H. M. MAIRE

Résolubilité et hypoellipticité de systèmes surdéterminés

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1979-1980

RESOLUBILITE ET HYPOELLIPTICITE DE SYSTEMES SURDETERMINES

par H. M. MAIRE

Exposé n° V

13 Novembre 1979

Considérons le système d'équations pseudo-différentielles

(1) $L_j u = \dfrac{\partial u}{\partial t_j} + b_j(t,D_x)u = f_j, \; j = 1,\dots,\nu \quad , \quad t \in \Omega \subset \mathbb{R}^\nu \quad , x \in \mathbb{R}^n ,$

où les opérateurs b_j sont d'ordre 1 et satisfont $\partial_{t_j} b_k = \partial_{t_k} b_j$, ce qui donne $[L_j,L_k] = 0$; nous supposerons d'emblée $(b_1,\dots,b_\nu)(t,\xi) = \mathrm{grad}_t B(t,\xi)$ pour une fonction B réelle positivement homogène de degré 1 en ξ. Dans [5], F. Treves a donné une condition (ψ) portant sur les composantes connexes des sous-niveaux de $t \mapsto B(t,\xi)$ nécessaire et suffisante pour la résolubilité de (1) lorsque $f_j \in C^\infty(\Omega;H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^n))$. D'autre part, il a étudié la régularité de (1) au sens suivant :

(2) $\forall\, \omega$ ouvert $\subset \Omega$, $u \in C^\infty(\omega;H^{-\infty})$, $f_j \in C^\infty(\omega;H^{+\infty}) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega;H^{+\infty})$.

La condition proposée pour la validité de (2), savoir $\forall\,\xi \neq 0$, $t \mapsto B(t,\xi)$ n'a pas de minimum local dans Ω, est nécessaire; elle est suffisante lorsque $\nu = 1$ ou que $t \mapsto B(t,\xi)$ n'a que des points critiques non dégénérés, mais n'est pas suffisante en général (cf. Maire [3] ou l'exemple 12 ci-dessous). Nous présentons ici une condition (R) nécessaire et suffisante pour (2); elle fait intervenir la décroissance de B, localement uniformément en ξ, le long de courbes tracées dans Ω. La suffisance de (R) est obtenue par l'existence d'un noyau régulier inverse à gauche.

L'hypoellipticité de (1) lorsque b_j est différentiel,

(3) $\forall\, \omega\times P$ ouvert $\subset \Omega\times\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\omega\times P)$, $f_j \in C^\infty(\omega\times P) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega\times P)$,

entraîne (2), donc (R). L'exemple 12 met en évidence un système analytique-hypoelliptique non hypoelliptique (cf. Baouendi-Treves [1]). Nous ne savons pas si (R) est suffisante pour (3) ; par contre, une condition plus forte (RR) entraîne la sous-ellipticité de (1), donc (3), lorsque les coefficients sont analytiques. Pour tester (RR), il suffit de comparer, au voisinage de chaque $(t_o,\xi_o) \in \Omega\times S^{n-1}$, $|b(t,\xi)|$ avec la variation positive de $B(t,\xi)$ le long des courbes intégrales de $-b(t,\xi_o)$.

Enfin, nous montrons par un exemple l'existence de systèmes différentiels (1) à coefficients analytiques qui sont hypoelliptiques mais non sous-elliptiques, ni semi-globalement résolubles (cf. Proposition 20) . L'hypoellipticité découle ici de la construction d'un noyau très régulier inverse à gauche.

§ 1. NOTATIONS

Soient n, ν deux entiers ≥ 1 et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\nu}$. Considérons une fonction réelle $B \in C^{\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus 0)$ positivement homogène de degré 1 en la seconde variable ξ et notons b la 1-forme dérivée extérieure de B par rapport à la première variable $t \in \Omega$:

$$b(t,\xi) = \sum_j \frac{\partial B}{\partial t_j}(t,\xi)dt_j = \sum_j b_j(t,\xi)dt_j \ .$$

Pour $s \in \mathbb{R} \cup (\pm\infty)$, soit $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev d'ordre s. A l'aide de b_j, nous définissons un opérateur $b_j(t,D_x) : C^{\infty}(\Omega;H^s) \to C^{\infty}(\Omega;H^{s-1})$ par :

$$b_j(t,D_x)u(t,x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}b_j(t,\xi)\hat{u}(t,\xi)d\xi \ ,$$

où $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^n$. En posant $b(t,D_x)u = \sum_j b_j(t,D_x)u\, dt_j$, on peut définir l'opérateur

$$\mathbb{D} = d_t + b(t,D_x) : C^{\infty}(\Omega;H^{\pm\infty}) \to \Lambda^1C^{\infty}(\Omega;H^{\pm\infty})$$

à valeurs dans l'espace des 1-formes sur Ω à coefficients dans $C^{\infty}(\Omega;H^{\pm\infty})$. Avec ces notations, le système (1) s'abrège $\mathbb{D}u = f$. L'opérateur $\mathbb{D}$ agit naturellement dans l'espace des p-formes et donne un complexe (car b est fermée) d'opérateurs différentiels pseudo-différentiels (cf. Trèves [5]). Nous ne nous accupons ici que du degré 0 de ce complexe.

Par construction, l'opérateur $\hat{\mathbb{D}}$ défini par $\hat{\mathbb{D}}\hat{u} = (\mathbb{D}u)^{\wedge}$ a l'expression

$$\mathbb{D} = d_t + b(t,\xi) = e^{-B(t,\xi)}d_t\, e^{+B(t,\xi)}.$$

Rappelons que lorsque $\nu = 1$, i.e. on a une seule équation, des conditions nécessaires et suffisantes pour la résolubilité et la régularité de D sont connues (cf. Nirenberg-Treves [4]) :

- D est localement résoluble dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, $b(.,\xi)$ évite le changement de signe +, − ;
- D est hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $b(.,\xi)$ évite le changement de signe −, + et ne s'annule dans aucun intervalle ouvert de Ω .

§ 2. RESOLUBILITE SEMI-GLOBALE

Etant donné $f \in \Lambda^1 C^\infty(\Omega\,;H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^n))$ et ω ouvert $\subset\subset \Omega$, nous cherchons $u \in \mathcal{D}'(\omega;H^{-\infty})$ telle que $\mathbb{D}u = f$ dans ω. Comme (1) est surdéterminé, f doit satisfaire des conditions de compatibilité :

$$\exists\ v \in C^\infty(\Omega;L^2_{loc}) \text{ tel que } e^B\hat{f} = d_t v,\ \xi\text{-presque partout.} \tag{4}$$

Nous noterons $\mathcal{B}C^\infty(\Omega;H^{+\infty})$ l'espace des 1-formes f satisfaisant (4).

Remarquons que (4) pour f n'entraîne pas l'existence de $u \in \mathcal{D}'(\omega;H^{-\infty})$ avec $\mathbb{D}u = f$, car (4) ne précise pas la croissance de $e^{-B}v(= \hat{u})$. Lorsque Ω est simplement connexe, (4) équivaut à : $d_t\, e^B\hat{f} = 0$, ξ-presque partout.

La notation suivante est utile pour ω ouvert de Ω, $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$: $\omega(\xi,r) = \{t \in \omega\ ;B(t,\xi) < r\}$.

Définition 1 : Nous dirons que B satisfait (ψ) dans Ω si, pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ il existe un ouvert $\omega' \subset\subset \Omega$ contenant ω tel que :

$$\begin{array}{l} \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, r \in \mathbb{R},\ \forall\, t_1,\, t_2 \in \omega(\xi,r), \\ (t_1,t_2) \text{ reliables dans } \Omega \Longrightarrow (t_1,t_2) \text{ reliables dans } \omega'(\xi,r). \end{array} \tag{5}$$

En particulier, si Ω est connexe, (5) devient :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, r \in \mathbb{R},\ \text{tout couple de points de } \omega(\xi,r) \text{ est reliable dans } \omega'(\xi,r). \tag{6}$$

La condition (ψ) est microlocalisable.

Exemple 2 : $\nu = 1$, Ω intervalle ouvert. On a : B satisfait (ψ) dans Ω $\Longleftrightarrow$ b évite le changement de signe +,- .

Exemple 3 : Supposons que, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\setminus 0$, $t \longmapsto B(t,\xi)$ n'a que des points critiques non dégénérés. Alors, d'après le lemme de Morse avec paramètres, B est localement de la forme :

$$B(t,\xi) = B(t_o,\xi) + |\xi|Q(t - t_o),$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée. On voit que B satisfait (ψ) dans Ω si et seulement si l'indice de chaque point critique de $B(.,\xi)$ est différent de 1.

Exemple 4 : $\nu = 2$, $n = 2$, $\Omega =]-1,1[^2$, $\xi = \rho(\cos\theta ,\sin\theta)$,
$B(t,\xi) = -\rho\ (t_2 + 2)(2t_1^3 - 3\theta\ t_1^2 + \theta^\ell)$, $\ell > 0$, au voisinage de $\theta = 0$.
Alors B ne satisfait pas (ψ) si $\ell \geq 3$. En effet, pour $\ell = 3$ et $\theta > 0$, par exemple, $\omega(\xi,0) = \{(t_1,t_2) \in \omega\ ;\ -\theta/2 < t_1 \neq 0\}$ n'est pas connexe.

Remarque : Lorsque Ω est connexe, (ψ) entraîne que les sous-niveaux $\Omega(\xi,r) = \{t \in \Omega\ ; B(t,\xi) < r\}$ sont connexes pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$. Cette propriété n'est malheureusement pas suffisante.

Théorème 5 : (Treves [5]) : La condition (ψ) est nécessaire et suffisante pour que :

(7) $\forall\ \omega \subset\subset \Omega, \forall\ f \in \mathcal{B}C^\infty(\Omega;H^{+\infty})$, $\exists\ u \in \mathcal{D}'(\omega;H^{-\infty})$ tel que $\mathbb{D}\,u = f$ dans ω .

De plus, quand (ψ) est satisfaite, on trouve $u \in C^\infty(\omega;H^{+\infty})$ et on peut aussi résoudre pour $f \in \mathcal{B}\ C^\infty(\Omega;H^{-\infty})$.

Le théorème 5 a un analogue pour les formes de degré supérieur. La propriété (7), appelée résolubilité semi-globale de $\mathbb{D}$ dans Ω est en général plus forte que la résolubilité locale. La preuve du théorème se fait, pour la nécessité par un argument classique d'analyse fonctionnelle et pour l'existence par la construction d'un noyau régulier inverse à droite de $\mathbb{D}$, qui, par transformation de Fourier provient d'un inverse à droite de d_t.

§ 3. $H^{\pm\infty}$-HYPOELLIPTICITE

Quand $\mathbb{D}$ satisfait (2), nous dirons que $\mathbb{D}$ est $H^{\pm\infty}$-hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Si,

(8) $\forall\ u \in C^\infty(\omega;H^{-\infty})$, $f \in \Lambda^1C^\infty(\omega;H^{+\infty}) \Longrightarrow u \in C^\infty(\omega;H^{+\infty})$,

a lieu, $\mathbb{D}$ est globalement $H^{\pm\infty}$-hypoelliptique dans $\omega \times \mathbb{R}^n$.

Pour chaque compact $K \subset \Omega$, m entier > 0 et $\xi \in \mathbb{R}^n\setminus 0$, nous définissons une norme sur $C^\infty(\omega)$ [resp. sur $\Lambda^1C^\infty(\omega)$] par :

$$(9) \qquad \| v \|_{K,m}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi|^m \sup_{t \in K} | \partial_t^\alpha e^{-B(t,\xi)} v(t) | \quad , \ v \in C^\infty(\omega) \ ,$$

[resp. par la norme produit] .

<u>Proposition 6</u> : L'opérateur $\mathbb{D}$ est globalement $H^{\pm\infty}$-hypoelliptique dans $\omega \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout compact $K \subset \omega$, il existe un compact $K' \subset \omega$, un entier $m' \geq 0$ et $C > 0$ tels que :

$$(10) \qquad \|v\|_{K,1}(\xi) < C \{\|v\|_{K',0}(\xi) + \|dv\|_{K',m'}(\xi)\}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \ \forall v \in C^\infty(\omega).$$

La preuve se fait par le théorème du graphe fermé appliqué au sous-espace de $C^\infty(\omega; L^2_{loc})$ des fonctions à décroissance rapide en ξ (cf. [3]).

Introduisons des fonctions qui mesurent la variation de $B(.,\dot{\xi})$, $\dot{\xi} \in S^{n-1}$; pour $t \in K$ compact $\subset \omega$ et $r \in \mathbb{R}_+$, soit :

$$\begin{aligned}
K(t,\dot{\xi};r) &= \{s \in K; B(s,\dot{\xi}) \leq B(t,\dot{\xi}) + r\} \\
K(t,\dot{\xi}) &= K(t,\dot{\xi};0), \\
K_o(t,\dot{\xi};r) &= \text{composante connexe de } t \text{ dans } K(t,\dot{\xi};r), \\
F_K(t,\dot{\xi};r) &= \sup\{B(t,\dot{\xi}) - B(s,\dot{\xi}) ; \ s \in K_o(t,\dot{\xi};r)\} \ , \\
F_K(t,\dot{\xi}) &= F_K(t,\dot{\xi};0).
\end{aligned}$$

Cette dernière fonction mesure la chute maximale de $B(.,\dot{\xi})$ le long de chemins contenus dans K, issus de t. Du point de vue de l'hypoellipticité, nous sommes intéressés à $F_K(t,\dot{\xi}) > 0$ puisqu'on a :

$$(11) \qquad e^{-B(t,\xi)} v(t) = e^{-(B(t,\xi) - B(s_o,\xi))} . e^{-B(s_o,\xi)} v(s_o)$$

$$+ \int_\gamma e^{-(B(t,\xi) - B(s,\xi))} . e^{-B(s,\xi)} dv(s), \quad v \in C^\infty(\omega).$$

où γ est une courbe reliant t à s_o dans ω ; cette formule permet de vérifier (10). Notons que pour $(t_o,\dot{\xi}_o) \in \Omega \times S^{n-1}$, l'existence d'un voisinage compact K de t_o tel que $F_K(t_o,\dot{\xi}_o) > 0$ entraîne que $B(., \dot{\xi}_o)$ n'a pas de minimum local en t_o. Mais la réciproque est fausse.

Pour tester (10), on aura même besoin de savoir que inf $F_K(t,\dot{\xi}) > 0$; comme $F_K(.,\dot{\xi})$ n'est pas semi-continue inférieurement, la positivité ponctuelle de F_K n'est pas suffisante en général. Par contre, on a le résultat suivant en employant la preuve du théorème (III.2.1) de Treves [5] :

Proposition 7 : Supposons que, pour tout compact $K \subset \omega \subset \Omega$ il existe un compact $K' \subset \omega$ contenant K et a > 0 tels que

(12) $$F_{K'}(t,\dot{\xi}) \geq a \ , \quad \forall\ (t,\dot{\xi}) \in K \times S^{n-1} .$$

Alors $\mathbb{D}$ est globalement $H^{\pm\infty}$-hypoelliptique dans $\omega \times \mathbb{R}^n$.

Cependant (12) n'est pas nécessaire pour (8) (cf. exemple 4). Raffinons (12) en introduisant une suite de fonctions $E^j_{K,\mu}$. Pour $\mu > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $t \in K \subset \Omega$ et $\dot{\xi} \in S^{n-1}$, soient :

$$E^o_{K,\mu}(t,\dot{\xi}) = F_K(t,\dot{\xi}),$$

$$E^j_{K,\mu}(t,\dot{\xi}) = F_K(t,\dot{\xi}\ ;\mu\ E^{j-1}_{K,\mu}(t,\dot{\xi})),\ j \geq 1,$$

$$E_{K,\mu}(t,\dot{\xi}) = \sup_{j>0} E^j_{K,\mu}(t,\dot{\xi}).$$

Définition 8 : On dit que B satisfait (R) dans ω si, pour tout compact $K \subset \omega$ il existe un compact $K' \subset \omega$ contenant K et $\mu' \geq 0$, $a > 0$ tels que :

(13) $$\forall\ (t,\dot{\xi}) \in K \times S^{n-1},\ E_{K',\mu'}(t,\dot{\xi}) \neq 0 \Rightarrow E_{K',\mu'}(t,\dot{\xi}) \geq a.$$

Cette condition est microlocalisable.

Remarque : Quand $B(.,\dot{\xi})$ n'a pas de minimum local dans ω et que $K'(t,\dot{\xi})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, (13) se simplifie en $E_{K',\mu'}(t,\dot{\xi}) \geq a$, $\forall\ (t,\dot{\xi}) \in K \times S^{n-1}$.

Exemple 9 : $\nu = 1$, Ω intervalle ouvert, $B(.,\dot{\xi})$ non constant dans aucun sous-intervalle ouvert de Ω . Alors B satisfait (R) dans ω si et seulement si $b(.,\xi) = \partial B/\partial t(.,\dot{\xi})$ évite le changement de signe −, + dans ω , pour tout $\dot{\xi} \in S^{n-1}$.

Exemple 10 : Cas non dégénéré, cf. exemple 3. Alors B satisfait (R) dans ω si et seulement si B n'a pas de minimum local dans ω , i.e. si l'indice de chaque point critique de $B(.,\dot{\xi})$ est $\neq 0$. En fait, (13) est équivalent à (12) dans ce cas.

Exemple 11 : Pour la fonction de l'exemple 4, B satisfait (R) dans un voisinage de O si et seulement si $\ell \leq 3$; (12) n'est satisfaite que pour $\ell < 3$.

Exemple 12 : $B(t,\xi) = t_1^4 t_2 \xi_2 + t_1^3 \xi_2 - 3t_1 \xi_1$ n'admet pas de minimum local dans $\mathbb{R}^2$ mais ne satisfait pas (R) dans ω si $0 \in \omega$. L'opérateur correspondant est différentiel à coefficients analytiques.

Exemple 13 (Treves) : $\nu = 2$, $n = 1$.

$$B(t,\xi) = \begin{cases} \xi e^{-1/t}(\sin(1/t_1) - t_1 t_2) & \text{si } t_1 > 0, \\ 0 & \text{si } t_1 = 0, \\ * & \text{si } t_1 < 0, \end{cases}$$

ne satisfait pas (R) dans ω dès que $0 \in \omega$.

Théorème 14 : L'opérateur $\mathbb{D} = d_t + d_t B(t,D_x)$ est $H^{\pm\infty}$-hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, B satisfait (R) dans ω et $B(.,\xi)$ n'est pas constant dans ω pour tout $\xi \neq 0$.

Esquisse de la démonstration : Il est immédiat que si B est constante dans $\omega \times \{\xi\}$ alors (10) n'a pas lieu, donc (8) non plus. Pour voir que (R) est nécessaire on montre d'abord qu'au voisinage K" de chaque point $t \in \omega$ et pour $K \subset \text{int } K"$, $\delta > 0$, on peut construire $v \in C^\infty(\omega)$ qui vaut 1 en t, dont le support est contenu dans $K_0"(t,\xi;\delta)$ et dont la variation dans K s'effectue dans $\{s \in K ; B(t,\dot{\xi}) - B(s,\dot{\xi}) < \delta/4\}$ Comme, de plus, on peut contrôler les dérivées de v, un choix astucieux de ρ et μ' permet de nier (10) lorsque (R) n'est pas satisfaite.

Pour la suffisance, on prouve (10) comme suit. Plaçons-nous d'abord en $(t,\dot{\xi}) \in K \times S^{n-1}$ tel que $E_{K',\mu'}(t,\xi) \neq 0$. Alors $E^k_{K',\mu'}(t,\dot{\xi}) \geq a'/2$, pour un k dépendant de $(t,\dot{\xi})$. Si $\rho \geq 0$ est donné, on doit avoir l'un des 3 cas ci-dessous, avec $E^j = E^j_{K',\mu'}(t,\dot{\xi})$:

(i) $\rho \leq e^{\rho E^0}$

(ii) $e^{\rho E^j} < \rho \leq e^{\rho E^{j+1}}$, pour un $j < k$

(iii) $e^{\rho E^k} \leq \rho$.

Quand (i) se présente, on choisit γ de (11) le long duquel B chute de $F_{K'}(t,\dot{\xi})$. Quand (ii) a lieu, on choisit un chemin le long duquel B chute de E^{j+1}, après une éventuelle augmentation de $\mu' E^j$. Quant à (iii), il donne $e^{\rho a'/2} \leq \rho$, et ne concerne donc qu'un ensemble borné de ρ , (10) avec $m' = \nu + \mu'$ découle de ces estimations pour $E_{K',\mu'}(t,\dot{\xi}) \neq 0$; les points restants sont limites de ceux-là.

Remarque : Notre preuve montre l'existence d'un noyau régulier à gauche pour $\mathbb{D}$.

§ 4. HYPOELLIPTICITE ET SOUS-ELLIPTICITE

Nous supposerons ici $\mathbb{D}$ différentiel.

L'hypoellipticité de $\mathbb{D}$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ est définie par (3). Supposons que $\mathbb{D}$ est hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$; en appliquant le théorème du graphe fermé à $C^\infty(\omega \times P)$, on obtient pour tout compact $K \times L \subset \omega \times P$ et tout $m > 0$ l'existence de $K' \times L' \subset \omega \times P$, $m' > 0$, $C > 0$ tels que :

(14) $$\|u\|_{K\times L,m} \leq C(\|u\|_{K'\times L',0} + \|\mathbb{D} u\|_{K'\times L',m'}),\ \forall\, u \in C^\infty(\omega \times P)\ ,$$

où

$$\|u\|_{K\times L,m} = \sup_{K\times L} \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} |\partial_t^\alpha \partial_x^\beta u| \ .$$

En choisissant $u(t,x) = e^{ix\xi - B(t,\xi)}v(t)$, pour $v \in C^\infty(\omega)$ dans (14), on obtient (10), puisque $\mathbb{D} u(t,x) = e^{ix\xi - B(t,\xi)}dv(t)$ et $\partial_x^\beta u(t,x) = (i\xi)^\beta u(t,x)$. D'après le théorème 14, nous avons montré :

Proposition 16 : Si $\mathbb{D}$ est hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$, alors $\mathbb{D}$ est $H^{\pm\infty}$-hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$, et par conséquent B satisfait (R) dans tout ouvert $\omega \subset \Omega$.

Nous ne savons pas si la $H^{\pm\infty}$-hypoellipticité entraîne l'hypoellipticité. Par contre, si la condition (RR) ci-dessous, plus forte que (R), est satisfaite, nous pouvons montrer que $\mathbb{D}$ est sous-elliptique (théorème 19), donc hypoelliptique.

Définition 16 : Soit $B \in C^\infty(\Omega \times S^{n-1})$ réelle, $b = \mathrm{grad}_t B$. On dit que B satisfait (RR) dans Ω si tout $(t_0, \dot\xi_0) \in \Omega \times S^{n-1}$ possède un voisinage compact $K \times L$ tel que :

(i) $b(t,\dot\xi) \neq 0$ pour $t \in K$ et $\dot\xi \in L\setminus\{\dot\xi_0\}$;

(ii) $B(., \dot\xi_0)$ n'a pas de minimum local dans Ω ;

(iii) pour toute courbe intégrale γ du champ de vecteurs $-b(t, \dot\xi_0)$ on a :

(15) $$\int_{\gamma \cap A(\dot\xi) \cap K} b(s,\dot\xi) = O(\inf_K |b(s,\dot\xi)|)\ ,\qquad \dot\xi \to \dot\xi_0\ ,$$

où $A(\dot{\xi}) = \{t \in \Omega;\ b(t,\dot{\xi}).b(t,\dot{\xi}_o) < 0\}$.

La condition (iii) compare la variation positive totale de $B(.,\dot{\xi})$ le long de $\gamma \cap K$ à la chute minimale de $B(.,\dot{\xi})$. Elle est certainement trop forte pour nos besoins mais a l'avantage de s'exprimer relativement facilement. De plus, (RR) même affaiblie en remplaçant "o" par "O" dans (15) entraîne (R) lorsque B est analytique en t. Dans l'exemple 4, B satisfait (RR) si et seulement si $\ell < 3$.

Proposition 17 : Soit B une fonction analytique réelle dans Ω sans minimum local. Alors pour chaque $t_o \in \Omega$, il existe un voisinage compact K de t_o, un compact $K' \subset \Omega$ et $\theta < 1$, $C > 0$ tels que pour tous $\rho \geq 0$ et $v \in C^\infty(\Omega)$, on a :

$$(16) \qquad \rho^{1-\theta} \sup_K e^{-\rho B} |v| \leq C(\sup_{K'} e^{-\rho B} |v| + \sup_{K'} e^{-\rho B}|dv|) .$$

La preuve repose sur l'inégalité de Lojasiewicz

$$(17) \qquad |\mathrm{grad}\ B| \geq |B|^\theta \quad , \qquad \theta < 1,$$

valable dans un voisinage de t_o. (En passant, notons que (17) n'est pas vraie avec paramètres). A l'aide de (17), on montre que si les courbes intégrales non constantes γ de $-\mathrm{grad}\ B$ sont paramétrées par la longueur d'arc, alors

$$B(\gamma(\tau)) - B(\gamma(\sigma)) \geq C(\sigma - \tau)^{1/(1-\theta)}$$

La relation (16), où K est remplacé par $K \cap B^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$, en découle. Comme B n'a pas de minimum local, tout $t \in K$ avec $B(t) = 0$ est limite de points où B est négatif, d'où (16) avec K remplacé par $K \cap B^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

Définition 18 : Nous dirons que $\mathbb{D}$ est sous-elliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\delta > 0$, $C > 0$ tels que, au sens de (9) :

$$(18) \qquad \|v\|_{K,\delta}(\xi) < C(\|v\|_{K,0}(\xi) + \|\mathbb{D}v\|_{K,0}(\xi)),\ \forall\ v \in C_o^\infty(K), \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Comme d'habitude, sous-elliptique entraîne hypoelliptique.

Théorème 19 : Soit B une fonction analytique réelle dans $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus (0)$, positivement homogène de degré 1 en ξ . Si B satisfait (RR) dans Ω , alors $\mathbb{D}$ est sous-elliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$.

Schéma de la démonstration : D'après les propriétés des ensembles sous-analytiques (cf. [2]), (15) se précise en :

$$\int_{\gamma \cap A(\dot\xi) \cap K} b(s,\dot\xi) \leq \inf_K |b(s,\dot\xi)|^\alpha$$

pour $\dot\xi$ voisin de $\dot\xi_o$, avec $\alpha > 1$.

D'autre part, (i) de la définition (16) donne l'existence de $\beta > 0$ tel que $|b(t,\dot\xi)| \geq |\dot\xi - \dot\xi_o|^\beta$, pour $(t,\dot\xi)$ voisin de $(t_o, \dot\xi_o)$. Avec $\theta < 1$ de la proposition 17 pour $B = B(.\ ,\dot\xi_o)$, on montre (18) pour

$$\delta < \min\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}, \frac{1-\theta}{\beta - 1 - \theta}, 1 - \theta\right) .$$

Notre méthode distingue plusieurs cas :

0. $\dot\xi = \dot\xi_o$. On applique la proposition 17 .

1. $\dot\xi \neq \dot\xi_o$, $\rho^{-1} < m(\dot\xi) = \inf|b(s,\dot\xi)|$. Dans (11), on choisit les courbes intégrales de $-b(t,\dot\xi)$.

2. $\dot\xi \neq \dot\xi_o$, $m(\dot\xi) \leq \rho^{\delta-1}$. Dans (11), on choisit les courbes intégrales de $-b(t,\dot\xi_o)$.

Proposition 20 : Soit $\Omega =]-1,1[^2$. Le système

$$\frac{\partial}{\partial t_1} + 3t_1^2(t_2+1)\, D_1 - 3D_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} + t_1^3\, D_1 \qquad\qquad (D_j = -i\,\frac{\partial}{\partial x_j}) ,$$

est hypoelliptique dans $\Omega \times \mathbb{R}^2$, mais n'est pas sous-elliptique ni semi-globalement résoluble dans $\Omega \times \mathbb{R}^2$.

Pour la preuve, il suffit de montrer l'existence d'un inverse à gauche très régulier par un choix convenable des courbes γ de (11).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, F. Treves : A paraître.

[2] H. Hironaka : Subanalytic sets, in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative algebra in honor of Y. Akisuki, Kinokunyia, Tokyo (1975).

[3] H. M. Maire : Hypoelliptic overdetermined systems of partial differential equations, to appear in Comm. PDE.

[4] L. Nirenberg, F. Treves : On local solvability of partial differential equations I, Comm. Pure Applied Math. 23 (1970), p.1-38.

[5] F. Treves : Study of a model in the theory of complexes of pseudo-differential operators, Ann. Math. 104 (1976), p.269-324.

*
* *
*