S. Mizohata

Sur l'unicité dans le problème de Cauchy

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 6 bis, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

SUR L'UNICITE DANS LE PROBLEME DE CAUCHY

par S. MIZOHATA

Exposé n° VIbis 20 Novembre 1979

§ 1. INTRODUCTION

On se propose d'étudier le problème suivant : étant donné une équation linéaire du type évolutionnel, non kowalewskien

$$\partial_t^m u(x,t) + \sum_{j=1}^{m} a_j(x,t;\partial_x)\ \partial_t^{m-j}\ u(x.t) = 0$$

avec la donnée initiale à $t = 0$, existe-t-il au moins une "solution nulle" locale ? Remarquons que l'existence des solutions nulles (locales) équivaut à dire que l'unicité (locale) des solutions ne subsiste plus. Ici la terminologie non kowalewskien signifie qu'il existe un j tel que ordre $a_j > j$. Ce problème a été soulevé par M. Goulaouic quand j'ai parlé en avril à ce séminaire. A propos de ce problème, Hörmander a montré que dans le cas où tous les a_j sont à coefficients constants, il existe toujours des solutions nulles même globalement ([3]). Mais dans le cas des coefficients variables, surtout quand les coefficients dépendent de x, le problème devient compliqué même si l'on se borne au cas où les coefficients sont analytiques. Sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à Persson [5] Baouendi-Goulaouic [1] , Treves [6] , Komatsu [4] et Birkeland-Persson [2] etc.

Pour éclaircir la situation, prenons le cas simple :

$$\partial_t u(x,t) = a_m(x,t)\ \partial_x^m u + a_{m-1}(x,t)\partial_x^{m-1} u + \ldots + a_o(x,t)u, \qquad m \geq 2$$

L'existence des solutions nulles au voisinage de l'origine est assurée quand

$$a_m(0,0) \neq 0 .$$

Le but de cette note est de montrer l'existence et la non-existence des solutions nulles dans le cas

$$a_m(0,0) = 0 .$$

Pour simplifier le problème, on va considérer l'équation de la forme

$$(1.1) \qquad x^{\ell}\ \partial_x^2 u(x,t) = a\ \partial_t u(x,t),$$

en supposant que la constante a est réelle et non zéro. Un article ultérieur traitera le même problème pour des cas plus généraux.

Dans ce qui suit, on dit que $u(x,t)$ est une solution nulle de (1.1) au voisinage V de l'origine, si u est continue et satisfait l'équation (1.1) au sens des distributions dans V, et que

$$(0,0) \in \operatorname{supp}[u] \subset \{t \geq 0\}$$

On va démontrer le

Théorème 1) Si ℓ est impair ou 0, il existe toujours une solution nulle ;

2) Si ℓ est pair, il en existe si et seulement si $a > 0$.

Note : La non-existence des solutions nulles au cas où ℓ est pair et $a < 0$ est contraire à ma conjecture antérieure, et la démonstration de ce point est la partie substantielle de cette note.

§ 2. CAS OU $\ell = 0,1$

On considère le cas $\ell = 1$.

$$x\,\partial_x^2 u = a\,\partial_t u. \tag{2.1}$$

Cette équation est du type fuchsien par rapport à x. On donne la donnée initiale :

$$u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(0,t) = \varphi_1(t) \ ,$$

où $\varphi_1(t)$ a son support à $t \geq 0$, et dont la classe de Gevrey est < 2. Par exemple,

$$\varphi_1(t) = \exp(-t^{-b}) \quad \text{avec } b > 1 \ .$$

Or la solution $u(x.t)$ de la forme

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} x^j\,\varphi_j(t) \tag{2.2}$$

satisfait notre demande. En effet, on a $\varphi_j = a^{j-1}\,\varphi_1^{(j-1)}/j.(j-1)!^2$.

§ 3. CAS OU $\ell > 2$

On cherche une solution particulière de (1.1) de la manière suivante. D'abord, on considère la solution dans la partie $x > 0$, $t > 0$. Posons

$$\xi = xt^{\sigma} \qquad (\sigma > 0),$$

et on considère (ξ, t) au lieu de (x,t) comme le système des variables indépendantes. Comme $\partial_x = t^{\sigma}\partial_{\xi}$, $\partial_t = \partial_t + (\sigma\xi/t)\partial\xi$, en posant $u(x,t) = v(\xi,t)$, on a

$$\xi^{\ell} t^{-(\ell-2)\sigma}\, \partial_{\xi}^{2} v = a[\partial_t v + (\sigma\xi/t)\partial_{\xi} v] .$$

Alors, en posant $\sigma = 1/\ell - 2$, et en supposant que v est indépendante de T, on a

$$\partial_{\xi}^{2} v - a\sigma\,\xi^{-(\ell-1)}\partial_{\xi} v = (\partial_{\xi} - a\sigma/\xi^{\ell-1})\,\partial_{\xi} v = 0 .$$

La solution est

$$\partial_{\xi} v = \exp(-a\sigma^2/\xi^{\ell-2}).$$

à un facteur constant près. On suppose maintenant $a > 0$. Alors

$$v(\xi) = \int_0^{\xi} \exp(-a\,\sigma^2/\xi^{\ell-2})d\xi$$

répond à notre demande. En effet, comme $\xi = xt^{\sigma}$ $(\sigma > 0)$, en complétant la définition de $u(x,t)$ par 0 pour $x \leq 0$, ou $t \leq 0$, on voit que $u(x,t)$ est une solution de (1.1) et qu'elle est indéfiniment différentiable.

Finalement, dans le cas où ℓ est impair, en changeant x par -x, on peut supposer toujours $a > 0$, ce qui démontre le théorème excepté les cas où $\ell = 2$ ou ℓ est pair et $a < 0$.

§ 4. CAS OU ℓ EST PAIR

On pose l'équation (1.1) sous la forme

(4.1) $$x^{2n}\,\partial_x^2 u = a\partial_t u \qquad (n \geq 1).$$

On considère la solution u pour $x > 0$. En posant

$$1/(n-1)x^{n-1} = y \ , \quad \text{pour } n \geq 2,$$

$$\log 1/x = y \ , \quad \text{pour } n = 1 \ ,$$

et $u(x,t) = v(y,t)$, l'équation (4.1) devient

$$\partial_y^2 v + \frac{n}{n-1}/y \ \partial_y v = a \ \partial_t v \ , \qquad n \geq 2 \tag{4.2}$$

$$\partial_y^2 v + \partial_y v = a \ \partial_t v \qquad , \qquad n = 1 \ . \tag{4.3}$$

Pour simplifier la notation, supposons $a = \pm 1$ dans (4.3). Si l'on pose

$$w(y,t) = \exp \{\frac{1}{2}y \pm \frac{1}{4}t\} v(y.t) \ ,$$

(4.3) devient

$$\partial_y^2 w = \pm \ \partial_t w \ . \tag{4.4}$$

Quant à (4.2), on considère le cas où $a < 0$. On suppose donc $a = -1$. En posant

$$w(y.t) = y^{\gamma/2} v(y.t) , \quad \text{où} \quad \gamma = n/n-1 \ ,$$

(4.2) devient

$$\partial_y^2 w + \gamma'/y^2 w = - \ \partial_t w \quad (\gamma' = \frac{\gamma}{2}(1 - \ \gamma/2) \geq 0). \tag{4.5}$$

D'abord (4.4) montre que dans le cas où $a > 0$,

$$w = t^{-1/2} \exp(-y^2/4t)$$

donne une solution nulle. On va donc considérer (4.5) en supposant simplement $\gamma' \geq 0$. Alors <u>en changeant t en -t</u> , (4.5) devient

$$\partial_y^2 w + \gamma'/y^2 w = \ \partial_t w \ , \tag{4.6}$$

qui est essentiellement l'équation de la chaleur. Explicitons les conditions sur w.

1) $w(g.t)$ est définie dans $D = \{(y,t); y \geq y_o (>0), t_o \leq t \leq 0\}$,

2) $w(y,0) = 0$, 3) il existe une constante positive c telle que

$$|w(y.t)| \leq e^{cy} \text{ , pour y assez grand}$$

Pour démontrer la partie 2) du Théorème, il suffit de démontrer la

Proposition : Sous les hypothèses ci-dessus, $w \equiv 0$ dans D.

Pour démontrer cette proposition, on utilise le lemme suivant.

Lemme : Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition, w a la propriété suivante : il existe un t'_o $(t_o < t'_o < 0)$ tel que pour tout A, on a

(4.7) $$|w(y,t)| < e^{-Ay} \text{ quand } y \to +\infty, \text{ et } t \in [t'_o, 0] .$$

Il en est de même de $\partial_t w(y,t)$ et $\partial_y w(y,t)$.

Admettons ce lemme. Pour simplifier la notation, supposons $t'_o = -1$, et désignons $D = \{(y,t); y \geq y_o, -1 \leq t \leq 0\}$. On considère l'estimation du type Carleman de

$$\iint_D \varphi_n^2(y,t)(\partial_t w - \partial_y^2 w - \gamma'/y^2 w)^2 dy\, dt,$$

en prenant

(4.8) $$\varphi_n(y,t) = \exp\{n(1+t)(y - y_o)\}$$

n étant paramètre positif tendant vers l'infini. Notons que $\varphi_n(y,t)$ est égale à 1 sur le bord de D excepté $\{t = 0\}$ où w s'annule avec toutes ses dérivées. On calcule l'intégrale, qui est 0, de la manière suivante :

$$\varphi_n(\partial_t w - \partial_y^2 w - \gamma'/y^2 w) =$$

$$= (\partial_t u + 2n(1+t)\partial_y u) - (\partial_y^2 u + n(y - y_o)u + n^2(1+t)^2 u + \gamma'/y^2 u) ,$$

où $u = \varphi_n w$. L'intégrale prend la forme

$$0 = \|\partial_t u + 2n(1+t)\partial_y u\|^2 + \|\partial_y^2 u + \ldots\|^2 + J_n .$$

Or, si l'on suppose que $w(y,t) \not\equiv 0$, il est facile de montrer que

$$J_n \geq \exp(\delta n) \quad \text{pour } n \text{ assez grand } (\delta > 0),$$

qui est évidemment absurde.

§ 5. PREUVE DU LEMME

Il existe une solution fondamentale $E(y,\eta,t-\tau)$ $(t \geq \tau)$ de (4.6), telle que $w(y,t)$ s'exprime par

$$w(y,t) = \int_{y_o}^{\infty} E(y,\eta;t-t_o)w(\eta,t_o)d\eta$$

$$- \int_{t_o}^{t} \{\partial_y E(y,y_o;t-\tau)w(y_o,\tau) + E(y,y_o;t-\tau)\}\partial_y w(y_o,\tau)\} \, d\tau \; ;$$

$$\equiv w_1(y,t) + w_2(y,t) \; .$$

$E(y,\eta;t-\tau)$ a la propriété suivante :

1) $|\partial_t^p E(y,\eta;t-t_o)| \leq \text{const. } p! \, K^p \, e^{-\delta(y-\eta)^2}$;

$$\text{pour } t - t_o \geq \varepsilon \; (>0, \text{fixé}).$$

2) $|\partial_t^p E(y,y_o;t-\tau)| \leq \text{const.}(2p)! \; K^{2p} e^{-\delta(y-y_o)^2}$,

il est de même de $\partial_t^p \partial_y E$.

Ce qui montre que

$$(5.1) \quad \begin{cases} |\partial_t^p w_1(y,t)| \leq \text{const.} p! \, K^p e^{cy} \; , & \text{pour } t - t_o \geq \varepsilon \\ |\partial_t^p w_2(y,t)| \leq \text{const.}(2p)! \, K^{2p} \, e^{-\delta(y-y_o)^2} & \end{cases}$$

Notons que $w(y,t)$ satisfait $\partial_t^q w(y,o) = 0$ pour tout $q \geq 0$.

On a donc $\partial_t^p w(y,t) = (q-1)!^{-1} \int_o^t (t-\tau)^{q-1} \, \partial_t^{p+q} w(y,\tau)d\tau \; , \quad q \geq 1.$

En décomposant $w = w_1 + w_2$, et compte tenu de (5.1), on a

$$|\partial_t^p w(y,t)| \leq K_o(p!\, K_1^{p+q}\, e^{\bar{c}'y} + (2p!q!K_1^{p+q}\, e^{-cy^2})|t|^q \qquad (c > 0)$$

pour tout p, q $\geq$ 0.

Encore, on utilise $\partial_t^p w = \int_o^t \partial_t^{p+1} w(y,\tau)d\tau$, pour tout $p \geq 0$.
En répétant k fois, on aura

$$|\partial_t^p w(y,t)| \leq K_o\,[(p+k)!e^{c'y} + (2p+2k)!q!e^{-cy^2}]\, K_1^{p+q+k}$$
$$\times \quad |t|^{q+k} / (q+1)\ldots(q+k).$$

En posant p = 0, et en limitant t à $|t| < t_o' = K_1^{-1}$, on a

$$|w(y,t)| \leq K_o\,[k!e^{c'y} + (2k)!q!e^{-cy^2}]/(q+1)\ldots(q+k)$$

Rappelons que (q,k) est arbitraire. On prend $q = k^{1+\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$, et $k^{\varepsilon k} = e^{(A+c')y}$. Alors on a

$$|w(y,t)| \leq K_o(e^{-Ay} + e^{2A/\varepsilon\, y + y^{1+\varepsilon} - cy^2}).$$

Comme $0 < \varepsilon < 1$, ce qui montre le Lemme.

REFERENCES

[1] M. S. Baouendi and C. Goulaouic : Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure App. Math. 26 (1973), 455-475.

[2] B. Birkeland and J. Persson : The local Cauchy problem in $\mathbb{R}^2$ at a point where two characteristic curves have a common tangent, J. Diff. Eq. 30 (1978) 64-88.

[3] L. Hörmander : On the theory of general partial differential operators, Acta Math. 94 (1955), 161-248.

[4] H. Komatsu : Irregularity of characteristic elements and construction of null-solutions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 23 (1976), 297-342.

[5] J. Persson : Non uniqueness in the characteristic Cauchy problem when the coefficients are analytic, Mathematiche 27 (1972), 145-152 .

[6] F. Treves : Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem, Proc. Amer. Math. Soc. 46 (1974), 229-233.

*
* *