Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. M. Bony

Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. nº 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A2_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

INTERACTION DES SINGULARITES POUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

par J. M. BONY

Exposé n° II

13 Octobre 1981

§ 1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons à des équations hyperboliques non linéaires du type suivant :

(1) $$P(x,D_x)u(x) = F(x,u(x),\ldots, \partial^{\beta}u(x),\ldots)_{|\beta|\leq m-1} ,$$

où $P(x,D_x)$ est un opérateur différentiel linéaire, à coefficients réels C^{∞}, strictement hyperbolique par rapport à x_n, et où F est une fonction réelle C^{∞} de ses arguments. Nous nous posons le problème de déterminer les singularités d'une solution u assez régulière de (1) connaissant, soit les singularités de u pour $x_n < 0$, soit les singularités des données de Cauchy sur l'hyperplan $x_n = 0$. Nous ne nous limitons plus, comme dans [1], à une régularité d'un ordre limité, mais nous cherchons à savoir où u est, ou n'est pas, C^{∞} (localement ou microlocalement).

Bien entendu, nous n'obtiendrons de résultats significatifs que dans des cas très particuliers. Le théorème 1 ci-dessous, généralisant les résultats de [2], étudie le cas où les singularités de u sont portées, pour $x_n < 0$, par deux hypersurfaces caractéristiques. Le théorème 2 est consacré au cas où les données de Cauchy n'ont de singularités que sur une hypersurface de l'hyperplan $x_n = 0$.

Rappelons la définition suivante (voir [2]) que nous étendrons plus loin. Si Σ est une hypersurface, les classes de distributions conormales associées à Σ (pour $k = \infty$, ce sont effectivement les distributions de Fourier associées à la variété lagrangienne conormale à Σ) sont définies par :

$$u \in H^s(\Sigma,k) \Leftrightarrow u \in H^s \text{ et } Z_{i_1}\ldots Z_{i_\ell}\, u \in H^s \text{ pour } \ell \leq k,$$

où les Z_i sont des champs de vecteurs tangents à Σ. Ces fonctions appartiennent à H^{s+k} hors de Σ (et appartiennent microlocalement à H^{s+k} hors du conormal de Σ). Leur régularité locale près de Σ n'est en général pas meilleure que H^s.

<u>Théorème 1</u> : Soient Σ_1 et Σ_2 deux hypersurfaces caractéristiques se coupant en Γ et soient $\Sigma_3,\ldots,\Sigma_m$ les autres hypersurfaces caractéristiques issues de Γ. On suppose que $u \in H^s$, $s > n/2 + m$ est une solution de (1), et que, pour $x_n < 0$, on ait $u \in H^{s+k}$ hors de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $u \in H^s(\Sigma_i,k_i)$ près de Σ_i $(i = 1,2)$.
On a alors, pour $x_n > 0$,

$$u \in H^{s+k} \text{ hors de } \bigcup_1^n \Sigma_i$$

$$u \in H^s(\Sigma_i,k) \text{ près de } \Sigma_i \setminus \Gamma \quad \text{pour } i = 1,2 .$$

Près de $\Sigma_j \setminus \Gamma$,pour $j = 3,\ldots,m$, on a, en posant $t_o = 2s-n/2-m+1$

$$u \in H^{s+k} \quad \text{si} \quad s+k \leqslant t_o$$

$$u \in H^{t_o}(\Sigma_j, \ell) \quad \text{pour} \quad \ell = \text{partir entière de } s+k-t_o \text{ sinon.}$$

Le théorème serait encore valable si les singularités incidentes étaient localisées sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots \cup \Sigma_j$, $j \leqslant m$ pour $x_n < 0$, mais l'hypothèse que toutes ces Σ_j se coupent en Γ est peu réaliste. Le cas de trois hypersurfaces caractéristiques se coupant en position générale est beaucoup plus difficile à traiter, même si P est l'opérateur des ondes.

Théorème 2 : Soit H l'hyperplan $x_n = 0$, et Γ une hypersurface de H. On suppose que $u \in H^s$, $s > n/2 + m$ est une solution de (1), et que les données de Cauchy $\gamma_j u = \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j u\big|_H$ $j = 0,\ldots,m-1$ sont des distributions (sur H) conormales associées à Γ :

$$\gamma_j u \in H^{s-j-1/2}(\Gamma,k).$$

Soient $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_m$ les hypersurfaces caractéristiques passent par Γ . On a alors :

$$u \in H^{s+k} \quad \text{hors de} \quad \bigcup_1^m \Sigma_j$$

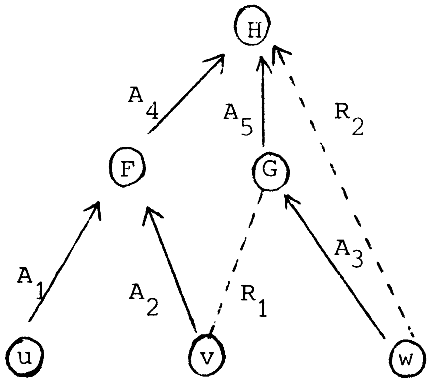
$$u \in H^s(\Sigma_j,k) \quad \text{près de} \quad \Sigma_j \setminus \Gamma .$$

Bien entendu, ces résultats sont locaux. Ils ne sont valables globalement dans $\mathbb{R}^n$ que si les Σ_j ne se recoupent pas et restent régulières (le cas des caustiques est un autre problème!) . Tant que les Σ_j ne se coupent que deux à deux, on peut réappliquer plusieurs fois de suite le théorème 1.

§ 2. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS NON LINEAIRES D'ORDRE O

Pour $s > n/2$, les applications $(u_1,\ldots,u_N) \rightsquigarrow F(x,u_1(x),\ldots,u_N(x))$ où F est une fonction C^∞ de ses arguments envoient $(H^s)^N$ dans H^s . Les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre O appliquent également H^s dans H^s. Nous considérerons enfin des applications régularisantes non linéaires $u \rightsquigarrow R(u)$ appliquant $\mathcal{D}'$ dans C^∞. En composant entre eux tous ces types d'opérateurs, on obtient les opdnlO élémentaires : ils peuvent être représentés par un arbre du type ci-dessous, à chaque flèche pleine étant associé un opérateur pseudo-différentiel d'ordre O, à chaque flèche pointillée un opérateur régularisant non linéaire, et, à chaque sommet , une fonction de classe C de x et d'autant de variables qu'il y a de flèches aboutissant au sommet. On a représenté ici l'opérateur :

$$\mathcal{L}(u,v,w) = H[x, A_4F(x, A_1u, A_2v), A_5G(x, R_1(v), A_3w), R_2(w)].$$



<u>Définition 3</u> : Nous appellerons opdnlO un opérateur du type suivant :

$$\mathcal{L}(u_1,\ldots,u_N) = \int_{\tau\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_\tau(u_1,\ldots,u_N)h(\tau)\,d\tau$$

où les $\mathcal{L}_\tau$ sont des opdnlO élémentaires associés au même arbre, où $h(\tau)$ est à décroissance rapide, et où

- pour chaque flèche pleine de l'arbre, en notant A_τ l'opd associé, pour chaque semi-norme p sur S^o l'application $\tau \rightsquigarrow p(A_\tau)$ est à croissance lente
- pour chaque flèche pointillée, on a des estimations :

$$\| R_\tau(u)\|_{s'} \leqslant C(1+|\tau|)^N(1+\|u\|_s)^N$$

où C et N dépendent de s et s', mais pas de τ et u .

- pour chaque sommet, les fonctions F_τ sont à croissance lente ainsi que chacune de leurs dérivées, et pour chaque semi-norme p de O_M, l'application $\tau \rightsquigarrow p(F_\tau)$ est à croissance lente en τ .

<u>Théorème 4</u> : Soit $\mathcal{L}$ un opdnlO de N variables, et $u_1,\ldots,u_N$ appartenant à H^s, $s > n/2$. Alors

a) $\mathcal{L}(u_1,\ldots,u_N) \in H^s$

b) Il existe des opérateurs paradifférentiels d'ordre O : $B_1,\ldots,B_N$ appartenant à $Op(\Sigma^o_{s-n/2})$ tels que

$$\mathcal{L}(u_1,\ldots,u_N) = \sum_1^N B_ju_j + r \quad \text{avec} \quad r \in H^{2s-n/2} .$$

Si $\mathcal{L}$ est un opdnlo élémentaire, a) est évident, et b) résulte immédiatement des résultats de [1] (en tenant compte de l'amélioration de Meyer [3] pour avoir $r \in H^{2s-n/2}$ au lieu de $H^{2s-n/2-\varepsilon}$). Dans le cas général, on obtient pour chaque τ des $B_{j,\tau}$ et un r_τ. Il reste à montrer à partir des hypothèses que $\|r_\tau\|_{2s-n/2}$ et $p(B_{j,\tau})$ pour chaque semi-norme de Op $\Sigma^o_{s-n/2}$ sont à croissance lente, ce qui est aussi facile que fastidieux.

§ 3. LES ESPACES $H^s(\mathcal{M},k)$

Nous noterons ε_k l'espace des opd classiques d'ordre inférieur ou égal à k.

Nous nous donnerons des opérateurs $M_1,\dots,M_p$ appartenant à ε_1, ou plutôt, de manière plus invariante, le ε_o-module $\mathcal{M}$ engendré par 1 et les M_j

$$M \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow M \in \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad M = \sum_1^p A_j M_j + A_o \quad , \quad A_j \in \varepsilon_o \; .$$

Il est clair que l'appartenance à $\mathcal{M}$ se lit sur le symbole principal $\sigma_1(M)$. On dit que N appartient à $\mathcal{M}$ localement en x_o [resp. microlocalement en (x_o,ξ_o)] s'il existe $M \in \mathcal{M}$ tel que $\sigma_1(M - N) = 0$ près de x_o [resp. (x_o,ξ_o)]. On dit de même que les N_j engendrent $\mathcal{M}$ en x_o [resp (x_o,ξ_o)] si pour tout $M \in \varepsilon_o$, il existe des $A_j \in \varepsilon_o$ tels que $\sigma_1(M - \Sigma A_j N_j) = 0$ près de x_o [resp. (x_o,ξ_o)].

<u>Définition 5</u> : On note $H^s(\mathcal{M},k)$ l'espace défini par

$$u \in H^s(\mathcal{M},k) \Longleftrightarrow u \in H^s \quad \text{et} \quad M_{i_1}\dots M_{i_\ell} u \in H^s \quad \text{pour } \ell \leqslant k \text{ et } M_{i_j} \in \mathcal{M}$$

Il serait important de caractériser les $\mathcal{M}$ tels que $H^s(\mathcal{M},k)$ soit une algèbre pour $s > n/2$. On voit facilement qu'il suffit que $\mathcal{M}$ soit engendré au voisinage de chaque point x_o par des champs de vecteurs. Par contre, il n'est pas suffisant que $\mathcal{M}$ soit engendré par des champs de vecteurs microlocalement au voisinage de chaque (x_o,ξ_o). Par exemple, en dimension 2, le module engendré par $(1-\Delta)^{-1/2} D_{x_1} D_{x_2}$ est engendré microlocalement soit par D_{x_1} soit par D_{x_2}. Pour α assez grand, on a $|x_1|^\alpha$ et $|x_2|^\alpha \in H^s(\mathcal{M},\infty)$ et $|x_1|^\alpha |x_2|^\alpha \notin H^s(\mathcal{M},\infty)$. Nous donnons ci-dessous une condition intermédiaire.

<u>Définition 6</u> . On dit que $\mathcal{M}$ satisfait à la condition des trois points si, quels que soient $x_o \in \mathbb{R}^n$, quels que soient $\xi_1,\xi_2,\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, il existe des champs de vecteurs $Z_1,\dots,Z_q$ près de x_o, tels que :

a) les Z_j appartiennent à $\mathcal{M}$ microlocalement en (x_o,ξ_1) et en (x_o,ξ_2).

b) Pour tout $M \in \mathcal{M}$ il existe des $A_j \in \varepsilon_o$ tels que

$$\sigma_1(M - \Sigma A_j Z_j) = 0 \text{ près de } (x_o, \eta).$$

<u>Théorème 7</u> : On suppose que $\mathcal{M}$ satisfait à la condition des trois points. On a alors pour $s > n/2$:

a) $H^s(\mathcal{M},k)$ est une algèbre.

b) Soit $F(x,u,\dots,u_N)$ de classe C^∞ à support compact en u, et soient $u_j(x)$, $j = 1,\dots,N$ appartenant à $H^s(\mathcal{M},k)$. Alors

$$x \rightsquigarrow F(x,u_1(x),\dots,u_N(x)) \in H^s(\mathcal{M},k)$$

et de plus, pour chaque $M^I = M_{i_1}\dots M_{i_\ell}$, $\ell \leqslant k$, $M_{i_j} \in \mathcal{M}$, on a

$$M^I F(x,u_1(x),\dots,u_N(x) = \mathcal{L}(u_j,\ M^J u_j)$$

où $\mathcal{L}$ est un opdnlO, où j varie de 1 à N, et où M^J parcourt tous les produits (avec répétition) d'au plus ℓ éléments d'un système de générateurs de $\mathcal{M}$.

Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

<u>Lemme 8</u> : Pour u et v $\in H^s(\mathcal{M},1)$, on a $M(u,v) = \mathcal{L}(u,v,M_i u,M_i v)$ où $\mathcal{L}$ est un opdnlO élémentaire.

Soit $1 = \Sigma E_j(x,D_x)$ avec $E_j \in \varepsilon_o$ une partition de l'unité, le symbole de chaque E_j étant nul hors d'un petit ouvert conique. On a alors $M(u.v) = \Sigma\Sigma\Sigma\, E_i M(E_{j_1} u.E_{j_2} v)$. Pour chacun de ces termes, on pourra trouver les Z de la condition des 3 points valable pour les triplets appartenant à $\text{Supp}\,\sigma\,(E_{j_1}) \times \text{Supp}\,\sigma(E_{j_2}) \times \text{Supp}\,\sigma(E_i)$. On peut donc pour un tel terme (réécrit $AM(Bu.Cu)$) décomposer AM selon les champs de vecteurs Z :

$$AM(Bu.Cv) = \Sigma\, D_j Z_j(Bu.Cv) = \Sigma\, D_j(Z_j Bu.Cv) + \Sigma\, D_j(Bu.Z_j Cv) .$$

On a $Z_j B \in \mathcal{M}$ car Z_j appartient microlocalement à $\mathcal{M}$ sur le support de $\sigma_1(B)$. En décomposant les $Z_j B$ et $Z_j C$ sur un système de générateurs de $\mathcal{M}$, on a bien obtenu une expression $M(u.v) = \mathcal{L}(u,v,M_i u,M_i v)$.

Lemme 9 : Soit $A \in \varepsilon_o$ dont le symbole est concentré dans un petit ouvert conique, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, à croissance lente ainsi que chacune de ses dérivées. Alors, pour $M \in \mathcal{M}$, on a $Mf(Au) = \mathcal{L}(u, M_j u)$, où $\mathcal{L}$ est un opdnlO élémentaire.

Le spectre singulier de Au est contenu dans $\{(x,\xi) \mid \xi \in \Gamma)$ où Γ est un petit cône que l'on peut supposer convexe saillant. Il est bien connu que, dans ce cas, le spectre singulier de f(Au) est également contenu dans ce même ouvert conique. Soit B(x,D) dont le symbole vaut 1 sur Supp $\sigma(A)$ et 0 hors d'un petit voisinage de $\sigma(A)$. On a donc

$$Mf(Au) = BMf(Au) + (I - B)Mf(Au)$$

$R(u) = (1-B)Mf(Au)$ est régularisant non linéaire, et il faut vérifier que $\|R(u)\|_{s'} \leqslant C(1 + \|u\|_s)^N$, ce qui n'est pas très difficile. Enfin, d'après la condition des 3 points pour $\eta = \xi_1 = \xi_2$ dans le support de $\sigma(A)$:

$$BMf(Au) = \Sigma C_j Z_j f(Au) = \Sigma C_j [f'(Au) . Z_j Au] \quad .$$

On a $Z_j A \in \mathcal{M}$ et donc le résultat en décomposant les $Z_j A$ sur un système de générateurs de $\mathcal{M}$.

Démonstration du théorème 7

On déduit du lemme 8, par récurrence, que

$$(2) \qquad M(v_1 . v_2 ... v_n) = \mathcal{L}(v_i, M_j v_i) \qquad \text{pour } v_i \in H^s(\mathcal{M}, 1)$$

puis $M^I(v_1 . v_2 ... v_N) = \mathcal{L}(v_i, M^J v_i)$ pour $v_i \in H^s(\mathcal{M}, k)$. Cela prouve que $H^s(\mathcal{M}, k)$ est une algèbre, et que la partie b) du théorème est valable lorsque F est un polynôme en u, le $\mathcal{L}$ obtenu étant un opdnlO élémentaire.

Lorsque $F \in C_o^\infty$ (pour simplifier les notations, nous supposerons que F ne dépend que d'une seule variable u), on écrit

$$F(u(x)) = \int e^{i\tau u(x)} \hat{F}(\tau) d\tau \quad .$$

Soit $1 = \Sigma E_j(x,D)$ une partition de l'unité suffisamment fine. On a

$$\exp(i\tau u) = \prod \exp(i\tau E_j u), \text{ et donc}$$

$$M \exp(i\tau u) = \mathcal{L}(\exp(i\tau E_j u), M_k \exp(i\tau E_j u)) \qquad \text{d'après } (2).$$

D'après le lemme 9, on a $M \exp(i\tau E_j u) = \mathcal{L}_j(\tau u, M_k \tau u)$, et donc finalement $M \exp(i\tau u) = \mathcal{L}'(\tau u, \tau M_k u)$, où $\mathcal{L}'$ est un opdnl0 élémentaire indépendant de τ . On a donc

$$MF(u) = \int \mathcal{L}_\tau(u, M_k u)\hat{F}(\tau)d\tau .$$

où on a posé $\mathcal{L}_\tau(u, M_k u) = \mathcal{L}'(\tau u, \tau M_k u)$ qui vérifie bien les conditions de croissance lente en τ . On traite de même l'expression de $M^I F(u)$, à partir de l'expression de $M^I(v_1 \dots v_N)$.

§ 4. LES ESPACES $H^s(\Sigma,k)$ ET LE THEOREME D'INTERACTION

Soit $\Sigma = \bigcup_i^m \Sigma_i$ la réunion de m hypersurfaces lisses se coupant 2 à 2 transversalement selon une sous-variété Γ de codimension 2. Soit $\mathcal{M}_\Sigma$ l'espace des opd d'ordre 1 dont le symbole principal s'annule sur la réunion des conormaux à Σ_i et du conormal de Γ. On peut décrire facilement des systèmes de générateurs de $\mathcal{M}_\Sigma$:

- Si $x_o \notin \bigcup_1^m \Sigma_i$, on a $\mathcal{M}_\Sigma = \varepsilon_1$ au voisinage de x_o
- Si $x_o \in \Sigma_i \setminus \Gamma$, $\mathcal{M}_\Sigma$ est engendré localement par les champs de vecteurs tangents à Σ_i .
- Si $x_o \in \Gamma$, ξ_o non orthogonal à Γ , $\mathcal{M}$ coïncide avec ε_1 microlocalement.
- Si $x_o \in \Gamma$, ξ_o orthogonal à Γ, ξ_o non orthogonal aux Σ_j, $\mathcal{M}$ est engendré microlocalement par les champs de vecteurs tangents à Γ.
- Si $x_o \in \Gamma$, ξ_o orthogonal à Σ_j, alors $\mathcal{M}$ est engendré microlocalement par les champs de vecteurs tangents à Σ_j <u>et</u> à Γ .

<u>Définition 10</u> : On pose $H^s(\Sigma,k) = H^s(\mathcal{M}_\Sigma,k)$.

En dehors de Σ, $H^s(\Sigma,k)$ coïncide avec H^{s+k}. Au voisinage de $x_o \in \Sigma_j \setminus \Gamma$, l'espace $H^s(\Sigma,k)$ coïncide avec $H^s(\Sigma_j,k)$. Par contre, ces espaces sont plus restreints que ceux que nous avions introduits dans [2] (la différence ne se voit qu'au voisinage de Γ).

<u>Théorème 11</u> : $\mathcal{M}_\Sigma$ vérifie la condition des trois points.

Il faut d'abord remarquer que pour $\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, l'espace $\mathcal{M}_{\Sigma'}$ est engendré localement (et pas seulement microlocalement) par des champs de vecteurs. On peut en effet supposer Σ_1 et Σ_2 définies respectivement par $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. Dans ce cas, les champs de vecteurs x_1D_1, x_2D_2, $D_3,\ldots,D_n$ constituent un système de générateurs de $\mathcal{M}_{\Sigma'}$.

Revenons à nos trois points (x_o,ξ_1); (x_o,ξ_2) et (x_o,η). Il n'y a de difficulté que pour $x_o \in \Gamma$. Il est clair qu'il existe (au moins) m-2 hypersurfaces Σ_j (disons $\Sigma_3,\ldots,\Sigma_m$) telles que ni ξ_1 ni ξ_2 ne soient orthogonaux à ces Σ_j en x_o . On pose $\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, et l'analyse des générateurs de $\mathcal{M}_\Sigma$ prouve clairement que :

- $\mathcal{M}_\Sigma$ et $\mathcal{M}_{\Sigma'}$ coïncident microlocalement au voisinage de (x_o,ξ_1) et (x_o,ξ_2)
- $\mathcal{M}_\Sigma \subset \mathcal{M}_{\Sigma'}$, au voisinage de (x_o,η)

d'où la condition des trois points, les Z_i étant les champs de vecteurs engendrant $\mathcal{M}_{\Sigma'}$.

<u>Théorème 12</u> : Si $M \in \mathcal{M}$, on a $[P,M] \in \varepsilon_{m-1}\mathcal{M} + \varepsilon_o P$.

Cette propriété se lit sur les symboles principaux, et il suffit de la démontrer microlocalement. Le symbole principal $\sigma_m([P,M])$ s'annule sur les cotangents $T^*_{\Sigma_i}$ aux Σ_i, mais pas en général sur le cotangent à Γ. Le seul point délicat se situe au voisinage de $x_o \in \Gamma$, ξ_o orthogonal à Σ_1. L'opérateur P étant à caractéristiques simples, la restriction de $\sigma_m(P)$ à T^*_Γ ne s'annule que sur $T^*_\Gamma \cap T^*_{\Sigma_1}$, et y a un zéro simple. On peut donc trouver $\lambda(x,\xi)$ tel que $\sigma_m([P,M]) - \lambda\, \sigma_m(P)$ s'annule sur T^*_Γ . L'opérateur $[P,M] - \lambda(x,D)P$ a donc un symbole principal s'annulant sur $T^*_\Gamma \cup T^*_{\Sigma_1}$ et il appartient microlocalement à $\mathcal{M}$.

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Elle suit la méthode déjà utilisée dans [2] . Dans une première étape, on considère le vecteur colonne U constitué de u et des M_iu où les M_i forment un système de générateurs de $\mathcal{M}_\Sigma$. On a $M_iu \in H^{s-1}$, et

$$P(M_iu) = [P,M_i]u + M_iF(u,\ldots,\partial^\beta u)$$

et, d'après le théorème 12

$$P(M_iu) = \Sigma\, C_jM_ju + \lambda(x,D)F(u,\partial^\beta u) + M_iF(u,\ldots,\partial^\beta u).$$

On a (théorème 7) $M_i F(u,\dots,\partial^\beta u) = \mathcal{L}(u,\dots,M_j\partial^\beta u)$, et donc (théorème 4)

$$P(M_i u) = \Sigma\, D_{ij} M_j u + D_{io} u + r_i$$

où les D_{ij} sont des opérateurs paradifférentiels appartenant à $\mathrm{Op}\,\Sigma^{m-1}_{s-n/2-m}$ et $r_i \in H^{2s-2m-n/2}$.

On obtient donc un système paradifférentiel à partie principale diagonale

$$PU = (D_{ij})U + \begin{bmatrix} \cdot\cdot \\ (r_i) \\ \cdot\cdot \end{bmatrix} \tag{3}$$

où on sait que $U \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, que $U \in H^s$ pour $x_n < 0$, et que, en dehors de $T^*_{\Sigma_1} \cup T^*_{\Sigma_2}$, U appartient microlocalement à H^{s+k-1}. Le théorème de propagation des singularités de [1] étendu aux systèmes à partie principale diagonale (voir [2]) permet d'affirmer que $U \in H^s(\mathbb{R}^n)$ puis que $U \in H^{t_1}$ microlocalement en dehors de $T^*_{\Sigma_1} \cup T^*_{\Sigma_2}$ pour $t_1 = \min(s+k-1,\ 2s-n/2-m+1)$.

On poursuit par récurrence. A la ℓ^e étape ($\ell \leqslant k$), le vecteur colonne U_ℓ constitué des $M^I u$ (longueur de $I \leqslant \ell$) satisfait aux mêmes conditions que précedemment. On obtient donc finalement, pour longueur de $I \leqslant k$,

$$M^I u \in H^s \text{ , c'est-à-dire, } u \in H^s(\Sigma,k),$$

et les améliorations de régularité hors de $T^*_{\Sigma_1} \cup T^*_{\Sigma_2}$ énoncées dans le théorème 1.

§ 5. PROBLEME DE CAUCHY

On se donne donc, comme dans le théorème 2, une hypersurface Γ de l'hyperplan H défini par $x_n = 0$. On suppose que $Pu = F(x,u(x),\dots,\partial^\beta u(x))$ et que les données de Cauchy vérifient $\gamma_j u \in H^{s-1/2-j}_{(x')}(\Gamma,k)$. (On distingue par l'indice x' les espaces de fonctions de $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$).

L'idée est de considérer le problème de Cauchy pour les systèmes paradifférentiels du type (3) et donc de regarder la régularité des données de Cauchy du vecteur colonne U. Nous n'expliciterons que le premier pas de la récurrence, où il s'agit de montrer (dès que $k \geqslant 1$) que, pour $M \in \mathcal{M}_\Sigma$, on a $\gamma_j Mu \in H^{s-1/2-j}_{(x')}$

$(j = 0,\dots,m-1)$. En fait, nous allons montrer que cette propriété est vraie pour tout $M \in \varepsilon_1$ dont le symbole principal s'annule sur le conormal de Γ.

On peut supposer Γ défini par $x_1 = x_n = 0$, et on a donc

$$M = x_1 A + x_n B + \sum_2^{n-1} C_j D_j + M_o$$

où $A,B \in \varepsilon_1$ et $C_j, M_o \in \varepsilon_o$. En utilisant le théorème de division de Weierstrass (dans un cas très simple!), on peut écrire

$$D_n^j A = EP + \sum_o^{m-1} A_\ell(x,D')D_n^\ell \quad \text{avec} \quad E \in \varepsilon_{j+1-m} \quad \text{et} \quad A_\ell \in \varepsilon_{j+1-\ell}.$$

On a donc $\gamma_j\ (x_1 Au) = x_1\gamma_j EF(u,\dots,\partial^\beta u) + \sum_{\ell-o}^{m-1} x_1 A_\ell(x,D')\gamma_\ell(u)$. Si on remarque que $F(u,\dots,\partial^\beta u) \in H^{s-m+1}$, et que $x_1\gamma_\ell(u) \in H^{s-1/2-\ \ell+1}_{(x')}$ (car $\gamma_\ell u \in H^{s-1/2-\ell}_{(x')}(\Gamma,1)$) on voit que $\gamma_j(x_1 Au) \in H^{s-1/2-j}_{(x')}$. Les termes en $C_j D_j$ se traitent de même (les D_j sont tangents à Γ). Quant au terme en $x_n B$, décomposé comme ci-dessus, la multiplication par x_n "fait gagner une trace", et fournit la régularité voulue.

Il suffit donc maintenant d'avoir pour les opérateurs paradifférentiels (et les systèmes à partie principale diagonale) un théorème de propagation des singularités à partir des données de Cauchy. Nous nous bornons à l'énoncer.

<u>Théorème 13</u> : Soit $P \in Op(\Sigma^m_\sigma)$ avec $\sigma > 1$, de partie principale strictement hyperbolique par rapport à x_n. Soient s et t réels tels que $t \leqslant s + \sigma - 1$. Soit $(x_o,\xi'_o) \in T^*H$, soient ξ_n^ℓ ($\ell = 1,\dots,m$) les m racines de $p_m(x_o,\xi_o,\xi_n) = 0$, soient $G_1,\dots,G_m$ les bicaractéristiques issues respectivement des points (x_o,ξ'_o,ξ_n^ℓ).

On suppose que $\gamma^j u \in H^{t-1/2-j}$ microlocalement en (x_o,ξ'_o) et que $Pu \in H^{t-m+1}$. Alors $u \in H^t$ microlocalement sur $\bigcup_1^m G_\ell$.

<u>Remarque 14</u> : Dans [4] , J. Rauch et M. Reed démontrent un résultat optimal de régularité des solutions à partir de la régularité des données de Cauchy (sans hypothèse du type distributions conormales) pour des systèmes du type suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_i(x,t)\,\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,u_1,\dots,u_N).$$

avec $c_i \neq c_j$ pour $i \neq j$.

Leurs méthodes sont à la fois proches et différentes des nôtres. Elles consistent à étudier la régularité microlocale des $X_i^k u_j$, où les X_i sont les champs $\partial/\partial t + c_i\, \partial/\partial x$. La différence la plus importante réside dans le fait que les X_i sont fournis par l'équation, ce qui est spécifique à dimension 2, tandis que nous avons dû introduire des champs de vecteurs dépendant de l'équation et des singularités incidentes ou initiales, et donc faire des hypothèses sur la nature de ces singularités.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, 14 (1981) 09-246.

[2] J. M. Bony : Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Sem. Goulaouic-Schwartz 1979-80, exp. n° 22.

[3] Y. Meyer : Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires. Séminaire Bourbaki, 32e année (1979-80) n° 560.

[4] J. Rauch, M. Reed : Non linear microlocal analysis of semi-linear hyperbolic systems in one space dimension (prépublication).

***