m - 1$ . Alors

a) En tout point $(x_o,\xi_o)$ non caractéristique, u appartient localement à $H^{2r-n/2-m+2}$.

b) Si u appartient à $H^t$ microlocalement en un point caractéristique $(x_o,\xi_o)$ , avec $t \leq 2r - n/2 - m + 1$ , u appartient à $H^t$ en tout point de la bicaractéristique issue de $(x_o,\xi_o)$.

L'énoncé ci-dessus tient compte, en fait de l'amélioration, dûe à Y. Meyer [3] , de la proposition 4.3. de [1] , nos résultats ne démontraient b) par exemple que pour $t < 2r - n/2 - m + 1$.

Corollaire 2 : Soit $s = n/2 + m + \theta$ avec $\theta > 0$ , et soit u une solution de (1) telle que $u \in H^{s-1}(\Omega)$ et $u \in H^s(\Omega^-)$. Alors $u \in H^s(\Omega)$.

Compte-tenu de (H2), on a immédiatement $u \in H^t(\Omega)$ avec $t = \mathrm{Min}(s,s-1+\theta) > s - 1$. Si $\theta < 1$, il suffit d'itérer le raisonnement un nombre fini de fois pour obtenir $u \in H^s(\Omega)$.

Remarque 3 : Il n'est pas difficile de voir que les résultats de [1] , et donc le corollaire précédent s'appliquent au cas de systèmes du type suivant.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} P & & O \\ & \ddots & \\ O & & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1F_1(x,\dots,\partial^\beta u_j,\dots) \\ \dots\cdot \\ L_nF_n(x,\dots,\partial^\beta u_j,\dots) \end{pmatrix}$$

où B est une matrice carrée d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m-1 , où les $L_k$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, et où les $F_k$ sont des fonctions de classe $C^\infty$ des dérivées d'ordre au plus m-1 des $u_j$ .

On ramène en effet ce système à un système paradifférentiel du type suivant

$$(3) \qquad PU + CU = R$$

où U est le vecteur colonne de composantes $u_j$, où C est une matrice d'opérateurs paradifférentiels appartenant à $Op(\Sigma_\theta^{m-1}(\Omega))$, et où $R$ est un vecteur colonne appartenant à $H^{s-m+\theta}$. Les inégalités d'énergie et donc les résultats du paragraphe 6 de [1] s'étendent sans difficulté au système (3).

## § 3. ESPACES DE FONCTIONS SINGULIERES SUR DES SOUS-VARIETES

Pour étudier les singularités microlocales de solutions d'équations non linéaires, il semble raisonnable de travailler dans des espaces de fonctions stables à la fois par l'action des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 et par les opérations non linéaires. Or l'espace des fonctions appartenant à $H^s(\underline{\underline{R}}^n)$, $s > n/2$, et microlocalement de classe $H^t$ aux points d'un ensemble fermé de $\underline{\underline{R}}^n \times (\underline{\underline{R}}^n \setminus \{0\})$ ne forme une algèbre que pour $t \leq 2s - n/2$, ce qui explique à la fois le succès et les limites du calcul paradifférentiel. Pour étudier les singularités d'ordre $t$ plus élevé, nous introduisons les espaces suivants.

<u>Définition 4</u> : Soit $\Sigma$ un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, soient $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note $H^s(\Sigma,k)$ l'ensemble des $u \in H^s$ telles que quels que soient les champs de vecteurs $Z_1,\ldots,Z_\ell$, $\ell \leq k$, tangents à $\Sigma$, on ait

$$Z_1 Z_2 \ldots\ldots Z_\ell \, u \in H^s .$$

On a bien entendu identifié champ de vecteur et opérateur différentiel homogène d'ordre 1. Dans ce qui suivra, $\Sigma$ sera toujours une réunion finie de sous-variétés régulières, et la notion de champ de vecteur tangent à $\Sigma$ ne pose pas de problème.

Il est clair que les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 appliquent $H^s(\Sigma,k)$ dans lui-même. La règle de dérivation des fonctions composées montre facilement que, pour $s > n/2$, si $u_1,\ldots,u_p$ appartiennent à $H^s(\Sigma,k)$, il en est de même de $F(x,u_1(x),\ldots,u_p(x))$ lorsque $F$ est une fonction $C^\infty$ de ses arguments.

Enfin, l'appartenance à $H^s(\Sigma,k)$ est une propriété locale, et même microlocale.

Les éléments de $H^s(\Sigma,k)$ appartiennent à $H^{s+k}$ en dehors de $\Sigma$. Au-dessus d'un point lisse de $\Sigma$, ils appartiennent microlocalement à $H^{s+k}$ en dehors du fibré conormal.

Si $\Sigma$ est l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$, on a

$$u \in H^s(\Sigma,\infty) \Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{N}^n \, , \, (x_1\partial_1)^{\alpha_1}(\partial_2)^{\alpha_2}\dots(\partial_n)^{\alpha_n} u \in H^s \, .$$

On reconnait là les distributions de Fourier associées au fibré conormal de $\Sigma$.

## § 4. LE CAS A

Théorème A : Soit $\Sigma$ une hypersurface [1] caractéristique pour P, et u une solution de (1) appartenant à $H^s(\Omega)$ avec $s = n/2 + m + \theta$, $\theta > 0$. On suppose que la restriction de u à $\Omega^-$ appartient à $H^s(\Sigma,k)$. Alors u appartient à $H^s(\Sigma,k)$ dans $\Omega$.

On peut supposer que $\Sigma$ est l'hyperplan d'équation $x_1 = 0$, auquel cas l'opérateur P est de la forme suivante

$$Pu = A_1 x_1\partial_1 u + A_2\partial_2 u + \dots + A_n\partial_n u + A_o u$$

où les $A_j$ sont d'ordre m-1. On a

$$[P,x_1\partial_1]u = B_1 x_1\partial_1 u + B_2\partial_2 u + \dots + B_n\partial_n u + B_o u$$

où les $B_j$ sont d'ordre m-1. Pour $j \neq 1$, les commutateurs $[P,\partial_j]$ sont également de la même forme. On a

$$P(x_1\partial_1 u) = x_1\partial_1 F(x,u,\partial^\beta u) + [P,x_1\partial_1]u$$

et

$$x_1\partial_1 F(x,u,..,\partial^\beta u) = G(x,u,x_1\partial_1 u,\dots,\partial^\beta u,\partial^\beta x_1\partial_1 u,\dots)$$

(1) On sous-entend toujours que $\Sigma$ est fermé dans $\Omega$, et lisse. Cela écarte bien sûr le cas des caustiques.

par dérivation des fonctions composées, où $G$ est une fonction de classe $C^\infty$ de ses arguments. On a des expressions analogues pour $P(\partial_j u)$.

Soit $V_1$ le vecteur de composantes $u, x_1\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_n u$, il résulte de ce qui précède que $V_1$ est solution de

$$PV_1 + BV_1 = G_1(x, V_1, \ldots, \partial^\beta V_1, \ldots),$$

équation à laquelle on peut appliquer la remarque 3. On a $V_1 \in H^{s-1}(\Omega)$ par dérivation et $V_1 \in H^s(\Omega^-)$ résulte de $u \in H^s(\Sigma,1)$ dans $\Omega^-$. D'après le corollaire 2, on a $V_1 \in H^s(\Omega)$ et donc $u \in H^s(\Sigma,1)$ dans $\Omega$.

On procède ensuite par récurrence, le vecteur $V_\ell$ de composantes $(x_1\partial_1)^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ pour $|\alpha| \leq \ell$ étant solution d'une équation du type (2), et l'argument précédent s'appliquant pour $\ell \leq k$.

## § 5. LE CAS B

Soient $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ deux hypersurfaces caractéristiques. On suppose que par $\Delta = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, il ne passe aucune autre hypersurface caractéristique (ce qui est toujours le cas si $P$ est hyperbolique d'ordre 2). On pose $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Théorème B : Soit $u$ une solution de (1) appartenant à $H^s$ avec $s = n/2 + m + \theta$, $\theta > 0$. On suppose que la restriction de $u$ à $\Omega^-$ appartient à $H^s(\Sigma,k)$. Alors $u$ appartient à $H^s(\Sigma,k)$ dans $\Omega$.

Dans le cas intéressant $(\Delta \cap \Omega^- = \emptyset)$, et pour $k = \infty$ par exemple, l'hypothèse signifie que u est $C^\infty$ en dehors de $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, et que $u$ est une distribution de Fourier au voisinage de chacune de ces hypersurfaces. La conclusion implique que u est $C^\infty$ en dehors de $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, et est une distribution de Fourier en tout point de $\Sigma_1$ ou $\Sigma_2$ n'appartenant pas à $\Delta$.

On peut supposer que $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ ont pour équations respectives $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. L'opérateur $P$ est alors de la forme

$$P = K\partial_1\partial_2 + \sum_1^n A_j Z_j u + A_o u$$

en posant $Z_j = x_j\partial_j$ pour $j = 1,2$ et $Z_j = \partial_j$ sinon, avec $K$ d'ordre $m-2$ et les $A_j$ d'ordre $m-1$. Il résulte de l'hypothèse que $k(x,\xi) \neq 0$ pour $x_1 = x_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$ , où $k$ est le symbole principal de K. Il en résulte qu'il existe un cpérateur pseudo-différentiel $H$ d'ordre $2-m$ tel que

$$HK = I + \sum_1^n R_j Z_j + R_o ,$$

les $R_j$ étant d'ordre $-1$ . On a

$$P(Z_j u) = Z_j F(x,u,\ldots,\partial^\beta u,\ldots) + [P,Z_j]u$$

$$[P,Z_j]u = \Sigma C_j Z_j u + C_o u + D\partial_1\partial_2 u$$

les $C_j$ étant d'ordre $m-1$ et $D$ d'ordre $m-2$

$$D\partial_1\partial_2 u = DHPu + \sum_1^n E_j Z_j u + E_o u$$

où les $E_j$ sont d'ordre $m-1$ et où $DH$ est d'ordre 0.

En définitive, en notant $V_1$ le vecteur de composantes $u, Z_j u$, $j = 1,\ldots,n$ , on obtient un système

$$P\, V_1 + B\, V_1 = L\, G_1(x,V_1,\ldots,\partial^\beta V_1,\ldots)$$

qui est exactement du type (2). On en déduit comme dans le cas A que $V_1$ appartient à $H^s$ et donc que u appartient à $H^s(\Sigma,1)$, les $Z_j$ formant un système de générateurs de l'espace des champs de vecteurs tangents à $\Sigma$ . On conclut par récurrence.

## § 6. LE CAS C

On suppose que par une variété $\Delta$ de codimension 2, passent trois, et trois seulement, hypersurfaces caractéristiques $\Sigma_1, \Sigma_2$ et $\Sigma_3$.

(Ce sera toujours le cas si $P$ est hyperbolique d'ordre 3 et $\Delta$ de type espace). Il résulte de (H2) que l'une des composantes connexes de $\Sigma_3 \setminus \Delta$ coupe $\Omega^-$, on la notera $\Sigma_3^-$, l'autre étant noté $\Sigma_3^+$. On pose enfin $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

<u>Théorème C</u> : Soit $u$ une solution de (1) appartenant à $H^s$ avec $s = n/2 + m + \theta$, $\theta > 0$.

a) On suppose que la restriction de $u$ à $\Omega^-$ appartient à $H^s(\Sigma,k)$. Alors $u$ appartient à $H^s(\Sigma,k)$ dans $\Omega$.

b) On suppose de plus que la restriction de $u$ à $\Omega^-$ appartient à $H^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2,k)$. On a alors en outre que $u$ appartient à $H^{s+k}$ au voisinage de $\Sigma_3^-$ et à $H^t(\Sigma_3,1)$ au voisinage de $\Sigma_3^+$ pour $s \leq t \leq s + \theta + 1$ et $t + 1 \leq s + k$.

Dans le cas intéressant ($\Delta \cap \Omega^- = \emptyset$), la partie b) pour $k = \infty$ affirme essentiellement la chose suivante. Si, dans $\Omega^-$, $u$ est $C^\infty$ hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ et est une distribution de Fourier au voisinage de $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, alors, dans $\Omega$, $u$ sera $C^\infty$ en dehors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3^+$. En outre, $u$ appartient, en dehors de $\Delta$, à $H^s(\Sigma_1,\infty)$, à $H^s(\Sigma_2,\infty)$ et à $H^{s+\theta+1}(\Sigma_3^+,\infty)$. L'allure de $u$ au voisinage de $\Delta$ est bien sûr plus complexe à décrire.

Pour simplifier les notations, nous esquisserons la démonstration en dimension $n=2$ (coordonnées $x$ et $y$). On peut supposer que $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ ont pour équations respectives $f_1(x,y) = y = 0$ ; $f_2(x,y) = x = 0$ ; $f_3(x,y) = y-x = 0$. On aura à utiliser les champs de vecteurs $X_1 = \partial/\partial x$ ; $X_2 = \partial/\partial y$ ; $X_3 = \partial/\partial x + \partial/\partial y$.

Les champs de vecteurs tangents à $\Sigma$ admettent $(Z_o,Z_1)$ comme système de générateurs, avec

(4) $$Z_o = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y = f_1X_2 + f_2X_1 = f_1X_3 + f_3X_1 = f_2X_3 - f_3X_2$$

$$Z_1 = f_2f_3X_1 ,$$

les champs tels que $f_1 f_2 X_3$ étant combinaison des précédents.

On introduit l'opérateur pseudo-différentiel

$$M = E_{-1}\, f_1 X_2 X_3$$

où $E_{-1}$ est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre -1. On remarque qu'il résulte de (4) que l'on a

(5) $$E_{-1} f_2 X_1 X_3 \equiv M \quad \mathrm{mod}(\varepsilon_o Z_o + \varepsilon_o)$$

en notant $\varepsilon_k$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre k.

L'opérateur P se met sous la forme

(6) $$P = K\, X_1 X_2 X_3 + A_o Z_o + A_1 Z_1 + A_2 M + \text{ordre inférieur}$$

et on simplifiera encore le problème en supposant $K = 1$ (les arguments développés dans le cas B montrent comment travailler sans cette hypothèse), donc P d'ordre 3 et les $A_j$ d'ordre 2.

Un calcul direct montre que l'on a

$$[Z_j, P] \text{ et } [M,P] \in \varepsilon_o\, X_1 X_2 X_3 + \Sigma \varepsilon_2 Z_j + \varepsilon_2 M + \varepsilon_2$$

et donc, d'après (6) (avec $K = 1$)

(7) $$[Z_j, P] \text{ et } [M,P] \in \varepsilon_o P + \varepsilon_2 Z_o + \varepsilon_2 Z_1 + \varepsilon_2 M + \varepsilon_2$$

Comme dans le cas B, les termes en Pu seront absorbés grâce à l'équation. Le terme en Mu pose un problème nouveau qui est résolu grâce au lemme suivant.

Lemme : On a

(8) $$M^2 \in \Sigma \varepsilon_o Z_i Z_j + \Sigma \varepsilon_o Z_i M + \Sigma \varepsilon_{-2} Z_i P + \Sigma \varepsilon_o Z_i + \varepsilon_o M + \varepsilon_{-2} P + \varepsilon_o .$$

On a en effet, compte-tenu de (5)

$$M^2 \equiv E_{-1}f_1X_2X_3E_{-1}f_2X_1X_3 \quad \mathrm{mod}\ (\varepsilon_o MZ_o + \varepsilon_o M + \varepsilon_o)$$

$$M^2 \equiv (E_{-1})^2\ f_1f_2X_3X_1X_2X_3 \in \varepsilon_{-2}Z_1P$$

modulo les commutateurs et les termes issus de la différence entre $X_1X_2X_3$ et $P$ (voir (6) avec $K = 1$), qui appartiennent au second membre de la relation (8).

On raisonne alors comme dans les cas A et B avec deux différences importantes. La première apparaît dès la première étape : on déduit facilement de (7) que l'on a

$$P\begin{pmatrix} u \\ Z_o u \\ Z_1 u \\ Mu \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} u \\ Z_o u \\ Z_1 u \\ Mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\ldots\partial^\beta u) \\ LG_o(\ldots,\partial^\beta u,\partial^\beta Z_o u,\ldots) \\ LG_1(\ldots,\partial^\beta u,\partial^\beta Z_1 u,\ldots) \\ MF(\ldots,\partial^\beta u,\ldots) \end{pmatrix}$$

qui n'est pas du type (2). On a toutefois

$$MF(\ldots,\partial^\beta u,\ldots) = M(Au+r) = A(Mu) + [A,M]u + Mr$$

avec $A \in \mathrm{Op}\ \Sigma^{m-1}_{\theta+1}$ ; $[A,M] \in \mathrm{Op}\ \Sigma^{m-1}_{\theta}$ ; $Mr \in H^{s-m+\theta}$ et on obtient un système de type (3).

L'autre différence apparaît au niveau des relations de récurrence. Il n'est pas possible d'accepter des termes en $M^\ell u$ dans les vecteurs colonne, car les restes et les opérateurs du calcul paradifférentiel deviendraient de plus en plus mauvais avec $\ell$. On peut en fait avoir les relations suivantes :

$$(9) \qquad P\begin{pmatrix} Z^\alpha u \\ \\ MZ^\beta u \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} Z^\alpha u \\ \\ MZ^\beta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\alpha G(\ldots,\partial^{\beta'} Z^{\alpha'} u,\ldots) \\ \\ L_\beta MG(\ldots,\partial^{\beta'} Z^{\beta''} u,\ldots) \end{pmatrix}$$

avec $|\alpha|$, $|\alpha'| \leq \ell$ ; $|\beta|$, $|\beta'|$ , $|\beta''| \leq \ell-1$ ; $L_\alpha$, $L_\beta \in \varepsilon_o$ .

Dans le passage de $\ell$ à $\ell+1$ , il apparaît des termes en $M^2u$, mais on les exprime en fonction des autres à l'aide de (8).

La démonstration de la partie b) du théorème C n'est pas difficile. Pour $\ell \leq k$ , le vecteur solution de (9) appartient à $H^s$, et ses singularités se propagent le long des bicaractéristiques jusqu'à l'ordre $s + \theta + 1$. Ce vecteur appartient donc, sur $\Sigma_3$ , à $H^t$ pour $t = \mathrm{Min}(s+k-1, s+\theta+1)$ ce qui prouve le résultat annoncé sur $\Sigma_3^+$. Quant à la régularité sur $\Sigma_3^-$ , qui est inclus dans le domaine d'influence $\tilde{\Omega}$ de $\Omega^-$ , elle est immédiate. Il suffit par exemple d'appliquer le corollaire 2 un nombre suffisant de fois, en remplaçant $\Omega$ par $\tilde{\Omega}$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Prépublication, Dept. Math. Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay(France)

[2] B. Lascar : Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. C.R. Acad. Sc. Paris 287 A (1978) 527-529.

[3] Y. Meyer : Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires. Séminaire Bourbaki 32ème année, 1979/1980, N° 560.

[4] J. Rauch, M. Reed : Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations in one space variable (preprint).