L. Boutet de Monvel

Variétés de contact quantifiées

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

VARIETES DE CONTACT QUANTIFIEES

par L. BOUTET DE MONVEL

Exposé n° III

16 Octobre 1979

Soit X une variété C^∞ compacte. L'algèbre $\mathcal{D}(X)$ des opérateurs pseudo-différentiels sur X jouit des propriétés suivantes : c'est une algèbre filtrée, qui opère sur la chaîne des espaces de Sobolev $H^s(X)$ - si $\mathcal{D}^m$ désigne l'ensemble des o.p.d. de degré $\leq m$, un opérateur $P \in \mathcal{D}^m$ opère linéairement et continument de $H^s(X)$ dans $H^{s-m}(X)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Elle donne lieu à un calcul symbolique : si $P \in \mathcal{D}^m$, son symbole (principal) $\sigma_m(P)$ est une fonction C^∞ homogène de degré m sur le cône symplectique $T^*X\setminus 0$ (fibré cotangent de X privé de la section nulle) ; l'application σ_m est en fait une surjection linéaire de $\mathcal{D}^m$ sur l'ensemble des fonctions C^∞ homogènes de degré m, de noyau $\mathcal{D}^{m-1}$. On a enfin

$$\sigma_{m+m'}(P \circ P') = \sigma_m(P)\ \sigma_{m'}(P')$$

$$\sigma_{m+m'-1}(P \circ P' - P' \circ P) = \frac{1}{i}\{\sigma_m(P), \sigma_{m'}(P')\}$$

où $\{\ \ \}$ est le crochet de Poisson de T^*X. (1)

L'objet de cet exposé est de décrire comment on peut, à tout cône symplectique Σ de base compacte, attacher de façon presque canonique une chaîne d'espaces de Hilbert H^s_Σ et une algèbre filtrée $\mathcal{D}_\Sigma = \cup\, \mathcal{D}^m_\Sigma$ donnant lieu à un calcul symbolique analogue.

Dans cet exposé, sauf mention du contraire, les opérateurs pseudodifférentiels (ou intégraux de Fourier) utilisés sont réguliers (ou "classiques"), c'est à dire que leur symbole total a un développement asymptotique de la forme $a(X,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{m-k}(x,\xi)$, où m est entier et où pour chaque entier k, a_{m-k} est homogène de degré entier m-k en ξ.

DESCRIPTION DES RESULTATS

1. Variétés de contact : Soit X une variété de dimension impaire 2n-1. Une forme de contact sur X est une 1-forme α telle que $\alpha\,(d\alpha)^{n-1}$ ne s'annule en aucun point de x. Une structure de contact orientée sur X est la donnée d'une classe d'équivalence de formes de contact proportionnelles, de rapport C^∞ et >0, sur X. Il revient au même de se donner un sous fibré en demi-droites $\Sigma \subset T^*X\setminus 0$ (les formes de contact sont les sections de Σ) symplectique en tant que sous variété de $T^*X\setminus 0$, T^*X étant

---

(1) $\mathcal{D}$ est en outre complète pour la filtration $\mathcal{D} = \cup\, \mathcal{D}^m$, i.e. si $P_{m-k} \in \mathcal{D}^{m-k}$ $(k = 0,1,\dots)$ il existe $P \in \mathcal{D}^m$ tel que pour tout entier $N \geq 0$ le reste $P - \sum_{k<N} P_{m-k}$ appartienne à $\mathcal{D}^{m-N}$.

muni de sa structure symplectique canonique (qui s'écrit localement $\Sigma d\xi_j \wedge dx_j$, (x_j) étant un système de coordonnées locales sur X, (ξ_j) le système dual sur la fibre de T^*X). Il y a ainsi correspondance entre variétés de contact orientées et cônes symplectiques.

2. O.I.F. adaptés : Soient X et X' deux variétés C^∞ compactes, $\Sigma \subset T^*X\setminus 0$ et $\Sigma' \subset T^*X'\setminus 0$ deux sous cônes C^∞ symplectiques, $\chi : \Sigma \to \Sigma'$ un isomorphisme de cônes symplectiques. Nous dirons qu'un opérateur intégral de Fourier (O.I.F.) à phase complexe A est adapté à χ si

· (i) la relation canonique complexe associée à A est >> 0 au sens de [5], de partie réelle le graphe de χ

(ii) le symbole de A est elliptique.

Autrement dit A est défini localement par une intégrale :
$Au(x') = \int e^{i\varphi(x',x,\theta)} a(x',x,\theta)u(x)dx\,d\theta$, où le symbole a est elliptique, et où φ est une fonction phase de partie imaginaire ≥ 0, non dégénérée, telle que l'ensemble des points critiques réels $(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j} = \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\theta_j} = 0)$ soit une sous variété conique C^∞, le long de laquelle Im φ est transversalement elliptique, et telle que l'application différentielle : $(x',x,\theta) \mapsto (x',d_{x'}\varphi,x,-d_x\varphi)$ soit un isomorphisme local de la variété critique réelle sur le graphe de χ.

On vérifie aisément grâce au calcul symbolique de [5], que si A est adapté à χ et B à χ', $B \circ A$ est adapté à $\chi' \circ \chi$, et A^* est adapté à χ^{-1}. On vérifie aussi que, χ étant donné, il existe toujours un O.I.F. A adapté à χ.

Exemple : L'opérateur de Hermite H : $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+p})$ qui à une fonction u(x) associe $Hu(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi - \frac{1}{2}|y|^2|\xi|}\hat{u}(\xi)d\xi$ est un O.I.F. adapté. Ici on a $X = \mathbb{R}^n$, $X' = \mathbb{R}^{n+p}$, $\Sigma = T^*X\setminus 0$, $\Sigma' \subset T^*\mathbb{R}^{n+p}\setminus 0$ est le sous cône d'équations $y = \eta = 0$, et χ est l'application $(x,\xi) \mapsto (x,0,\xi,0)$.

On peut montrer (cela résulte par exemple de [1] que, microlocalement, tout O.I.F. adapté est composé d'opérateurs tels que H ou son adjoint H^* , et d'opérateurs intégraux de Fourier usuels (à phase réelle) elliptiques. De façon précise, si $n = \frac{1}{2}\dim\Sigma$, $n+p = \dim X$, $n+p' = \dim X'$, et si A est adapté à χ , il existe microlocalement des O.I.F. elliptiques F de X dans $\mathbb{R}^{n+p}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^{n+p'}$ dans X', associés à des transformations canoniques ϕ, ϕ' tels que $A \sim H' \circ H^* \circ F$, où H est comme ci dessus, et H' de même, $\mathbb{R}^{n+p}$ étant remplacé par $\mathbb{R}^{n+p'}$. On a alors (localement) $\chi = \phi' \circ \phi|\Sigma$.

3. Structures de Toeplitz : Soit X une variété compacte, $\Sigma \subset T^*X\backslash 0$ un sous cône symplectique C^∞. On appelle structure de Toeplitz associée à Σ la donnée d'un sous-espace $H^o_\Sigma \subset L^2(X)$ tel que le projecteur orthogonal $S : L^2(X) \to H^o_\Sigma$ soit un O.I.F. adapté à l'application Id_Σ.

Par exemple, si X est le bord (supposé C^∞) d'un ouvert borné strictement pseudo convexe Ω de $\mathbb{C}^n$, le projecteur de Szegö de X définit une structure de Toeplitz sur X (cf. [2],[3]). Dans ce cas Σ est le demi cône engendré par la forme de contact $\frac{1}{i} d'\rho|_X$, si Ω est défini par l'inégalité $\rho < 0$ (où ρ est réelle C^∞, et $d\rho \neq 0$ sur X).

4. Algèbre de Toeplitz : Supposons qu'on s'est donné une structure de Toeplitz, de projecteur S, sur X. Alors S est continu dans $H^s(X)$ pour tout s réel, ainsi que dans $C^\infty(X)$ et $C^{-\infty}(X)$. On note H^s_Σ l'image $S(H^s(x))$, $H^\infty_\Sigma = S(C^\infty(X)) = \cap H^s_\Sigma$, $H^{-\infty}_\Sigma = S(C^{-\infty}(X)) = \cup H^s_\Sigma$. Si P est un opérateur pseudodifférentiel de degré m sur X, l'opérateur $S_o P$ induit un opérateur continu $T_p : H^s_\Sigma \to H^{s-m}_\Sigma$ pour tout s. On appelle algèbre de Toeplitz et on note $\mathcal{D}_\Sigma$ l'ensemble de ces opérateurs induits (ils forment bien une algèbre); $\mathcal{D}^m_\Sigma$ désigne l'ensemble de ceux de ces opérateurs qui sont de degré $\leqslant m$ (i.e. on peut choisir P de degré $\leqslant m$).

Microlocalement, S est de la forme $F \circ H \circ H^* \circ F^*$, où H est l'opérateur de Hermite ci-dessus et où F est un O.I.F. elliptique, avec $H^* \circ F^* \circ F \circ H \sim Id$, de sorte que l'application qui à T_p associe $H^* \circ F^* \circ P \circ F \circ H$ est un isomorphisme d'algèbres de l'algèbre de Toeplitz sur l'algèbre des o.p.d. de $\mathbb{R}^n$ $(n = \frac{1}{2} \dim \Sigma)$. On a ainsi construit une algèbre avec les propriétés annoncées : $\mathcal{D}_\Sigma$ est filtrée (par les $\mathcal{D}^m_\Sigma$) et opère sur la chaîne d'espaces de Hilbert H^s_Σ ; si $T_p \in \mathcal{D}^m_\Sigma$ $(T_p = S_o P)$, on pose $\sigma_m(T_p) = \sigma(P)|_\Sigma$: on a bien les formules de calcul symbolique

$$\sigma_{m+m'}(P \circ P') = \sigma_m(P)\, \sigma_m(P')$$

$$\sigma_{m+m'-1}(P \circ P' - P' \circ P) = \frac{1}{i}\{\sigma_m(P), \sigma_{m'}(P')\}_\Sigma$$

(qu'on obtient en transportant les formules de calcul symbolique des o.p.d. grâce à l'isomorphisme microlocal ci-dessus).

5. Résultats

Théorème 1 : Soit X une variété C^∞ compacte, $\Sigma \subset T^*X \setminus 0$ un cône symplectique C^∞. Il existe toujours une structure de Toeplitz associée à Σ.

Cette structure est presque canonique, au sens suivant : si X' est une deuxième variété C^∞ compacte, $\Sigma' \subset T X' \setminus 0$ un deuxième cône symplectique, $\chi : \Sigma \to \Sigma'$ un isomorphisme, il existe un O.I.F. A adapté à χ. Si alors S et S' sont les projecteurs de structures de Toeplitz associées à Σ et Σ', l'opérateur $S' \circ A \circ S$ se comporte comme un O.I.F. elliptique ; en particulier son noyau est de dimension finie dans H^s_Σ, son image est fermée de codimension finie dans H^s_Σ, pour tout s, et les deux algèbres $\mathcal{D}_\Sigma$ et $\mathcal{D}_{\Sigma'}$, opérant sur les chaînes H^s_Σ, H^s_Σ sont isomorphes à un facteur de dimension finie près.

Lorsque X est une variété de contact orientée, $\Sigma \subset T^*X \setminus 0$ le cône symplectique définissant la structure de contact, on parlera de "structure de contact quantifiée" au lieu de "structure de Toeplitz" (c'est une quantification, au même sens que les O.I.F. sont une quantification des transformations symplectiques). Dans ce cas on peut préciser l'unicité indiquée ci-dessus :

Théorème 1 bis : Soit X une variété de contact orientée, compacte, G un groupe compact de transformation de contact de X. Il existe une structure de contact quantifiée invariante par G.

INDICATIONS SUR LES DEMONSTRATIONS

6. Je ne donnerai pas ici la démonstration des résultats ci-dessus, et me contenterai de donner quelques indications. Le problème est de construire S globalement. La construction se fait en deux étapes, dont la première est de construire la relation canonique complexe $\mathcal{C}$ associée à S. Cette relation doit être $\gg 0$ au sens de [5], de partie réelle la diagonale de Σ, et on doit avoir $\mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C}^*$. La difficulté est que ces conditions ne déterminent pas localement $\mathcal{C}$ de façon unique. On remplace alors ces conditions par les suivantes : $\mathcal{C}$ est $\gg 0$, de partie réelle la diagonale de Σ, et l'idéal $I_\mathcal{C}$ des fonctions qui s'annulent sur $\mathcal{C}$ contient une fonction C^∞ de $T^*X \times T^*X$ dans $\mathbb{R}$, de la forme $(x,y) \mapsto q(x)$ (ne dépendant que de la première variable), où q est une fonction C^∞ sur $T^*X \setminus 0$, homogène, positive, nulle sur Σ, > 0 hors de Σ, et transversalement elliptique le long de Σ. Ces nouvelles conditions déterminent $\mathcal{C}$ de façon unique, et impliquent $\mathcal{C} = \mathcal{C} \circ \mathcal{C} = \mathcal{C}^*$; si q est invariante par un groupe G de transformations symplectiques, il en est de même de $\mathcal{C}$; et si G est compact, on peut toujours remplacer q par sa moyenne sur G, qui est invariante.

Deuxième étape : Une fois construite C, on choisit n'importe quel O.I.F. S_o de degré 0 associé à $\mathcal{C}$, tel que $S_o = S_o^*$ et $\sigma(S_o) = 1$ sur diag Σ. Alors S_o est adapté à Id_Σ ; $S_o^2 - S_o$ est de degré 0, de symbole nul sur diag Σ de sorte que (d'après [1]) c'est en fait un opérateur continu de $L^2(X)$ dans $H^{1/2}(X)$, donc compact dans $L^2(X)$, et le spectre de S_o consiste d'une suite de points réels qui s'accumulent en 0 et 1. Si alors F est une fonction holomorphe au voisinage de spec S_o, réelle (i.e. $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$), ne prenant que les valeurs 0 et 1 ($F = F^2$), nulle au voisinage de 0 et égale à 1 au voisinage de 1, l'opérateur $S = F(S_o)$ est encore un O.I.F. adapté à Id_Σ , et c'est un projecteur orthogonal.

Si X est une variété de contact, G un groupe compact de transformations de contact de X, et si on a choisi $\mathcal{C}$ invariante par G, on peut remplacer S_o par sa moyenne, qui a les mêmes propriétés que S_o et est invariante par G ; alors $S = F(S_o)$ est invariant par G .

2. Lorsque S est le projecteur de Szegö d'une structure complexe tangentielle, on dispose encore du complexe de Cauchy-Riemann tangentiel $\bar{\partial}_b$. Si X est une variété de contact quantifiée, il existe un objet analogue. Je me contenterai ici de décrire le résultat.

Soit donc X une variété de contact quantifiée (compacte), $\Sigma \subset T^*X\setminus 0$ le cône définissant la structure de contact, S le projecteur. Notons L le sous-fibré vectoriel de T^*X engendré par Σ ($L = \Sigma \cup (-\Sigma) \cup$ (section nulle)

Il existe un fibré vectoriel complexe V sur X, égal au quotient T^*X/L muni d'une structure complexe convenable, et un complexe d'opérateurs pseudodifférentiels de degré 1

$$\bar{D} : 0 \to C^\infty(X) \xrightarrow{\bar{D}_o} C^\infty(X,V) \xrightarrow{\bar{D}_1} C^\infty(X, \Lambda^2 V) \to \dots \xrightarrow{\bar{D}_{n-2}} C^\infty(X, \Lambda^{n-1}V) \to 0$$

tels que

1) Le symbole de $\bar{D}$ est l'opérateur $\sigma(\bar{D})(\xi).u = a(\xi) \wedge u$, où a est une section C^∞ de V sur $T^*X\setminus 0$, tangente à la projection linéaire canonique $T^*X \to V$ le long de Σ.

2) $\bar{D}$ est elliptique hors de L, sous-elliptique (avec "perte de $\frac{1}{2}$ dérivées"), sauf en degré 0 le long de Σ , et sauf en degré n-1 le long de $-\Sigma$.

(La condition 2) est une condition de signe sur les crochets de Poisson des coordonnées de a et de $\bar{a}$, et détermine complètement la structure complexe de V).

3) H^{o}_{Σ} est fermé, de codimension finie, dans Ker $\bar{D}_o \cap L^2(X)$.

Ces conditions impliquent que Im $\bar{D}_{n-2} \cap L^2(X, \Lambda^{n-1}V)$ est fermé, et que le projecteur orthogonal S' sur le complémentaire orthogonal de cet espace est analogue à S, mais porté par $(-\Sigma)$ (c'est un O.I.F. adapté à l'application identique de $-\Sigma$). Elles impliquent en outre qu'il existe une suite d'o.p.d. $E = (E_{n-1},\dots,E_2,E_1)$ non réguliers, de type (1/2,1/2) et de degré $-\frac{1}{2}$, telle que $\bar{D}E + E\bar{D} = Id - S - S - R$, où R est un projecteur de rang fini, à noyau C^∞.

Si enfin G est un groupe compact de transformations de contact de X, on peut choisir V muni d'une action de G (au-dessus de X), et $\bar{D}$ équivariant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics... Comm. Pure and Appl. Math. 27 (1974) 585-639.

[2] L. Boutet de Monvel : On the index of Toeplitz operators of several complex variables. Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.

[3] L. Boutet de Monvel : Opérateurs de Toeplitz de plusieurs variables complexes, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé n°7.

[4] L. Boutet de Monvel et V. Guillemin : The spectral theory of Toeplitz operators. A paraître.

[5] A. Melin et J. Sjostrand : Fourier integral operators with complex phase functions. Lecture Notes, Springer Verlag n°459, 120-223.

***