

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. BREZIS

**Problèmes elliptiques et paraboliques non linéaires avec données mesures**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1981-1982), exp. n° 20,  
p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1981-1982\\_\\_\\_\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A19_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

PROBLEMES ELLIPTIQUES ET PARABOLIQUES  
NON LINEAIRES AVEC DONNEES MESURES

par H. BREZIS



§ 1. INTRODUCTION

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert tel que  $0 \in \Omega$ . On considère le problème suivant : trouver une fonction  $u(x)$  vérifiant :

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = f(x) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $1 < p < \infty$  ; la donnée  $f(x)$  appartient à  $L^1(\Omega)$  ou plus généralement est une mesure.

Je commence par rappeler un résultat concernant le cas où  $f \in L^1(\Omega)$  (voir Brezis-Strauss [5] lorsque  $\Omega$  est borné et Benilan-Brezis-Crandall [2] si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ ) :

Théorème A : On suppose que  $\Omega$  est borné régulier ou bien que  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Alors pour tout  $f \in L^1(\Omega)$  il existe  $u \in L^p(\Omega)$  unique solution de (1) (en un sens à préciser <sup>(1)</sup>).

Insistons sur le fait que le Théorème A est valable sans restrictions sur  $p$ . A la même époque, et indépendamment, Lieb et Simon [9] montrent que l'équation de Thomas-Fermi :

$$(2) \quad -\Delta u + |u|^{1/2}u = \sum_{i=1}^k m_i \delta(x - a_i) \quad \text{dans } \mathbb{R}^3$$

qui intervient en mécanique quantique, possède une solution unique. Ici  $m_i > 0$  et  $a_i \in \mathbb{R}^3$  sont donnés et  $\delta$  désigne la mesure de Dirac. Il est donc naturel de se poser la question de savoir si l'équation (1) possède une solution pour toute donnée  $f$  mesure et tout  $p$ . Comme les estimations a priori sont les mêmes pour les données mesures et les données  $L^1$  on pouvait espérer - par analogie avec le théorème A - une réponse positive. En fait la réalité est plus complexe :

Théorème 1 (Benilan-Brezis ; voir [1]) : On suppose que  $p \geq \frac{N}{N-2}$  (avec  $N \geq 3$ ).

(1) qui implique en particulier que

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Alors il n'existe pas de fonction  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$  vérifiant

$$(3) \quad -\Delta u + |u|^{p-1}u = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) .$$

On notera que le Théorème 1 est un résultat local : il exprime qu'il y a une obstruction locale à l'existence d'une solution de (3). Par contre si  $p < \frac{N}{N-2}$  on a un résultat positif :

Théorème 2 (Benilan-Brézis ; voir [1]) : On suppose que  $\Omega$  est borné régulier ou bien que  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Soit  $p < \frac{N}{N-2}$  ( $p$  arbitraire si  $N = 1$  ou  $N = 2$ ). Alors pour tout  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$  (mesure bornée) il existe  $u \in L^p(\Omega)$  unique solution de (1) (en un sens à préciser (1)).

Au § 2 on indique quelques idées pour la démonstration des Théorèmes 1 et 2 ainsi que certains développements liés à ces questions. Au § 3 on présente des résultats semblables pour les problèmes paraboliques.

§ 2. EXISTENCE, NON-EXISTENCE ET SINGULARITES ELIMINABLES POUR LE PROBLEME (1).

Démonstration du Théorème 1

Je commence par une preuve heuristique très simple (qui peut être mise en forme). Supposons que  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$  vérifie (3), et donc

$$-\Delta u = \delta - |u|^{p-1}u.$$

Au voisinage de  $x = 0$  la fonction intégrable  $|u|^{p-1}u$  est "négligeable" devant  $\delta$  et donc  $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|x|^{N-2}}$  (solution élémentaire de  $-\Delta$ ).

Par conséquent  $|u(x)|^p \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|x|^{p(N-2)}}$  et  $u \notin L^p_{loc}(\Omega)$  car

(1) qui implique en particulier que

$$-\Delta u + |u|^{p-1}u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) .$$

$\int_0^1 \frac{r^{N-1}}{r^{p(N-2)}} dr = \infty$  (à cause de l'hypothèse  $p \geq \frac{N}{N-2}$ ). On notera que cet argument ne s'applique plus si  $p < \frac{N}{N-2}$  - ce qui est cohérent avec le Théorème 2. Au lieu de chercher à mettre en forme cette idée, j'indique maintenant un résultat de régularité (dû essentiellement à Brézis-Veron [6]) qui implique directement le Théorème 1 :

Théorème 3 : On suppose que  $p \geq \frac{N}{N-2}$  (avec  $N \geq 3$ ). Soit  $u \in L^p_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$  vérifiant

$$(4) \quad -\Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}).$$

Alors  $u \in C^2(\Omega)$  (et même  $u \in C^\infty(\Omega)$  si  $p$  est un entier).

Démonstration du Théorème 3 : Pour simplifier la présentation (mais ceci n'est pas essentiel !) on fixe  $N = 3$ ,  $p = 3$  et  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| < 1\}$ . Autrement dit  $u \in L^3_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$  vérifie

$$(5) \quad -\Delta u + u^3 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}).$$

1ère étape : On a  $u \in C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ .

Démonstration : L'inégalité de Kato [8] exprime que

$$\Delta|u| \geq (\Delta u) \text{ sign } u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}).$$

D'où l'on déduit, grâce à (5), que

$$(6) \quad \Delta|u| \geq |u|^3 \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega \setminus \{0\}),$$

et donc  $|u|$  est sous-harmonique dans  $\Omega \setminus \{0\}$ . Par conséquent  $u \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$  <sup>(1)</sup>

D'où  $\Delta u \in L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{0\})$ ,  $u \in C^1(\Omega \setminus \{0\})$ , etc...

(1) On notera que le "bootstrap" usuel ne s'applique pas ici. En effet  $u \in L^3_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \Rightarrow \Delta u \in L^1_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \Rightarrow u \in L^q_{loc}(\Omega \setminus \{0\}) \quad \forall q < 3$  (on marche à l'envers !).

2ème étape : On a

$$(7) \quad |u(x)| \leq \frac{3}{|x|} \quad \text{pour} \quad 0 < |x| < \frac{1}{2}.$$

Démonstration : On applique une technique introduite par Loewner-Nirenberg [10]. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  avec  $0 < |x_0| < \frac{1}{2}$  et soit  $R < |x_0|$ . On considère la fonction

$$U(x) = \frac{3R}{R^2 - |x - x_0|^2} \quad \text{définie sur } B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x - x_0| < R\}.$$

Un calcul aisé montre que U vérifie :

$$(8) \quad -\Delta U + U^3 \geq 0 \quad \text{sur } B_R(x_0),$$

et d'autre part on a

$$(9) \quad u \leq U = +\infty \quad \text{sur } \partial B_R(x_0).$$

Comparant (5) et (8) à l'aide du principe du maximum-appliqué sur  $B_R(x_0)$ , il vient

$$u \leq U \quad \text{sur } B_R(x_0).$$

En particulier  $u(x_0) \leq U(x_0) = \frac{3}{R}$  pour tout  $R < |x_0|$ .

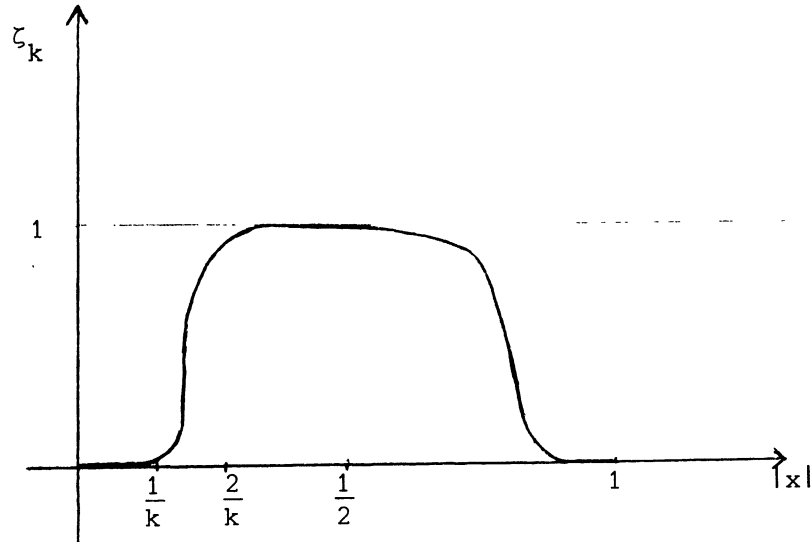
Avec le même argument pour  $-u$  on obtient (7).

3ème étape : On a  $u \in L_{loc}^3(\Omega)$ .

Démonstration : On choisit une suite de fonctions  $(\zeta_k)$  dans  $\mathcal{D}_+(\Omega \setminus \{0\})$  telle que

$$\begin{cases} \zeta_k(x) = 0 & \text{pour } |x| < \frac{1}{k} \\ \zeta_k(x) = 1 & \text{pour } \frac{2}{k} < |x| < \frac{1}{2} \\ \zeta_k(x) = \zeta(x) & \text{pour } \frac{1}{2} < |x| < 1 \\ |\Delta \zeta_k(x)| \leq Ck^2 & \text{pour } \frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k} \end{cases}$$

où  $\zeta$  est une fonction fixée indépendante de  $k$  :



Grâce à (6) on a

$$(10) \quad \int |u|^3 \zeta_k \leq \int |u| |\Delta \zeta_k| \leq ck^2 \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u| + \int_{\frac{1}{2} < |x| < 1} |u| |\Delta \zeta_k|$$

Appliquant la 2ème étape on en déduit que

$$\int |u|^3 \zeta_k \leq ck^2 \int_{1/k}^{2/k} r \, dr + c \leq c$$

On conclut par Fatou que  $\int_{|x| < \frac{1}{2}} |u|^3 < \infty$ .

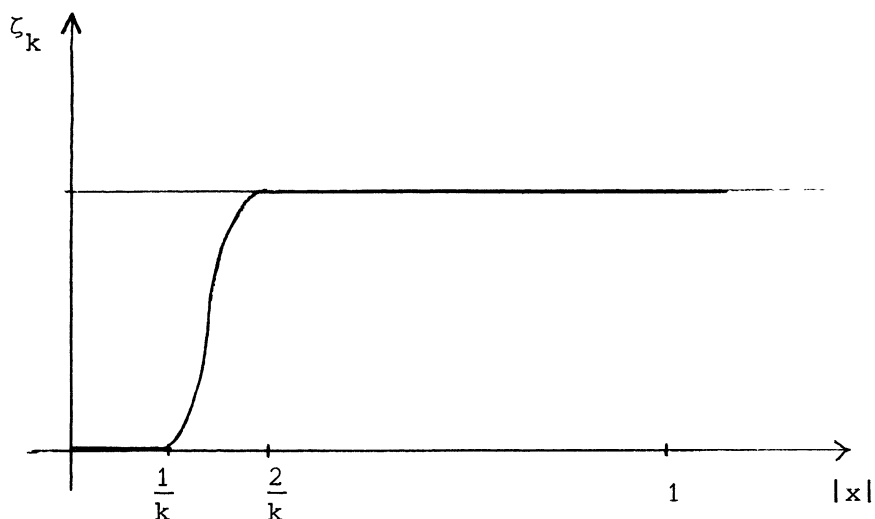
4ème étape : On a

$$- \Delta u + u^3 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration : On choisit une suite  $(\zeta_k)$  de fonctions régulières telles que

$$\begin{cases} \zeta_k(x) = 0 & \text{pour } |x| < \frac{1}{k} \\ \zeta_k(x) = 1 & \text{pour } \frac{2}{k} < |x| < 1 \\ |\nabla \zeta_k| \leq ck \\ |\Delta \zeta_k| \leq ck^2 \end{cases}$$





Etant donnée  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  il s'agit de vérifier que

$$-\int u \Delta \varphi + \int u^3 \varphi = 0.$$

D'après (5) on sait que

$$-\int u \Delta(\varphi \zeta_k) + \int u^3(\varphi \zeta_k) = 0.$$

Par Lebesgue et la 3ème étape on a

$$\int u(\Delta \varphi) \zeta_k \longrightarrow \int u(\Delta \varphi)$$

et

$$\int u^3 \varphi \zeta_k \longrightarrow \int u^3 \varphi.$$

Il reste donc à vérifier que

$$\int u \nabla \varphi \cdot \nabla \zeta_k \longrightarrow 0$$

et que

$$\int u \varphi \Delta \zeta_k \longrightarrow 0.$$

Par Hölder (et grâce à l'étape 3) on a

$$\left| \int u \nabla \varphi \cdot \nabla \zeta_k \right| \leq ck \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u| \leq \frac{c}{k}$$

$$\left| \int u \varphi \Delta \zeta_k \right| \leq ck^2 \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u| \leq c \left[ \int_{\frac{1}{k} < |x| < \frac{2}{k}} |u|^3 \right]^{1/3} \rightarrow 0$$

5<sup>ème</sup> étape : On a  $u \in C^2(\Omega)$ .

Démonstration : Reprendre l'étape 1 sur  $\Omega$  (au lieu de  $\Omega \setminus \{0\}$ ).

Remarque 1 : Le théorème 3 exprime que si  $p \geq \frac{N}{N-2}$ , toute singularité isolée pour l'équation (1) est éliminable <sup>(1)</sup>. Lorsque  $p < \frac{N}{N-2}$  des singularités isolées peuvent apparaître et on sait même les classifier (voir Véron [11] et Brezis-Lieb [4]). Par exemple si  $N = 3$ ,  $p = 3/2$  et si  $u \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$ ,  $u \geq 0$  vérifie

$$-\Delta u + u^{3/2} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus \{0\},$$

alors on a seulement trois possibilités

- ou bien  $u(x)$  est régulière en  $x = 0$
- ou bien  $u(x) \sim \frac{C}{|x|}$  avec  $C > 0$  constante arbitraire
- ou bien  $u(x) \sim \frac{144}{|x|^4}$ .

#### Principe de la démonstration du Théorème 2

Supposons pour simplifier que  $\Omega$  est borné. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions régulières telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \text{ faiblement au sens des mesures} \\ \|f_n\|_{L^1} \leq C. \end{array} \right.$$

On résoud le problème

(1) Plus généralement Véron [12] prouve qu'une variété singulière de dimension  $d$  est éliminable pour l'équation (1) si  $p \geq \frac{N-d}{N-d-2}$ .

$$(11) \quad \begin{cases} - \Delta u_n + |u_n|^{p-1} u_n = f_n & \text{sur } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

[grâce à la méthode variationnelle, par exemple :

$$\text{Min}_{v \in H_0^1 \cap L^p} \left\{ \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 + \frac{1}{p} \int |v|^p - \int f_n v \right\}$$

On établit les estimations :

$$(12) \quad \begin{cases} \|\Delta u_n\|_{L^1} \leq c \\ \|u_n\|_{L^p} \leq c \end{cases}$$

(ces estimations sont naturelles : chaque terme de (11) reste borné dans  $L^1$  quand la somme reste bornée).

On applique alors un résultat de compacité :

Lemme 1 : L'ensemble :

$$\{v \in W_0^{1,1}(\Omega), \quad \Delta v \in L^1 \quad \text{et} \quad \|\Delta v\|_{L^1} \leq 1\}$$

est relativement compact dans  $L^q(\Omega)$  pour chaque  $q < \frac{N}{N-2}$ .

A l'aide du Lemme 1 on peut extraire une sous-suite (encore notée  $u_n$ ) telle que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \quad \text{dans } L^q(\Omega), \quad \forall q < \frac{N}{N-2} \\ |u_n|^{p-1} u_n \rightarrow |u|^{p-1} u \quad \text{dans } L^1(\Omega) \end{cases}$$

(on utilise ici de façon essentielle l'hypothèse  $p < \frac{N}{N-2}$ )

On en déduit que  $u$  vérifie en particulier :

$$(13) \quad - \int u \Delta \varphi + \int |u|^{p-1} u \varphi = \int f \varphi$$

$$\forall \varphi \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Ceci est la définition d'une solution faible de (1) ; on montre enfin que (13) admet au plus une solution.

Remarque 2 : Lorsque  $f \in L^1(\Omega)$  on conclut sans faire appel au Lemme de compacité, mais en utilisant un argument de suite de Cauchy. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions régulières telles que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1(\Omega)$  (fortement). Soit  $u_n$  la solution de (11). Bien entendu, on a les estimations (12) mais de plus on a

$$\int ||u_n|^{p-1} u_n - |u_m|^{p-1} u_m| \leq \int |f_n - f_m|.$$

Par conséquent :

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^q(\Omega) \quad \forall q < \frac{N}{N-2}$$

et de plus

$$|u_n|^{p-1} u_n \rightarrow |u|^{p-1} u \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)$$

(sans hypothèse sur  $p$ ).

### § 3. LE CAS PARABOLIQUE

Considérons maintenant le problème

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-1} u = 0 & \text{sur} \quad Q = \Omega \times ]0, T[ \\ u(x, t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times ]0, T[ \\ u(x, 0) = f(x) & \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

avec  $1 < p < \infty$  ; la donnée initiale  $f(x)$  appartient à  $L^1(\Omega)$  ou plus généralement est une mesure. Lorsque  $f \in L^1(\Omega)$  on a le :

Théorème B : On suppose que  $\Omega$  est borné régulier ou bien que  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Alors pour tout  $f \in L^1(\Omega)$  il existe  $u \in L^p(Q)$  unique solution de (14) (en un sens à préciser).

Pour établir le Théorème B on peut adapter la démonstration du Théorème A (voir Remarque 2) ou bien utiliser la version non linéaire du Théorème de Hille-Yosida due à Crandall- Liggett [7] .

Lorsque  $f$  est une mesure la situation est plus complexe. Les résultats suivants sont dus à Brezis-Friedman [3] .

Théorème 4 : On suppose que  $p \geq \frac{N+2}{N}$  ( $N \geq 1$ ). Alors il n'existe pas de fonction  $u \in L^p_{loc}(Q)$  vérifiant

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{ess} \int u(x,t) \varphi(x) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega) .$$

Donc, par exemple ( $N = 1, p = 3$ ) il n'existe pas de solution locale du problème

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u^3 = 0 \\ u(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

Par contre si  $p < \frac{N+2}{N}$ , on a un résultat positif.

Théorème 5 : On suppose que  $\Omega$  est borné régulier ou bien que  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Soit  $p < \frac{N+2}{N}$ . Alors pour tout  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$  (mesure bornée), il existe  $u \in L^p(Q)$  unique solution de (14) (en un sens à préciser <sup>(1)</sup>) .

Comme pour le cas elliptique le théorème 4 se déduit d'un résultat

(1) en particulier  $u$  est régulière sur  $\overline{\Omega} \times ]0, T[$  et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int u(x,t) \varphi(x) = \int f(x) \varphi(x) \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega) .$$

concernant l'élimination des singularités :

Théorème 6 : On suppose que  $p \geq \frac{N+2}{N}$  ( $N \geq 1$ ) . Soit  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$  vérifiant

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{ess} \int u(x,t) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$$

Alors  $u \in C^2(\Omega \times [0, T[)$ .

On notera que le Théorème 6 contraste avec la situation linéaire usuelle puisque la solution élémentaire  $E(x,t)$  de l'équation de la chaleur vérifie :

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int E(x,t) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}) ,$$

mais  $E(x,t)$  est singulière au point  $(0,0)$ .

Remarque 3 : Lorsque  $p < \frac{N+2}{N}$  il existe des fonctions  $u(x,t)$  vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(x,0) = 0 & \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

avec  $u$  régulière en tout point  $(x,t) \neq (0,0)$  et  $u$  singulière en  $(0,0)$  (appliquer le Théorème 5, par exemple avec  $f = \delta$ ). Mais on ne sait pas encore classifier les singularités (voir Remarque 1).

REFERENCES

- [1] Ph. Benilan, H. Brezis : Some variational problems of the Thomas-Fermi type, in Variational inequalities, Cottle, Gianessi, Lions ed., Wiley (1980) p. 53-73.
- [2] Ph. Benilan, H. Brezis, M. Crandall : A semi-linear elliptic equation in  $L^1(\mathbb{R}^N)$ , Ann. Sc. Norm. Pisa 2 (1975) p. 523-555.
- [3] H. Brezis, A. Friedman : Non linear parabolic equations involving measures as initial conditions, J. Math. Pures et Appl. (à paraître).
- [4] H. Brezis, E. Lieb : Long range potentials in Thomas-Fermi theory, Comm. Math. Physics 65 (1979) p. 231-246.
- [5] H. Brezis, W. Strauss : Semi linear, second order elliptic equations in  $L^1$ , J. Math. Soc. Japan 25 (1973) p. 565-590.
- [6] H. Brezis, L. Véron : Removable singularities for some non linear elliptic equations, Archive Rat. Mech. Anal. 75 (1980) p. 1-6 .
- [7] M. Crandall, T. Liggett : Generation of semi-groups of non linear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math. 93 (1971) p. 265-298.
- [8] T. Kato : Schrödinger operators with singular potentials, Israel J. Math. 13 (1972) p. 135-148.
- [9] E. Lieb, B. Simon : The Thomas-Fermi theory of atoms, molecules and solids, Adv. in Math. 23 (1977) p. 22-116.
- [10] C. Loewner, L. Nirenberg : Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, in Contributions to Analysis Acad. Press (1974) p. 245-272.
- [11] L. Véron : Singular solutions of some non linear elliptic equations, J. Non linear Analysis, 5 (1981) p. 225-242.
- [12] L. Véron : Singularités éliminables d'équations elliptiques non linéaires, J. Diff. Eq. 41 (1981) p. 87-95.