Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. Geymonat

Perturbations en théorie spectrale

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 19, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1981-1982

PERTURBATIONS EN THEORIE SPECTRALE

par G. GEYMONAT

Exposé n° XIX

20 Avril 1982

1. PRELIMINAIRES

1.1 Considérons un corps élastique peu compressible occupant un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N \geqslant 2$) de frontière régulière, soumis à un champ de forces volumiques $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ et fixé au bord $\partial\Omega$. Dans le cadre de l'élasticité linéaire le déplacement $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ est alors la solution unique du système de l'élasticité

$$(1.1) \qquad \begin{cases} -\mu \, \Delta \, \vec{u} - \frac{1}{\varepsilon} \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, \mathrm{div} \, \vec{u} = \vec{f} & \text{dans} \quad \Omega \, , \\ \vec{u} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \, ; \end{cases}$$

les constantes de Lamé sont $\mu > 0$ fixé et $\lambda = \frac{1}{\varepsilon} - \mu$; le paramètre $\varepsilon > 0$ est choisi petit et caractérise la petite compressibilité du solide considéré.

Comme cela a été montré par Lions [5] la solution u^ε de (1.1) converge vers la solution du problème de Stokes :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} -\mu \, \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, p = \vec{f} & \text{dans} \quad \Omega \, , \\ \mathrm{div} \, \vec{u} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \, , \\ \vec{u} = 0 & \text{sur} \ \partial\Omega \, . \end{cases}$$

Dans la suite je présente quelques résultats obtenus en collaboration avec M. Lobo-Hidalgo et E. Sanchez-Palencia [1] , [2] concernant les relations entre le spectre des opérateurs (1.1) et (1.2).

1.2 Introduisons les espaces $V = H_0^1(\Omega)^3$, $H = L^2(\Omega)^3$ et la forme sesquilinéaire, hermitienne et coercitive sur $V \times V$

$$a^\varepsilon(\vec{u},\vec{v}) = \int_\Omega \Big(\mu \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \frac{1}{\varepsilon} \, \mathrm{div} \, \vec{u} \; \overline{\mathrm{div} \, \vec{v}} \Big) dx \, .$$

On désignera alors par A^ε l'opérateur linéaire et continu de V dans $V' = H^{-1}(\Omega)^3$ associé à la forme a^ε et aussi l'opérateur correspondant, non borné dans H, de domaine $D(A^\varepsilon) \subset V$; évidemment A^ε est, dans H, un opérateur autoadjoint défini positif à résolvante compacte dont le spectre est formé par la suite des valeurs propres de multiplicité finie

$$0 < \zeta_1^\varepsilon \leqslant \zeta_2^\varepsilon \leqslant \ldots \quad \to + \infty \, ,$$

chacune étant répétée selon sa multiplicité.

On établit le comportement asymptotique des valeurs propres par application des résultats généraux pour les systèmes elliptiques (voir par ex. Grubb [3] pour une présentation de ces résultats) ; on définit $N(t;A^{\varepsilon}) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} 1$ et on obtient

$$(1.3) \qquad N(t;A^{\varepsilon}) = c_{A^{\varepsilon}} t^{N/2} + O(t^{(N - \frac{1}{2} + \delta)/2}) \quad \text{pour} \quad t \to +\infty$$

où $\delta > 0$ est arbitraire et, dans ce cas particulier ,

$$(1.4) \qquad c_{A^{\varepsilon}} = \frac{\omega_N}{(2\pi)^N} (N-1)\, \mu^{-N/2} \operatorname{mes}(\Omega) \left[1 + \frac{(\varepsilon\mu)^{N/2}}{N-1}(1+\varepsilon\mu)^{-N/2}\right]$$

où ω_N désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

Remarquons aussi que le système (1.1) est elliptique au sens de Agmon-Douglis-Nirenberg pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}$ avec $\varepsilon \neq \{-\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{2\mu}, 0\}$; donc l'opérateur A^{ε} est d'indice 0 (considéré dans $\mathcal{L}(V,V')$ ou bien comme opérateur non borné dans H), pour tout

$$\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{\mu}, -\frac{1}{2\mu}, 0\} .$$

1.3 Soit $V_D = \{\vec{u} \in H_0^1(\Omega)^{\varepsilon} ; \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$ et H_D sa fermeture dans $L^2(\Omega)^3$; considérons la forme sesquilinéaire, hermitienne et coercitive sur $V_D \times V_D$

$$a^D(\vec{u},\vec{v}) = \mu \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}}\, dx .$$

On désigne par A_D l'opérateur linéaire et continu de V_D dans V_D' associé à la forme a^D, ainsi que l'opérateur non borné autoadjoint défini positif dans H_D. A_D est à résolvante compacte dans H_D et son spectre est formé par une suite de valeurs propres de mulitplicité finie

$$0 < \zeta_1^D \leqslant \zeta_2^D \leqslant \ldots \to +\infty ,$$

chacune étant répétée selon sa multiplicité.

D'après un résultat de G. Métivier [6] on sait que le comportement asymptotique de $N(t;A_D) = \sum_{\zeta_i^D \leqslant t} 1$ est

(1.5) $$N(t,A_D) \sim c_{A_D}\, t^{N/2} \quad \text{pour} \quad t \to +\infty$$

où

(1.6) $$c_{A_D} = \frac{\omega_N}{(2\pi)^N}\,(N-1)\,\mu^{-N/2}\ \mathrm{mes}(\Omega).$$

D'après (1.4) nous remarquons que

(1.7) $$c_{A_D} = \lim_{\varepsilon \to 0} c_{A^\varepsilon}.$$

Si $\zeta \in \rho(A_D)$, ensemble résolvant de A_D, alors le problème

(1.8) $$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \vec{f} + \zeta\vec{u} & \text{dans } \Omega \ , \\ \mathrm{div}\,\vec{u} = g & \text{dans } \Omega \ , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \ , \end{cases}$$

admet une solution unique $(\vec{u},p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{C}$ pour tout $(\vec{f},g) \in H^{-1}(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{C}$; ici $L^2(\Omega)/\mathbb{C}$ désigne le sous-espace de $L^2(\Omega)$ formé par les fonctions à valeur moyenne nulle.

On sait, voir Temam [8] , que $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$ vérifie $\langle\vec{f},\vec{v}\rangle = 0$ pour tout $\vec{v} \in V_D$ si et seulement si $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, r$ avec $r \in L^2(\Omega)/\mathbb{C}$; ici $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-1}(\Omega)^3$ et $H_0^1(\Omega)^3$. On en déduit que si dans (1.8) on a $g = 0$ et $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, r$, avec $r \in L^2(\Omega)/\mathbb{C}$, alors la solution est $(0,r)$.

Si $\zeta \in \sigma(A_D)$, spectre de A_D, alors (1.8) admet une solution si et seulement si $(\vec{f},g)$ vérifie la condition de compatibilité

(1.9) $$\langle f,v\rangle = \int_\Omega g\,\bar{q}\,dx \ ,$$

pour tout $(\vec{v},q)$ solution du problème homogène.

Dans la suite nous utiliserons l'estimation suivante de la solution de (1.8).

Proposition 1.1 : Soit $\zeta \in \rho(A_D)$; alors la solution de (1.8) vérifie l'estimation

$$(1.10) \qquad \|\vec{u}\|_{H_o^1(\Omega)^3} + \|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{C}} \leqslant C(\xi)\{ \|\vec{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3} + \|g\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{C}} \},$$

où $C(\zeta) = (A + \dfrac{B + D\,|\zeta|}{\mathrm{dist}(\zeta,\sigma(A_D))})\,(E + F\,|\zeta|)$ avec A, B, D, E, F dépendants seulement de Ω et de μ .

Pour la démonstration il suffit de se rappeler (voir Temam [8]) que l'opérateur div est surjectif de $H_o(\Omega)^3$ sur $L^2(\Omega)/\mathbb{C}$, que

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{C}} \leqslant C_1(\Omega)\, \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p\|_{H^{-1}(\Omega)^3}$$

et enfin que pour $\zeta \in \rho(A_D)$ on a

$$\|(A_D - \zeta)^{-1}\vec{f}\|_{V_D} \leqslant \frac{c_2}{\mathrm{dist}(\zeta,\sigma(A_D))} \|\vec{f}\|_{V_D'} \quad .$$

1.4 Soit maintenant $\zeta \in \mathbb{C}$ avec $\zeta \neq \zeta_i^D$, $i = 1, 2,\ldots$, et considérons, pour $\vec{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$ donné, le problème

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \vec{u}^\varepsilon \in H_o^{\prime}(\Omega)^3, \\ -\mu\,\Delta\,\vec{u} - \dfrac{1}{\varepsilon}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{u}^\varepsilon = \vec{f} + \zeta\vec{u}^\varepsilon \;. \end{cases}$$

Le résultat suivant complète celui de M. C. Pelissier [7] .

Proposition 1.2 : Pour tout $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{C}$ avec $|\varepsilon|$ assez petit le problème (1.11) admet une solution unique $\vec{u}^\varepsilon$ qui est une fonction holomorphe de ε .

Démonstration : Puisque $A^\varepsilon - \zeta I$ est d'indice = 0, il suffit de montrer la surjectivité. Pour cela on cherche

$$(1.12) \qquad \vec{u}^\varepsilon = \vec{u}^o + \varepsilon\,\vec{u}^1 + \varepsilon^2\vec{u}^2 + \ldots$$

avec $\vec{u}^i \in H_o^1(\Omega)^3$ tels que la série soit convergente dans $H_o^1(\Omega)^3$ pour $|\varepsilon|$ assez petit.

Par un raisonnement habituel on substitue l'expression (1.12) de $\vec{u}$ dans (1.11) et on essaye de vérifier les équations trouvées pour les différentes puissances de ε.

En prenant la puissance ε^{-1} on trouve $\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u}^o = 0$ et donc puisqu'on cherche $\vec{u}^o \in H_o^1(\Omega)^3$, $\vec{u}^o$ doit vérifier

$$\text{div}\,\vec{u}^o = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

En prenant les termes constants on doit avoir

$$-\mu\Delta\vec{u}^o - \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u}^1 = \vec{f} + \zeta\vec{u}^o \; ;$$

si donc on pose

(1.13) $$p^o = -\text{div}\,\vec{u}^1 \qquad \text{dans} \quad L^2(\Omega)/\mathbb{C} \; ,$$

on voit que $(\vec{u}^o, p^o) \in H_o^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{C}$ est la solution du système

(1.14) $$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u}^o + \overrightarrow{\text{grad}}\,p^o = \vec{f} + \zeta\vec{u}^o & \text{dans} \quad \Omega \; , \\ \text{div}\,\vec{u}^o = 0 & \text{dans} \quad \Omega \; , \\ \vec{u}^o = 0 & \text{sur } \partial\Omega \; , \end{cases}$$

et, grâce à la proposition 1.1, satisfait l'estimation

$$\|\vec{u}^o\|_{H_o^1(\Omega)^3} + \|p^o\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{C}} \leq C(\zeta)\,\|\vec{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3} \, .$$

En prenant les termes d'ordre ε on doit avoir

$$-\mu\Delta\vec{u}^1 - \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u}^2 = \zeta\vec{u}^1$$

et donc si on pose

$$p^1 = -\,\text{div}\,\vec{u}^2 \qquad \text{dans } L^2(\Omega)/\mathbb{C}$$

on voit, en se rappelant de (1.13), que $(\vec{u}^1, p^1) \in H_o^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{C}$ est la solution du système

$$\begin{cases} -\mu \, \Delta \, \vec{u}^1 + \overrightarrow{\text{grad}} \, p^1 = \zeta \, \vec{u}^1 & \text{dans } \Omega \, , \\ \text{div } \vec{u}^1 = - p^o & \text{dans } \Omega \, , \\ u^1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et grâce à la proposition 1.1, satisfait l'estimation

$$\|\vec{u}^1\|_{H_o(\Omega)^3} + \|p^1\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{C}} \leqslant C(\zeta) \, \|p^o\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{C}}$$

$$\leqslant C^2(\zeta) \, \|\vec{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^3} \, .$$

On peut continuer de la même manière : on en déduit que la série (1.12) est convergente pour $|\varepsilon| < 1/C(\zeta)$, $\varepsilon \neq 0$, et que $\vec{u}^\varepsilon$ vérifie l'estimation

(1.15) $$\|\vec{u}^\varepsilon\|_{H'_o(\Omega)^3} \leqslant \frac{C(\zeta)}{1-|\varepsilon| C(\zeta)} \, \|\vec{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

Q.E.D.

On peut prolonger la définition de $\vec{u}^\varepsilon$ pour $\varepsilon = 0$ en lui donnant la valeur $\vec{u}^o$ solution de (1.14); $\vec{u}^\varepsilon$, ainsi défini, est une fonction holomorphe de ε dans le disque $\{\varepsilon \in \mathbb{C} \; ; \; |\varepsilon| < 1 / C(\zeta)\}$.

Par ailleurs dans (1.14) $\vec{u}^o \in V_D$ et donc satisfait aussi

$$A_D \vec{u}^o - \zeta \, \vec{u}^o = \Pi \vec{f},$$

où Π est la projection orthogonale de $L^2(\Omega)^3$ sur H_D ou bien de $H^{-1}(\Omega)^3$ sur V'_D .

On peut donc interpréter les résultats obtenus en disant que $\vec{u}^\varepsilon(\zeta) = (A^\varepsilon - \zeta)^{-1} \vec{f}$ converge, pour $\varepsilon \to 0$, vers $\vec{u}^o(\zeta) = (A_D - \zeta)^{-1} \, \pi \vec{f}$ dans $H_o^1(\Omega)^3$ fort; de plus cette convergence est uniforme pour tout $\zeta \in K$ compact de $\rho(A_D)$ et grâce à (1.15), pour tout $\vec{f}$ dans un ensemble borné de $H^{-1}(\Omega)^3$.

1.5 Le résultat de la proposition 1.2 peut être complété en considérant les projecteurs dans $L^2(\Omega)^3$:

(1.16) $$P^\varepsilon = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A^\varepsilon - \zeta)^{-1}\, d\zeta \quad , \qquad \varepsilon \neq 0 ,$$

et

(1.17) $$P_*^D = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (A_D - \zeta)^{-1}\, \pi d\zeta \quad ,$$

où γ est une courbe simple fermée contenue dans un compact K de $\rho(A_D)$ et entourant une valeur propre ζ_*^D de A_D .

Proposition 1.3 : Pour $|\varepsilon|$ assez petit, P^ε est une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega)^3)$ qui prend la valeur P_*^D pour $\varepsilon = 0$.

Démonstration : Soit $\vec{f} \in L^2(\Omega)^3$ fixé. Du théorème de la convergence dominée on déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| P^\varepsilon \vec{f} - P_*^D \vec{f} \|_{L^2(\Omega)^3} = 0$$

où, grâce à (1.15), la convergence est uniforme pour tout $\vec{f}$ dans un ensemble borné de $L^2(\Omega)^3$. De plus, $\vec{u}^\varepsilon = P^\varepsilon \vec{f}$ est, grâce à la proposition 1.2, une fonction holomorphe de ε, pour $|\varepsilon|$ petit, à valeurs dans $L^2(\Omega)^3$, qui prend la valeur $\vec{u}^0 = P_*^D \vec{f}$ pour $\varepsilon = 0$. Puisque P^ε est borné dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega)^3)$, on obtient le résultat par un raisonnement classique (voir par ex. Kato [4], chap. VII , § 1.1).

Q.E.D.

Toujours grâce aux propriétés classiques des projecteurs qui convergent en norme, on a, pour $|\varepsilon|$ assez petit,

(1.18) $$\dim \operatorname{Im} P^\varepsilon = \dim \operatorname{Im} P_*^D$$

et on peut choisir les vecteurs propres de A^ε de façon qu'ils convergent fortement dans $L^2(\Omega)^3$ vers les vecteurs propres correspondants de A_D .

2. APPROXIMATION ANALYTIQUE DES VALEURS PROPRES DE A_D

2.1 Soit ζ_*^D une valeur propre fixée de A_D, de multiplicité m.

Théorème 2.1 : Soit $|\varepsilon|$ assez petit. Il existe m valeurs propres de A^ε, eventuellement non distinctes, fonctions analytiques de ε :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \zeta^\varepsilon_{(1)} = \zeta_*^D + \varepsilon\zeta^1_{(1)} + \varepsilon^2\zeta^2_{(1)} + \dots \\ \dots\dots \\ \zeta_{(m)} = \zeta_*^D + \varepsilon\zeta^1_{(m)} + \varepsilon^2\zeta^2_{(m)} + \dots \end{cases}$$

et m vecteurs propres linéairement indépendant, fonctions analytiques de ε, qui pour $\varepsilon = 0$ engendrent $\ker(A_D - \zeta_*^D)$. Pour ε réel les valeurs propres (2.1) sont réelles.

Remarque : Si A^ε était une perturbation analytique de A_D, le résultat serait classique (et dû à Rellich, Nagy, Kato, voir Kato [4]) mais dans le cas présent A^ε n'est pas une perturbation analytique de A_D.

Démonstration : Grâce à la proposition 1.3, on peut construire pour $|\varepsilon|$ assez petit la "transformation function" $U(\varepsilon)$, comme dans Kato [4] chap. II, § 4.2, holomorphe de ε à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\Omega)^3)$ avec $U(0) = I$ et

$$P^\varepsilon = U(\varepsilon)\, P_*^D\, U^{-1}(\varepsilon).$$

Suivant une démarche classique, on considère la famille d'opérateurs

$$\tilde{A}^\varepsilon = U^{-1}(\varepsilon)\, A^\varepsilon\, U(\varepsilon) \ ;$$

or, il est possible de choisir les $U(\varepsilon)$ unitaires pour ε réel, et les opérateurs $\tilde{A}^\varepsilon$, ε réel, sont alors autoadjoints.

Le projecteur P_*^D, qui décompose A_D, décompose également $\tilde{A}^\varepsilon$, car les 2 opérateurs commutent ; dans Im P_*^D, les opérateurs A_D et $\tilde{A}^\varepsilon$ sont des matrices et le problème des valeurs propres de A^ε dans Im P^ε est équivalent à celui de $\tilde{A}^\varepsilon$ dans Im P_*^D.

Toujours grâce à la proposition 1.2, on voit que $\tilde{A}^{\varepsilon}$ est holomorphe dans l'espace de dimension finie Im P_{*}^{D} et donc on peut y appliquer la théorie classique développée dans Kato [4] chap. II, § 1 ; puisque $\tilde{A}^{\varepsilon}$ est pour ε réel, un opérateur autoadjoint on en déduit le résultat.

Q. E. D.

2.2 Désignons par $\vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)}$, $\ell = 1,\dots,m$, une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\zeta^{\varepsilon}_{(\ell)}$; il s'agit donc de solutions du problème

$$(2.2)\qquad \begin{cases} -\mu\Delta\vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)} - \dfrac{1}{\varepsilon}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)} = \zeta^{\varepsilon}_{(\ell)}\ \vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)} & \text{dans } \Omega\ , \\ \vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)} \in H^1_o(\Omega)^3\ . \end{cases}$$

On sait par le théorème 2.1 que

$$(2.3)\qquad \vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)} = \vec{u}^{o}_{(\ell)} + \varepsilon\vec{u}^{1}_{(\ell)} + \varepsilon^2\ \vec{u}^{2}_{(\ell)} + \dots\ , \qquad \ell = 1, 2, \dots, m\ ,$$

où les $\vec{u}^{i}_{(\ell)} \in H^1_o(\Omega)^3$ et les $\vec{u}^{o}_{(\ell)}$ engendrent $\ker(A_D - \zeta^D_*)$.

Pour calculer les $\zeta^{i}_{(\ell)}$ dans (2.1) et les $\vec{u}^{i}_{(\ell)}$ dans (2.3) on opère comme dans la démonstration de la proposition 1.2 : on remplace l'expression (2.1) de $\zeta^{\varepsilon}_{(\ell)}$, et l'expression (2.3) de $\vec{u}^{\varepsilon}_{(\ell)}$ dans (2.2), et on essaye de résoudre les équations trouvées pour les différentes puissances de ε .

Le coefficient de la puissance de ε^{-1} donne, pour chaque $\ell = 1,\dots,m$:

$$\text{div}\ \vec{u}^{o}_{(\ell)} = 0 \qquad \text{dans } \Omega\ ,$$

et le terme constant donne

$$-\mu\ \Delta\ \vec{u}^{o}_{(\ell)} - \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ \vec{u}^{1}_{(\ell)} = \zeta^{D}_{*}\ \vec{u}^{o}_{(\ell)} \quad \text{dans } \Omega\ ;$$

donc, en définissant

$$p^{o}_{(\ell)} = -\,\text{div}\ \vec{u}^{1}_{(\ell)}\ ,$$

$(\vec{u}^{o}_{(\ell)}, p^{o}_{(\ell)})$ satisfait, pour chaque $\ell = 1, 2, \ldots, m$, le système homogène

$$\text{(2.4)}\qquad \begin{cases} -\mu\Delta \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}}\, q = \zeta^{D}_{*} \vec{v} & \text{dans } \Omega , \\ \text{div } \vec{v} = 0 & \text{dans } \Omega , \\ \vec{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

On retrouve ainsi que les $\vec{u}^{o}_{(\ell)} \in V_D$ engendrent $\ker(A_D - \zeta^{*}_{D})$; on peut les déterminer, à une transformation unitaire dans $\ker(A_D - \zeta^{D}_{*})$ près, par la condition d'orthonormalisation

$$\text{(2.5)}\qquad (\vec{u}^{o}_{(\ell)}, \vec{u}^{o}_{(k)})_{L^2(\Omega)^3} = \delta_{\ell k} \qquad \ell, k = 1, \ldots, m ;$$

les $(\vec{u}^{o}_{(\ell)}, p^{o}_{(\ell)})$ pour $\ell = 1, 2, \ldots, m$ forment alors une base de l'ensemble des solutions du problème homogène (2.4).

En prenant les termes d'ordre ε , on voit que $\zeta^{1}_{(\ell)}$ et $\vec{u}^{1}_{(\ell)}$ doivent, pour chaque $\ell = 1, \ldots, m$, satisfaire les équations

$$\text{(2.6)}\qquad \begin{cases} -\mu\Delta \vec{u}^{1}_{(\ell)} + \text{grad } p^{1}_{(\ell)} - \zeta^{D}_{*} \vec{u}^{1}_{(\ell)} = \zeta^{1}_{(\ell)} \vec{u}^{o}_{(\ell)} & \text{dans } \Omega , \\ \text{div } \vec{u}^{1}_{(\ell)} = -p^{o}_{(\ell)} & \text{dans } \Omega , \\ \vec{u}^{1}_{(\ell)} = 0 & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Par ce qui a été rappelé en 1.3, l'équation (2.6) admet une solution si et seulement si $(\zeta^{1}_{(\ell)} \vec{u}^{o}_{(\ell)}, -p^{o}_{(\ell)})_m$ vérifie la condition de compatibilité (1.9). Dans le cas présent, si $(\vec{v}, q) = \sum\limits_{k=1} \alpha_k (\vec{u}^{o}_{(k)}, p^{o}_{(k)})$ désigne une solution arbitraire du problème homogène (2.4), alors (1.9) devient, grâce à (2.5) :

$$\alpha_\ell \zeta^{1}_{(\ell)} = - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int_\Omega p^{o}_{(\ell)} \overline{p^{o}_{(k)}} \, dx \qquad \ell = 1, \ldots, m$$

si bien que les $-\zeta^{1}_{(\ell)}$ sont les valeurs propres de la matrice autoadjointe positive M de coefficients

$$m_{\ell k} = \int_\Omega p^{o}_{(\ell)} \overline{p^{o}_{(k)}} \, dx \qquad \ell , k = 1, \ldots, m$$

et donc les coefficients $\zeta^1_{(\ell)}$ sont réels ≤ 0 et déterminés de façon unique.

Avec le choix précédent des $\zeta^1_{(\ell)}$, les équations (2.6) admettent une solution, non unique : la solution qui convient est précisée lors de l'étape suivante (calcul des $\zeta^2_{(\ell)}$).

2.3 Si ζ^D_* est une valeur propre simple, et donc $m = 1$ dans ce qui précède, on a

$$\zeta^1 = - \int_\Omega |p^o|^2 \, dx \leq 0$$

et $\zeta^1 < 0$ si $p^o \neq 0$.

On peut se demander si en général la matrice M est toujours définie positive : c'est sûrement le cas si $-\mu \Delta w = \zeta^D_* w$ et $w \in H^1_o(\Omega)$ implique $w = 0$.

Si M est définie positive, alors on a $\zeta^1_{(\ell)} < 0$ pour tout $\ell = 1,\ldots,m$ et donc pour ε réel, $|\varepsilon|$ assez petit, on a

$$\zeta^\varepsilon_{(\ell)} < \zeta^D_* \qquad \text{pour} \quad \ell = 1,2,\ldots,m \quad ;$$

ce résultat est raisonnable d'un point de vue physique car pour $\varepsilon \searrow 0$ le corps devient de plus en plus rigide (à la compression) et donc les fréquences des vibrations propres doivent augmenter.

2.4 Il est intéressant de comparer les formules (2.1), valables pour chaque valeur propre ζ^D_* <u>fixée</u> de A_D avec les formules (1.3) et (1.5), qui donnent le comportement asymptotique de la n-ème valeur propre de A^ε et de A_D :

$$\zeta^\varepsilon_n \sim C^{-2/N}_{A^\varepsilon} \, n^{2/N} \qquad \text{pour } n \to \infty \ ,$$

$$\zeta^D_n \sim C^{-2/N}_{A_D} \, n^{2/N} \qquad \text{pour } n \to \infty \ ,$$

où, grâce à (1.4) et (1.5), on a

$$C^{-2/N}_{A^\varepsilon} = C^{-2/N}_{A_D} \left[1 - \frac{2}{N(N-1)} (\varepsilon \mu)^{N/2} + \ldots\right]$$

Cette formule est cohérente avec l'interprétation physique rappelée en 2.3 et montre par ailleurs que la dépendance analytique en ε de ζ_n^ε ne se conserve pas en général par passage à la limite pour $n \to \infty$.

Ce dernier phénomène s'explique : en effet, d'après le théorème 2.1, toutes les valeurs propres ζ_n^D de A_D sont approchées de façon analytique par des valeurs propres $\zeta_{n,(\ell)}^\varepsilon$ de A^ε ; mais il n'y a aucune raison pour que soient ainsi considérées toutes les valeurs propres de A^ε ; les autres valeurs propres peuvent ne pas dépendre analytiquement de ε , comme le montre l'exemple suivant inspiré des considérations du § 6 de Métivier [6] .

Exemple : Soit $\Omega =]0,2\pi[^N$ et considérons les problèmes analogues à (1.1) et (1.2), avec condition de périodicité. En développant en série de Fourier on voit aisément que les valeurs propres de A_D sont

$$\zeta^D = \mu|\nu|^2 \quad \text{de multiplicité } N-1$$

quand ν parcourt $\mathbb{Z}^N$; les valeurs propres de A^ε sont

$$\zeta^\varepsilon = \mu\,|\nu|^2 \qquad \text{de multiplicities N-1}$$

$$\Lambda^\varepsilon = (\mu + \frac{1}{\varepsilon})\ |\nu|^2 \qquad \text{simple ,}$$

quand ν parcourt $\mathbb{Z}^N$. Les valeurs propres Λ^ε ne sont pas analytiques en ε .

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Geymonat, M. Lobo-Hidalgo, E. Sanchez-Palencia : Spectral properties of certain stiff problems in elasticity and acoustics, Math. Met. in the App. Sc. 4, 1982.

[2] G. Geymonat, E. Sanchez-Palencia : En préparation

[3] G. Grubb : Remainder estimates for eigenvalues and kernels of pseudo-differential elliptic systems, Math. Scand. 43, 1978, pp. 275-307.

[4] T. Kato : Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York .

[5] J. L. Lions : Réduction à des problèmes de Cauchy-Kowalewska, 2ème ciclo CIME, Numerical Analysis of Partial Differential Equations, Ispra 1967, Cremonese 1968, pp. 269-281.

[6] G. Métivier : Valeurs propres d'opérateurs définis par la restriction de systèmes variationnels à des sous-espaces. J. Math. Pures et Appl., 57, 1978, pp. 133-156.

[7] M. C. Pélissier : Résolution numérique de quelques problèmes raides en mécanique des milieux faiblement compressibles, Calcolo, 12, 1975, pp. 275-314.

[8] R. Temam : Navier-Stokes equations, North-Holland, 1977.

***