Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Hanouzet
J. L. Joly

Formes multilinéaires sur des sous-espaces de distributions

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 14, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

FORMES MULTILINEAIRES SUR DES SOUS-ESPACES DE DISTRIBUTIONS

par B. HANOUZET et J. L. JOLY

Exposé n° XIV

16 Février 1982

INTRODUCTION

On rencontre, en physique en particulier, des systèmes semi-linéaires de la forme :

$$A(D)u = f(u,u,\dots,u)$$

où $A(D) = \sum_1^n A_i D_i$, $A_i \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$, est un opérateur différentiel homogène d'ordre 1 à coefficients constants et où f est une application k-linéaire de $(\mathbb{C}^N)^k \to \mathbb{C}^M$. Bien souvent f est bilinéaire ainsi $u \to f(u,u)$ est quadratique. Il est utile aussi de considérer le cas où f est sesquilinéaire.

Dans ce cadre entrent, par exemple, les équations de Dirac (couplées avec l'équation de Klein-Gordon), les équations de Yang-Mills, le système simplifié des équations de Boltzman, etc...

Il se pose donc naturellement la question de définir le produit $f(u,\dots,u)$ sur des espaces fonctionnels adaptés à la résolution du système, ces espaces n'étant pas nécessairement constitués de fonctions régulières.

On est souvent aussi amené à demander à f d'opérer continûment pour des topologies faibles car les estimations a priori obtenues ne fournissent que de la compacité faible : cet aspect a été développé par F. Murat et L. Tartar sous le titre de "Compacité par compensation" (voir [4],[5],[6]).

Nous développons ici le premier aspect dans le cadre des espaces de Sobolev, la compacité par compensation apparaît alors comme une conséquence de théorèmes de produit.

Rappelons maintenant quelques résultats usuels sur le produit.

i) Produit dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ [3].

Pour Γ fermé conique de $T^*(\mathbb{R}^n)\setminus 0$ on note $\mathcal{D}'_\Gamma = \{u \in \mathcal{D}' ; WFu \subset \Gamma\}$ si $0 \notin \Gamma_1 + \Gamma_2$, le produit est continu de $\mathcal{D}'_{\Gamma_1} \times \mathcal{D}'_{\Gamma_2}$ dans $\mathcal{D}'$.

ii) Produit dans les espaces de Sobolev.

Si s et t sont deux réels, on note $s * t$ les réels $\sigma = \inf(s,t,s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Si $s_1 + s_2 \geqslant 0$ le produit est (fortement) continu de $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s_1 * s_2}(\mathbb{R}^n)$. De plus, en appliquant le théorème de Rellich et Kondrasov, on vérifie que ce produit est aussi faiblement continu dès que $s_1 + s_2 > 0$. Cette propriété est évidemment fausse si $s_1 + s_2 = 0$.

iii) On peut étendre le produit à des valeurs de $s_1 + s_2 < 0$ en utilisant des propriétés microlocales des distributions. Introduisons

$$H^s_\Gamma = \{u \mid WF_s\, u \subset \Gamma\}$$

Si $0 \notin \Gamma_1 + \Gamma_2$, $s_1 + t_2 \geq 0$, $s_2 + t_1 \geq 0$, le produit est continu de

$$H^{s_1} \cap H^{t_1}_{\Gamma_1} \times H^{s_2} \cap H^{t_2}_{\Gamma_2} \quad \text{dans } H^{s_1 * s_2} .$$

Appliquons ces résultats à un exemple simple. Soit $(u_1,u_2) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))^2$. Si on a

$$D_1u_1 + D_2u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ et } D_1u_1 - D_2u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2) ,$$

le point i) permet de définit u_1u_2. Supposons $(u_1,u_2) \in (H^s(\mathbb{R}^2))^2$, pour $s \geq 0$ on peut définir u_1u_2 par ii). Pour $s < 0$ on suppose de plus que :

$$D_1u_1 + D_2u_2 \in H^t(\mathbb{R}^2) , D_1u_1 - D_2u_2 \in H^t(\mathbb{R}^2) ,$$

alors, dès que $s + t + 1 \geq 0$, le point iii) permet de définir $u_1u_2 \in H^{2s-\frac{n}{2}-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. On remarque sur cet exemple que les propriétés de régularité microlocales utilisées résultent d'estimations sur l'opérateur différentiel : $A(D) = ID_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D_2$; et c'est la forme particulière de $f(u,u) = u_1u_2$ qui permet de tirer parti de ces propriétés : nous dirons que f est compatible avec le système A(D). Nous allons établir des théorèmes du type microlocal iii) pour certains formes bilinéaires liées à A(D) ; c'est en pratique ces formes qui interviennent dans les exemples.

On trouvera une démonstration détaillée des résultats qui suivent dans B. Hanouzet et J. L. Joly [2].

I. FORMES A-COMPATIBLES

Soit $A(D) = \sum_{i=1}^{n} A_iD_i$ où $A_i \in \mathcal{M}_{M,N}(\mathbb{C})$, on pose $A(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i$; on note

$$W(A,X,Y) = \{u \in X ; A(D)u \in Y\} ; \text{ pour } s-1 \leq t \leq s :$$

$$W(A,s,t) = \{u \in (H^s(\mathbb{R}^n))^N , A(D)u \in (H^t(\mathbb{R}^n))^M\}$$

A f forme k-linéaire sur $\mathbb{C}^N$, on associe une application notée encore f :

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^k \longrightarrow f(u^1,\dots,u^k)$$

Dans [4] et [6] , F. Murat et L. Tartar ont établi une condition nécessaire pour que f soit continue de $(W(A,0,0))^k$ dans $\mathcal{D}'$. Rappelons cette condition, dite de Legendre et Hadamard :

Proposition 1 : Pour que f définisse une application continue de $(W(A,\mathcal{D}',\mathcal{E}^\infty))^k$ dans $\mathcal{D}'$ il est nécessaire que l'on ait :

$$\text{(I,1)} \qquad \begin{cases} \text{Quels que soient } \xi^1,\dots,\xi^k \text{ non tous nuls, vérifiant} \\ \xi^1+\xi^2+\dots+\xi^k = 0\,, \\ f(\operatorname{Ker} A(\xi^1),\dots,\operatorname{Ker} A(\xi^k)) = 0 \end{cases}$$

Dans le cas d'une forme bilinéaire, cette condition est nécessaire pour que f soit définie et opère continûment de $W(A,s_1,t_1) \times W(A,s_2,t_2)$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, σ convenable, pour des couples (s_1,s_2), vérifiant $s_1 + s_2 < 0$. En effet, d'après le théorème de Rellich et Kondrasov, f est alors (séquentiellement) faiblement continu de $W(A,s_1',t_1)$, $W(A,s_2',t_2)$ dès que $s_1' > s_1$ et $s_2' \geq s_2$. On introduit :

Définition 1 : On dit qu'une forme k-linéaire f est A-compatible quand elle vérifie la condition (I,1).

Remarques :

1. Si A(D) est elliptique, toute forme k-linéaire est A-compatible.
2. Si A(D) est fortement hyperbolique, seules des formes bilinéaires peuvent être A-compatibles.
3. Pour $A(D) = I\,D_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} D_2$, $f(u,v) = u_1v_2 + u_2v_1$ est A-compatible.

Pour montrer que la condition (I,1) est dans certains cas suffisante pour définir f nous montrons d'abord qu'elle équivaut à un résultat de factorisation :

<u>Proposition 2</u> : Une forme k-linéaire f est A-compatible si et seulement si :

pour tous $\xi^1,\dots,\xi^k$ non tous nuls vérifiant

$$\xi^1 + \dots + \xi^k = 0$$

il existe k applications (k-1)-linéaires $f_1,\dots,f_k$ telles que :

$$f(u^1,\dots,u^k) = \sum_j (f_j(\tilde{u}^j),\ A(\xi^j)u^j)_{\mathbb{C}^M}$$

où $f_j(\tilde{u}^j) = f_j(u^1,\dots,u^{j-1},u^{j+1},\dots,u^k)$.

Dans le cas des formes bilinéaires on associe à f la matrice F définie par :

$$f(u,v) = (u,Fv).$$

On obtient alors une variante de la proposition 2 :

<u>Proposition 3</u> : Pour qu'une forme bilinéaire f soit A-compatible il faut et il suffit que :

$$\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0\ ,\ \exists\ D(\xi),\ G(\xi) \in \mathcal{M}_{M,N} \quad \text{t.q.}$$

(I 2)

$$F = {}^tA(\xi)\ D(\xi) + {}^tG(\xi)A(\xi)$$

Notons que $A(\xi)$ étant homogène de degré 1, $D(\xi)$ et $G(\xi)$ (non uniques) pourront être choisies homogènes de degré -1. Ces matrices vont jouer dans la suite un rôle régularisant, pour cela nous aurons besoin de renforcer (I,2) sous la forme suivante :

<u>Définition 2</u> : On dit qu'une forme bilinéaire f est régulièrement A-compatible si dans (I,2) les matrices D et G peuvent être choisies homogènes de degré -1 et bornées sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Pour vérifier qu'une forme bilinéaire est régulièrement A-compatible il peut être commode d'utiliser une autre forme du théorème de factorisation :

<u>Proposition 4</u> : Soit f une forme k-linéaire A-compatible, on pose $S_j = A^*(\xi^j)A(\xi^j)$. On a alors :

$$f(u^1,\dots,u^k) = \sum_{j=1}^{k} f_j(u^1,\dots,A(\xi^j)u^j,\dots,u^k)$$

où $f_j(v^1,\dots,v^j,\dots,v^k) = \int_{-\infty}^{0} f(e^{sS_1}v^1,\dots,e^{sS_j}A^*(\xi^j)v^j,\dots e^{sS_k}v^k)\,ds$.

Dans le cas des formes bilinéaires cette proposition devient alors :

<u>Proposition 5</u> : Soit f une forme bilinéaire A-compatible; les matrices

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{0} A\, e^{\overline{sA^*A}}\, F\, e^{sA^*A} ds$$

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \bar{A}\, e^{\overline{sA^*A}}\, {}^tF\, e^{sA^*A}\, ds$$

vérifient (I,2) et sont homogènes de degré -1. Si de plus le rang de $A(\xi)$ est constant sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$, f est régulièrement A-compatible.

<u>Remarques</u> :

1. L'hypothèse $A(\xi)$ de rang constant n'est pas nécessaire. Ainsi, pour A(D) strictement hyperbolique par rapport à une des variables, les formules (I,3) fournissent aussi D et G bornées sur la sphère unité.
2. Il existe des systèmes pour lesquels on peut trouver des formes bilinéaires A-compatibles qui ne sont pas régulièrement A-compatibles. C'est le cas pour $A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & \xi_1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Cas particulier des formes différentielles</u>

On suppose que le système A(D)u peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} d\,\omega^1 \\ \vdots \\ d\,\omega^\ell \end{cases}$$

où $\omega^1,\dots,\omega^\ell$ sont des formes différentielles. Le noyau de $A(\xi)$ peut alors être identifié aux formes multilinéaires alternées ω telles que :

$$\xi \wedge \omega = 0$$

Notons Λ l'espace des formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$, Λ^p le sous-espace des formes p-linéaires alternées. Nous particularisons la définition 1 sous la forme suivante :

Définition 3 : On dit qu'une forme f k-linéaire sur Λ est d-compatible si :

$$\sum_{j=1}^{k} \xi^j = 0 \quad (\xi^j \text{ non tous nuls})$$

$$\xi^j \wedge \omega^j = 0$$

impliquent $f(\omega^1,\dots,\omega^k) = 0$.

Ce résultat de factorisation répond alors à une conjecture de L. Tartar.

Proposition 6 : Pour qu'une forme f k-linéaire sur Λ soit d-compatible il faut et il suffit qu'il existe des formes $g_{p_1,\dots,p_k}$ linéaires sur $\Lambda^{p_1+\dots+p_k}$ telles que :

$$f(\dots, \sum_p \omega^{j,p},\dots) =$$

$$\sum_{p_1,\dots,p_k} g_{p_1,\dots,p_k}(\omega^{1,p_1} \wedge \dots \wedge \omega^{k,p_k})$$

où $\omega^{j,p}$ est la partie de degré p de ω^j .

Remarque : Les formes bilinéaires d-compatibles sont régulièrement d-compatibles. On peut appliquer soit le résultat sur le rang constant (proposition 5) soit la décomposition suivante :

$$(\mathrm{I},4) \quad |\xi|^2\, \omega^1 \wedge \omega^2 = i(\xi)(\xi \wedge \omega^1) \wedge \omega^2 + (-1)^{p+1}\, i(\xi)\, \omega^1 \wedge \xi \wedge \omega^2$$

où ω^1 est de degré p, $i(\xi)$ désigne le produit intérieur (la contraction) par la forme ξ .

Quelques exemples

1. Tous ceux qui découlent du calcul sur les formes différentielles. Ainsi (voir Ball [1]) une forme k-linéaire sur Λ^1 est d-compatible si et seulement si elle est une combinaison linéaire des mineurs d'ordre k de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^k & \cdots & \omega_n^k \end{pmatrix}$$

où $\omega^j = \sum \omega_p^j\, dx_p$.

2. Système "divergence, rotationnel".

On prend n = 3,

$$\begin{cases} \omega^1 = \alpha_1 \, dx_2 \wedge dx_3 + \alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \alpha_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \\ \omega^2 = \beta_1 \, dx_1 + \beta_2 \, dx_2 + \beta_3 \, dx_3 . \end{cases}$$

alors

$$d\,\omega^1 = \operatorname{div}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \;,$$

et les coefficients de $d\omega^2$ sont les composantes du vecteur rot β .

Si f bilinéaire est d-compatible on a alors

$$f\,(\omega^1 + \omega^2,\, \omega^1 + \omega^2) = a\,\vec{\alpha}\,\vec{\beta} \;.$$

Sous forme matricielle, avec des notations évidentes :

$$A(\xi) = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{div} \xi & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{rot} \xi \end{array}\right)$$

$$F = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline I & 0 \end{array}\right) = {}^tA(\xi)C(\xi) + {}^tC(\xi)\,A(\xi)$$

où $C(\xi) = \dfrac{1}{|\xi|^2} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \operatorname{div} \xi \\ \hline \operatorname{rot} \xi & 0 \end{array}\right)$

Il est en particulier commode d'utiliser (I,4) pour calculer $C(\xi)$.

3. Equation des ondes.

A l'opérateur des ondes $D_1^2U - D_2^2U - D_3^2U$ on associe :

$$A(\xi) = \left(\begin{array}{c} \xi_1 \;-\; \xi_2 \;\; -\; \xi_3 \\ \hline \operatorname{rot} \xi \end{array}\right)$$

Alors le lagrangien $(D_1U)^2 - (D_2U)^2 - (D_3U)^2$ est régulièrement A-compatible.

4. Système de Dirac.

On considère le système hyperbolique :

$$D_t u - \sum_{i=1}^{3} A_i D_i .$$

Ici $A(\tau,\xi) = \tau I - \sum_{i=1}^{3} \xi_i A_i = \tau I - \tilde{A}(\xi)$ où $\tilde{A}(\xi) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a(\xi) \\ \hline a(\xi) & 0 \end{array}\right)$

avec $a(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i a_i$, a_i, $i = 1,2,3$ sont les matrices de Pauli, les formes compatibles sont ici sesquilinéaires ; si

$$u \in (\mathbb{C}^2)^2 , \quad v \in (\mathbb{C}^2)^2,$$

$$f(u,v) = \alpha(\bar{u}_1 v_1 - \bar{u}_2 v_2) + \beta(\bar{u}_1 v_2 - \bar{u}_2 v_1) \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha I & \beta I \\ -\beta I & -\alpha I \end{pmatrix}$$

ces formes sont régulièrement A-compatibles.

5. Systèmes des ondes élastiques.

Si v est le champ des vitesses et σ le tenseur des contraintes la seule forme quadratique compatible est le lagrangien :

$$v^2 - (\varepsilon,\sigma)$$

où ε est le tenseur des déformations.

II. THEOREMES DE PRODUIT

1. Cas des formes bilinéaires .

Nous reprenons les notations du début de la première partie.

Théorème 1 : Soient s_1, s_2, t_1, t_2 tels que :

(II,1)
$$\begin{cases} s_1 + t_2 \geqslant -1 \\ s_2 + t_1 \geqslant -1 \end{cases}$$

Toute forme bilinéaire f régulièrement A-compatible définit une application continue :

$$f : W(A,s_1,t_1) \times W(A,s_2,t_2) \to H^{s_1 * s_2}$$

Si $s_1 + t_2 > -1$ ou $s_2 + t_1 > -1$ cette application est séquentiellement faiblement continue.

Remarques

1. Il est sous-entendu que $s_i - 1 \leqslant t_i \leqslant s_i$; la condition (II,1) impose aussi $s_1 + s_2 + 1 \geqslant 0$.

2. L'espace d'arrivée $H^{s_1 * s_2}$ ne dépend pas de t_1 et t_2 comme au point iii) de l'introduction. Les propriétés de régularité $A(D)u \in H^{t_1}$ et $A(D)v \in H^{t_2}$ n'ont servi qu'à étendre la formule de produit ii) pour des valeurs négatives de $s_1 + s_2$.

3. Ce résultat n'a aucun intérêt pour un système elliptique : la condition $t_1 + t_2 > -2$ suffit alors et $f(u,v) \in H^{\sigma}$,
$\sigma = \inf(t_1 + 1,\ t_2 + 1,\ t_1 + t_2 + 2 - \frac{n}{2} - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

4. Le résultat obtenu n'est pas optimal pour un système hyperbolique.

5. Le résultat est cependant optimal dans la classe des espaces de Sobolev. Ainsi pour $n = 2$, $N = 4$, $M = 3$, le système $A(D)\binom{v}{w} = \binom{\operatorname{div} v}{\operatorname{rot} w}$ conduit à $f(u,u) = \vec{v}.\vec{w}$. On vérifie qu'il existe $u \in \bigcap_{\alpha} w(A, \frac{1}{2} - \alpha, \infty)$ tel que $f(u,u) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} H^{-\varepsilon}$ mais $f(u,u) \notin L^2$.

6. Pour $s = t$, la condition (II,1) est $s \geqslant -\frac{1}{2}$. Ainsi :

$$f : [W(A; -\tfrac{1}{2} + \varepsilon,\ -\tfrac{1}{2} + \varepsilon)]^2 \longrightarrow H^{-1-\frac{n}{2}-\varepsilon}$$

est séquentiellement faiblement continu. Dans [6] la continuité est obtenue pour :

$$f : [W(A,0,0)]^2 \longrightarrow \mathcal{D}'$$

Idée de la démonstration

La condition $s-1 \leqslant t \leqslant s$ permet d'abord de vérifier que $[\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^N$ est dense dans $W(A,s,t)$. Il suffit donc de raisonner sur des fonctions régulières et de montrer que pour $u_1, u_2 \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^N$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\int f(u_1(x), u_2(x))\, \varphi(x)\, dx\right|$$

$$\leqslant C \|u_1\|_{W(A,s_1,t_1)} \|u_2\|_{W(A,s_2,t_2)} \|\varphi\|_{-(s_1 * s_2)}$$

On introduit donc :

$$I(\varphi) = \int (\hat{u}_1(\xi), F\ \widehat{\varphi u}_2(\xi))d\xi$$

Pour utiliser le rôle régularisant de D et G vérifiant (I,2) on introduit deux fonctions θ_1 et $\theta_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta^2 + \theta_2^2 = 1$, $\theta_1(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leqslant 1$, $\theta_1(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geqslant 2$ et on décompose $I(\xi)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} I(\varphi) = & \int (\theta_1(\xi)\ \hat{u}_1(\xi),\ F\theta_1(\xi)\ \widehat{\varphi u}_2(\xi))d\xi \\ & + \int (\theta_2^2(\xi)G(\xi)\hat{u}_1(\xi), A(\xi)\ \widehat{\varphi u}_2(\xi))d\xi \\ & + \int (A(\xi)\hat{u}_1(\xi),\ \theta_2^2(\xi)D(\xi)\ \widehat{\varphi u}_2(\xi))d\xi\ . \end{aligned}$$

et on utilise que, $\forall \rho \in \mathbb{R}$:

$$\theta_2^2(\xi)\quad G(\xi) \quad : \quad (H^\rho)^N \longrightarrow (H^{\rho+1})^M$$

$$\theta_2^2(\xi)\quad D(\xi) \quad : \quad (H^\rho)^N \longrightarrow (H^{\rho+1})^M\ .$$

2. Un exemple multilinéaire .

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des formes différentielles à coefficients distributions, $\omega \in \mathcal{E}$. Si $\omega \in W(d,s,t)$ alors $dw \in W(d,t,t)$ car $d^2\omega = 0$

<u>Théorème 2</u> : Soit $\omega^i \in W(d,s_i,t_i)$, $i = 1,2$ et on suppose que :

(II,1) $\qquad \begin{cases} s_1 + t_2 + 1 \geqslant 0 \\ s_2 + t_1 + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

alors $\omega^1 \wedge \omega^2 \in (H^{s_1 * s_2})^K$. Si de plus

(II,2) $\qquad t_1 + t_2 + 1 \geqslant 0$

alors $\omega^1 \wedge \omega^2 \in W(d, s_1 * s_2, (t_1 * s_2) \wedge (s_1 * t_2))$.

La première partie découle directement du théorème 1 et de la proposition 6. Les conditions (II,1) et (II,2) permettent ensuite d'appliquer le théorème 1 à $d\omega^1$ et ω^2 ; et à ω^1 et $d\omega^2$. On a alors, pour ω^1 de degré p, ω^2 de degré q :

$$d(\omega^1 \wedge \omega^2) = d\,\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)\,\omega^1 \wedge d\omega^2 .$$

Comme en général $s_1 * s_2 - 1 < (t_1 * s_2) \wedge (s_1 * t_2)$ le résultat est meilleur que celui qu'on obtiendrait en dérivant directement $\omega^1 \wedge \omega^2$, ceci nous permet d'itérer le théorème 1. On obtient ainsi en particulier :

<u>Proposition 7</u> : Si $\omega^i \in W(d,s,s)$, $i = 1,\ldots,k$ et si $ks + 1 \geqslant (k-2)\frac{n}{2}$ alors

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \omega^i \in W(d, \overset{k}{*} s , \overset{k}{*} s).$$

<u>Remarque</u> : Une version de ce dernier résultat est donnée dans [6] . Sous une hypothèse de rang constant la compacité par compensation est obtenue dans [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. BALL : Convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 63 (1977) 337-403.

[2] B. HANOUZET et J. L. JOLY : Formes multilinéaires sur des sous espaces de distributions. Publications Analyse Appliquée et Informatique. Université de Bordeaux I (1982).

[3] L. HÖRMANDER : Fourier integral operators I. Acta Math. 127 (1971), 79-183.

[4] F. MURAT : Compacité par compensation. Ann. Sc. Sup. Pisa, 5, n° 3, (1978), 489-507.

[5] F. MURAT : Compacité par compensation III. Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, 8, (1981) 69-102.

[6] L. TARTAR : Compensated compactness and applications to p.d.e. Non linear analysis and mechanics, Herriott-Watt Symposium, Vol. IV, ed. P. R. J. Knops, Reasearch Notes in Mathematics n° 39, Pitman, Londres (1979) 136-212.

*
* *
*