

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

R. BEALS

R. COIFMAN

Scattering, transformations spectrales et équations d'évolution non linéaire II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 21,
p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982___A20_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 1 - 1 9 8 2

SCATTERING, TRANSFORMATIONS SPECTRALES ET
EQUATIONS D'EVOLUTION NON LINEAIRE II

par R. BEALS et R. COIFMAN

§ 1. Nous nous proposons de continuer la description commencée à l'exposé 22, 1981, de la méthode de résolution de certaines équations non linéaires [4].

Commençons par une liste d'équations et des problèmes spectraux associés. Nous décrirons ensuite un algorithme général de solution.

La première est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV)

$$U_t + U_{xxx} + 6UU_x = 0$$

le problème spectral associé est

$$\psi_{xx} + (z + U)\psi = 0$$

(l'équation s'obtient en vérifiant la condition de compatibilité avec l'évolution $\psi_t = U_x \psi + (4z - 2U)\psi_x$.)

La seconde traitée par Zakharov-Shabat est l'équation non linéaire de Schrödinger

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2|u|^2 u$$

Le problème spectral associé est matriciel c'est-à-dire :

$$(1) \quad \frac{d\psi}{dx} = (zJ + Q)\psi \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & i\bar{u} \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

$\psi = (\psi_{ij})$ est une matrice non singulière.

Cette équation est un cas particulier d'équations correspondantes aux systèmes matriciels (décrites en [4]). Plus précisément il s'agit d'équations

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_u^K(u)$$

où $\mathcal{L}_u f = J^{-1} \frac{d}{dx} f + J^{-1} u_1 f + [u, \int^x [J^{-1} f, u]_0 dy]$ avec $u = (u_{ij})$,

$u_0 = \text{diag } (u)$, $u_1 = u - u_0$ et $\mathcal{J}^{-1}u = \left(\frac{u_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$. Le problème spectral est le même que ci-dessus avec

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (Q = u), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j .$$

L'équation de Benjamin Ono [2]

$$(3) \quad U_t + 2UU_x + HU_{xx} = 0 \quad \text{où } Hf = v.p \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

est la transformée de Hilbert. Le problème spectral correspondant est aussi pseudo-différentiel, c'est-à-dire

$$(4) \quad i \phi_x^\pm + z(\phi^+ - \phi^-) = -u \phi^+ \quad \text{où } f^\pm = \frac{1}{2}(f \pm iHf)$$

Cette dernière équation qui apparaît dans l'étude des longues vagues gravitationnelles entre deux liquides (huile et vinaigre par exemple) est la "limite" d'une famille remarquable d'équations [6]

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cosh(\delta D)u \quad \text{ayant un problème spectral}$$

correspondant $Q_\delta(D, Z) \psi(x, z) = u(x) \psi(x, z)$

où nous adoptons la notation pseudo-différentielle

$$Q_\delta(D, z) f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} Q_\delta(\xi, z) \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$(6) \quad \text{avec } Q_\delta(\xi, z) = \xi - z \coth 2\delta Z + Z(\text{csch } 2\delta Z) e^{-2\delta\xi}$$

Avant de décrire l'algorithme permettant la solution de ces équations mentionnons que cette méthode a été développée en [4] [5] pour traiter le cas matriciel (2) (ou J n'est pas antihermitienne) et que récemment Ablowitz et Fokas [3] ont réussi à résoudre (3) suivant cet algorithme (et aussi pas une autre méthode de linéarisation directe).

Remarquons que si l'on pose le problème général de caractériser les problèmes spectraux scalaires de type

$$Q(D, Z) \psi(x, Z) = u(x) \psi(x, Z)$$

pour lesquels les fonctions propres ψ peuvent s'exprimer par une série de Neumann (7). (Ici l'opérateur C agit sur la variable spectrale) nous sommes conduits à une équation fonctionnelle pour Q

$$[Q(\xi + \zeta + z, z) - Q(\xi, \zeta)] p(z, \zeta) = \pi(\xi, \zeta)$$

qui donne (modulo des solutions triviales) $Q(\xi, z) = \xi^2 - z^2$, et une famille $Q_\delta(\xi, z)$ dépendant d'un paramètre qui est donné en (6) et ce sont les seules solutions de l'équation qui dépendent analytiquement de ξ, z . (Ce résultat a été obtenu en collaboration avec B. Dahlberg).

§ 2. Nous décrivons deux cas de manière plus détaillée.

L'exemple le plus simple correspond au problème spectral matriciel, voir [4] [5].

$$(*) \quad \frac{d}{dx} \mathcal{M} + Z[J, \mathcal{M}] = u \mathcal{M}$$

ou $u = (u_{ij})$ est une matrice de potentiels avec $u_{ii} \equiv 0$ $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$. (La liaison entre \mathcal{M} et ψ de (1) est donnée par $\mathcal{M} = \psi e^{-xzJ}$).

On démontre qu'il existe un ensemble ouvert dense dans $L^1(\mathbb{R})$ tel que si u appartient à cet ensemble alors il existe une solution unique (matrice fondamentale) $\mathcal{M}(x, z)$ de (*) qui est méromorphe en z pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, pour tout x , et qui vérifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{M}(x, z) = I = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \mathcal{M}(x, z)$.

En outre les pôles de \mathcal{M} sont simples et ces différentes colonnes ont des pôles distincts. La fonction \mathcal{M} a une extension continue à la fermeture de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$:

$$\text{Ici } \Sigma = \{z \in \mathbb{C} \quad \text{Re}(\lambda_i - \lambda_j)z = 0 \quad \text{pour un couple } i, j \}$$

voir [4] .

Comme l'indique ce résultat $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Z}$ est une somme d'un nombre fini de mesures de Dirac (localisés aux pôles) et d'un certain nombre de fonctions supportées en Σ correspondant aux sauts de \mathcal{M} . C'est cette information qui nous fournit la transformée spectrale de u . Plus précisément si Σ_ν est un rayon de $\Sigma = \cup_\nu \Sigma_\nu$ et Ω_ν est la région entre $\Sigma_{\nu-1}$ et Σ_ν . On écrit

$$\mathcal{M}^-(x, \zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega_\nu}} \mathcal{M}(x, z) \quad \xi \in \Sigma_\nu$$

et

$$\mathcal{M}^+(x, \zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega_{\nu+1}}} \mathcal{M}(x, z)$$

On vérifie que :

$$\mathcal{M}^+(x, \zeta) = \mathcal{M}^-(x, \zeta) e^{x\zeta J} V_\nu(\xi) e^{-x\zeta J}, \quad \xi \in \Sigma_\nu$$

et

$$\text{Res } \mathcal{M}(x, z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \mathcal{M}(x, z) e^{xz_j J} v(z_j) e^{-xz_j J}.$$

Pour certaines matrices $V_\nu(\xi)$ $V(z_j)$ qui sont uniquement déterminées, et qui en plus déterminent le potentiel u de manière unique.

Ici lorsque u évolue selon (2) nous obtenons que

$$V_\nu(\xi, t) = e^{t\xi^{k_j J}} V_\nu(\xi) e^{-t\xi^{k_j J}}$$

et

$$V(z_j, t) = e^{tz_j^{k_j J}} v(z_j) e^{-tz_j^{k_j J}}$$

(les pôles z_j sont stables).

La construction de u à partir de la donnée de v peut se faire à partir de (7) lorsque la "transformée spectrale" v est proche de I .

En réalité la situation est équivalente à résoudre un problème de type Riemann-Hilbert assez délicat et exige l'utilisation de certaines contraintes de nature algébrique vérifiées par la transformée spectrale, voir [5].

Notons enfin que l'on peut (comme pour la transformation de Fourier) convertir une information sur la décroissance de u en régularité de v , de la régularité de u en décroissance de $v - I$, et réciproquement, voir [5].

Nous allons esquisser maintenant des résultats d'Ablowitz et Fokas concernant l'équation de Benjamin-Ono, (3).

Le problème spectral associé est pseudodifférentiel :

$$P^+ \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \psi - z P^+ \psi = U P^+ \psi$$

ou $P^+ f = \int_0^\infty e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$ qui se convertit en

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx} \psi^+ - z(\psi^+ - 1) = P^+(u\psi^+), \quad \psi^+ = P^+ \psi.$$

ou encore

$$\psi^+ = 1 + G^+(u\psi^+)$$

avec

$$G_z^+(f)(x) = \int_0^\infty \hat{f}(t) \frac{e^{ixt}}{t-z} dt \quad z \notin \mathbb{R}_+.$$

Un calcul simple montre que :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi^+ = \alpha(t) e^{ixt} + G_-^+(u \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi^+) \quad t > 0$$

$$\text{ou } \alpha(t) = \int e^{-iyt} \psi_+^+(y,t) u(y) dy, \quad t > 0.$$

(ici $G_-^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G^+_{\varepsilon > 0, t-i\varepsilon}$) c'est à dire $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi^+ = \alpha(t) \phi(x,t)$ où ϕ est la fonction propre vérifiant :

$$\phi = e^{ixt} + G_-^+(u \phi)$$

Si on écrit $\varphi = e^{-ixt} \phi$ on trouve

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 + \int G_-^+(x-y, t-i0) e^{-it(x-y)} u \varphi(y, t) dy . \\ &= 1 + A(\varphi) \end{aligned}$$

ou
$$\varphi = (I - A)^{-1} 1$$

ainsi

$$\frac{d}{d\tau} \varphi(x, \tau) = -(I - A)^{-1} \left[\frac{d}{d\tau}, A \right] \varphi$$

et un calcul simple montre que

$$\left[\frac{d}{d\tau}, A \right] \varphi = \frac{e^{-ix\tau}}{\tau - i0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+iy\tau} \varphi(y, \tau) u(y) dy = \beta(\tau) e^{-ix\tau}$$

d'autre part on vérifie immédiatement que :

$$(I - A)^{-1} e^{-ix\tau} = \psi^+(x, \tau - i0) e^{-ix\tau}$$

En combinant ces calculs on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi^+ &= e^{ix\tau} \alpha(\tau) \int_0^\tau \beta(\tau') e^{-ix\tau'} \psi^+(x, \tau' - i0) d\tau' \\ &\stackrel{\text{def}}{=} K(\psi^+) \end{aligned}$$

nous avons donc à résoudre :

$$\psi^+ = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{K(\psi^+)(x, \tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \mathbb{R}^+ - i0.$$

Ici la transformée spectrale est donnée par les fonctions α, β qui elles, évoluent linéairement en t , voir [2].

Nous terminons en mentionnant que Ablowitz et Fokas ont réussi à traiter l'équation de Kadomtsev et Petviashvili en suivant le même schéma.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur : The inverse scattering transform - Fourier analysis for non linear problems. Studies Appl. Math. 53 (1974) 249-315.
- [2] M. Ablowitz, A. S. Fokas and R. L. Anderson : The direct linearizing tranform and the Benjamin-Ono equation. To appear Phys. Rev. Lett.
- [3] M. Ablowitz, A. S. Fokas : On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev-Petviashvili equation". To appear.
- [4] R. Beals, R. Coifman : Scattering, transformations spectrales et équations d'évolution non linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-81, exp. 22, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [5] R. Beals, R. Coifman : Scattering and inverse scattering for first order systems. To appear.
- [6] Y. Kodama, J. Satsuma, M. Ablowitz : Nonlinear intermediate long wave equation : analysis and method of solution, Phys. Rev. Letters 46 (1981) 687-690.

