SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

R. LASCAR
C. ZUILY

Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1981-1982), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1981-1982____A3_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 1 - 1 9 8 2

UNICITE ET NON UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par R. LASCAR et C. ZUILY

Exposé n° III

13 Octobre 1981

§.0. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$. En convenant de noter (x,y), $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, le point courant de Ω, nous considérons des opérateurs différentiels de la forme :

$$P(x,y;D_x,D_y) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x,y)D_x^\alpha + c(x,y)D_y$$

où les a_α, $|\alpha| \leqslant 2$ et c sont dans $C^\infty(\Omega)$.

Désignons par $p(x,y;\xi)$ le symbole principal de P et par (x_0,y_0) un point fixé de Ω. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(i) $p(x,y;\xi)$ et $c(x,y)$ sont à valeurs réelles.

(ii) $c(x_0,y_0) \neq 0$.

Ce travail est divisé en deux parties. La première est consacrée à la preuve d'un résultat d'unicité locale, au voisinage de (x_0,y_0), des solutions du problème de Cauchy pour P, relatif à certaines hypersurfaces orientées et non caractéristiques passant par (x_0,y_0) (Th. 1.3). Ces hypersurfaces devront vérifier une condition que nous appellerons (par abus) de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de P". Ce résultat d'unicité est à rapprocher de ceux de Hörmander [4] chapitre VIII ; sa preuve utilise une technique d'inégalités de Carleman avec des fonctions poids analogue à celles utilisées dans [2] . Lorsque cette condition de pseudo-convexité est violée (en un sens légèrement fort) nous montrons qu'il suffit que P soit perturbé par un terme d'ordre zéro de classe C^∞, pour qu'il perde la propriété d'unicité locale (Th. 1.4). La preuve de ce résultat est inspirée des travaux de Cohen [3], Pliš [7], Hörmander [5], Alinhac-Zuily [2]. On construit la fonction u, d'où l'on déduit la perturbation $a = -\frac{Pu}{u}$, comme superposition de fonctions u_k obtenues par une variante délicate de la méthode de l'optique géométrique.

Nous faisons ensuite remarquer sur des exemples, (Th. 1.5), qu'il n'y a pas non plus d'unicité lorsqu'il n'y a pas du tout de pseudo-convexité, résultat qui est à rapprocher de ceux de [1].

§.1. a) La notion de pseudo-convexité

Dans cette section nous allons construire un invariant, associé à l'opérateur P, qui nous permettra de définir, en termes géométriques, la notion de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de P". Nous donnerons ensuite une traduction analytique, en coordonnées locales, de cette notion. Cette construction est relativement classique et a été en particulier utilisée dans [8].

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, U un ouvert de $T^*\Omega \setminus 0$ et σ la 2-forme symplectique sur U. Soit N la sous-variété involutive :

$$N = \{(x,y,\xi,\eta) \in T^*\Omega \setminus 0 : \xi = 0\}$$

Il est bien connu que la sous-variété $N \cap U$ (notée par abus N) est munie d'un feuilletage canonique. On désigne par F une feuille locale connexe de N.

Soit Q^F la forme quadratique induite par 1/2 Hess p sur $T_F U$. Nous allons lui associer un objet défini sur T^*F.

Soit i_F le F isomorphisme canonique de T_FU sur T^*_FU déterminé par σ, soit $\mathcal{J}_F$ l'injection $F \hookrightarrow U$, et soit h_F l'application :

$$h_F = \mathcal{J}^*_F \circ i_F$$

qui définit un F morphisme surjectif de T_FU dans T^*F. Le noyau de h_F est $\mathcal{J}'_N(T_FN)$, où $\mathcal{J}_N$ est l'injection $N \hookrightarrow U$, c'est donc un sous-fibré de T_FU et on a la factorisation :

$$\begin{tikzcd} T_FU \arrow[rr, "h_F"] \arrow[dr, shift right, "\pi_F"'] & & T^*F \\ & N_F(N) \arrow[ul, shift right, "j_F"'] \arrow[ur, "i_F"'] & \end{tikzcd}$$

où $N_F(N)$ est le fibré $\left.\dfrac{T_NU}{\mathcal{J}'_N(TN)}\right|_F$, où π_F est l'application induite par la projection canonique $T_NU \to T_NU/\mathcal{J}'_N(TN)$, où j_F est un relèvement de π_F et où i_F est un F-isomorphisme.

On peut définir une forme quadratique sur T^*F en posant :

(1.1) $$Q_F = Q^F \circ j_F \circ i_F^{-1}$$

Q_F est clairement indépendante du choix du relèvement j_F.

Les objets définis ci-dessus se transforment bien sous l'effet d'un isomorphisme canonique.

Désignons par p_1^s le symbole sous principal de p et posons :

(1.2) $$q_F = Q_F + p_1^s{}_{|F}$$

De plus si π_F désigne la projection $T^*F \to F$ et si $f \in C^\infty(U)$ on convient de noter $\tilde{f} = f \circ \mathfrak{I}_F \circ \pi_F$.

Nous pouvons maintenant définir la notion de "pseudo-convexité par rapport aux bicaractéristiques de P".

Définition 1.1. : Soit $(x_o,y_o) \in \Omega$, $f \in C^\infty(\Omega)$, $df(x_o,y_o) \neq 0$. L'hypersurface orientée $\{f(x,t) = f(x_o,y_o)\}$ est dite pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de P, en (x_o,y_o), si elle est non-caractéristique et si elle vérifie la condition (Ψ) suivante :

$$(\Psi)\quad \begin{cases} \text{Si } z_o \in T^*\Omega \setminus 0 \text{ est un point de } N \text{ tel que } \pi(z_o) = (x_o,y_o) \text{ il existe une feuille} \\ \text{locale } F \text{ de } N \text{ passant par } z_o \text{ telle que :} \\ (z_o,\zeta_o) \in T^*F\ ,\ q_F(z_o,\zeta_o) = 0\ ,\ H_{q_F}(\tilde{f})(z_o,\zeta_o) = 0 \Rightarrow (H_{q_F})^2(\tilde{f})(z_o,\zeta_o) > 0 \end{cases}$$

où H_{q_F} désigne le Hamiltonien de la fonction q_F définie en (1.2.).

Cette même hypersurface sera dite fortement non pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de P si :

$$(\mathscr{X})\quad \begin{cases} \exists z_o \in T^*\Omega \setminus 0 : z_o \in N\ ;\ \pi(z_o) = (x_o,y_o)\ ,\ \exists F \text{ feuille locale de } N \text{ passant par} \\ z_o\ ,\ \exists \zeta_o \in T^*_{z_o}F : \\ q_F(z_o,\zeta_o) = 0 \quad H_{q_F}(\tilde{f})(z_o,\zeta_o) = 0 \quad \text{et} \quad (H_{q_F})^2(\tilde{f})(z_o,\zeta_o) < 0 \end{cases}$$

Remarque 1.2. :

a) On peut prouver que si la condition (Ψ) est satisfaite pour une feuille locale F, elle est vérifiée pour toute feuille locale passant par z_0.

b) Dans les coordonnées (x,t,y), $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ supposons que P soit donné par :

$$P = D_t^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x,y,t)\, D_x^\alpha + c(x,y,t)D_y$$

et que $f(x,y,t) = t$, au voisinage de l'origine. Alors la condition (Ψ) est équivalente à

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\ ,\ \frac{\partial a}{\partial t}(0;\xi) - \frac{\frac{\partial c}{\partial t}(0)}{c(0)}\, a(0;\xi) < 0$$

Quant à la condition $(\not\Psi)$ elle est équivalente à :

$$\exists\, \xi^0 \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{tq} \quad \frac{\partial a}{\partial t}(0;\xi^0) - \frac{\frac{\partial c}{\partial t}(0)}{c(0)}\, a(0;\xi^0) > 0$$

b) Enoncé des résultats et exemples

Théorème 1.3 : Soit $\{f(x,y) = f(x_0,y_0)\}$ une hypersurface orientée pseudoconvexe par rapport aux bicaractéristiques de P en (x_0,y_0). Il existe alors un voisinage de (x_0,y_0) tel que si $u \in C^\infty(\Omega)$ vérifie $Pu = 0$ et si u est nulle dans $\{(x,y) \in \Omega \;\; f(x,y) > f(x_0,y_0)\}$ alors u est nulle dans ω.

Le résultat de non unicité est le suivant :

Théorème 1.4. : Les notations étant celles du théorème 1.1., soit $S = \{f(x,y) = f(x_0,y_0)\}$ une hypersurface orientée fortement non pseudo-convexe par rapport aux bicaractéristiques de P en (x_0,y_0). Alors dans tout voisinage de ω de (x_0,y_0) il existe un point $(x_1,y_1) \in S$, un voisinage ω_1 de (x_1,y_1), des fonctions u et b de $C^\infty(\omega_1)$ telles que :

$$\begin{cases} Pu + bu = 0 \\ u = 0 \text{ dans } \{f(x,y) > f(x_0,y_0)\} \\ (x_1,y_1) \in \operatorname{supp} u \end{cases}$$

Le théorème suivant étudie, sur des exemples, le cas intermédiaire.

Théorème 1.5. : Considérons, au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+1}$, l'opérateur différentiel :

$$P = D_t^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(x,y) D_x^\alpha + c(x,y) D_y$$

où les a_α, $|\alpha| = 2$, et c sont réels et $\sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha(0)| \neq 0$. Il existe alors des fonctions b et u de classe C^∞ au voisinage de l'origine telles que :

$$\begin{cases} Pu + bu = 0 \\ u = 0 \text{ pour } t > 0 \\ (0,0,0) \in \operatorname{supp} u \end{cases}$$

Donnons, pour terminer ce paragraphe, des exemples d'applications des résultats ci-dessus.

Exemples 1.6 : Dans tous les exemples ci-dessous la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$ est notée (x,y,t) ; en outre, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $f(x,y,t) = t$ et les opérateurs différentiels sont écrits modulo un opérateur d'ordre $\leqq 1$ en (x,t).

(1.3) $$P = D_t^2 + \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + (1+\varepsilon_2 t)\, D_y \quad , \qquad \varepsilon_j = \pm 1 .$$

Cet opérateur est soit faiblement hyperbolique soit transversalement elliptique sur Car P = $\{(x,y,t;\xi,\eta,\tau) : \tau = \xi = 0\}$. Si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ le théorème 1.3 d'unicité s'applique et si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ une perturbation d'ordre zéro de P suffit à lui faire perdre la propriété d'unicité (Th. 1.4.).

(1.4) $$P = D_t^2 + \varepsilon t \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + D_y \qquad , \quad \varepsilon = \mp 1$$

Suivant le signe de ε, cet opérateur est faiblement hyperbolique d'un côté de la surface et transversalement elliptique de l'autre. Il entre dans le cadre du théorème 1.3. si $\varepsilon = -1$ et du théorème 1.4. si $\varepsilon = 1$.

(1.5) $$P = D_t^2 + (1+\alpha t) \sum_{j=1}^{n-1} D_{x_j}^2 + (1+\beta t) D_y \qquad , \alpha , \beta \in \mathbb{R} \quad , \alpha \neq \beta \quad .$$

Si $\alpha < \beta$ il y a unicité et si $\alpha > \beta$ le théorème 1.4. s'applique.

§.2. Preuve du théorème d'unicité

On prouve après avoir effectué une convexification convenable le résultat :
Il existe des constantes positives C, γ_0, T_0, r telles que pour tout $u \in C^\infty(\Omega)$ avec supp $u \subset \{0 \leq t \leq T_0 \ , \ |x| + |y| \leq r\}$ et tout $\gamma \leq \gamma_0$ on ait :

$$\gamma^3 \| t^{-\gamma - \frac{3}{2}} u \|^2 + \gamma \sum_{j=1}^{n-1} \| t^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial x_j} \| + \gamma \| t^{-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \| \leq C \| t^{-\gamma + \frac{1}{2}} Pu \| .$$

§.3. Preuve du théorème de non unicité 1.4

La preuve du théorème 1.4. de non unicité est inspirée des travaux de Cohen [3], Pliš [7], Hörmander [5], Alinhac-Zuily [2]. On construit la fonction u comme superposition de fonctions u_k, définies dans des intervalles (b_{k+1}, b_k), de la forme :

$$u_k(x,y,t) = e^{i[\sqrt{\tau_k}\xi(x,y,b_k)+\tau_k\psi(b_k)y]}\; e^{\nu_k\varphi(x,y,\frac{t-b_k}{b_k^\theta},b_k)}\; e^{-\gamma_k(x,y)} w(x,y,\frac{t-b_k}{b_k^\theta}, b_k,\nu_k)$$

qui sont obtenues par une méthode de type "optique géométrique".

Le point crucial de la démonstration est l'obtention des phases ξ, ψ, φ ayant des propriétés de convexité convenables. Une fois ces phases obtenues, les paramètres adéquatement fixés, les équations de transport déterminant w correctement résolues, le reste de la preuve est classique. c.f. par exemple [2] .

On montre que l'on peut se ramener au cas où P est l'opérateur

$$P = D_t^2 + a(x,y,t,D_x) + c\,D_y + \sum_{j=1}^{n-1} d_j\, D_{x_j} + \alpha D_t + \beta$$

dans un voisinage V de l'origine, où $a(x,y,t,\xi)$ est une forme quadratique réelle, où c est réelle et où :

(i) $c(0) \neq 0$

(ii) $\exists\, \xi_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\exists\, \bar{a}(x,y,t,\xi)$ telle que $a(x,y,t,\xi) = t^\ell \bar{a}(x,y,t,\xi)$, $\ell = 0$, ou 1, et :

$$\bar{a}(0,\xi_0) \neq 0 \quad , \quad \text{et} \quad \frac{\partial a}{\partial t}(0,\xi_0) - \frac{\partial c/\partial t}{c}(0)a(0,\xi_0) < 0.$$

La construction des fonctions u et b telles que $Pu + bu = 0$ nécessite plusieurs étapes. On commence par effectuer le changement de variables $t = \delta + s/\lambda$ où $\delta > 0$ et où $\lambda = \delta^{-\theta}$ $\theta > 1$, qui transforme l'opérateur P en un opérateur $\tilde{P}$.

On cherche des solutions formelles de $\tilde{P}u = 0$ sous la forme :

$$u(x,y,s,\delta) = e^{i(\tau^{1/2}\,\xi(x,y,\delta) + \tau\psi(\delta,y)}\, e^{\nu\varphi(x,y,s,\delta)}\, e^{-\gamma(x,y,\delta)} w(x,y,s,\delta,\nu)$$

où τ,ν sont des paramètres et où ξ,φ,γ sont des fonctions que l'on déterminera. L'étude de

$$I = e^{i(\tau^{1/2}\xi + \tau\psi y) + \nu\varphi - \gamma}\ \tilde{P}(e^{i\tau^{1/2}\xi + \tau\psi y + \nu\varphi - \gamma}w) ,$$

fait apparaître, si on fait le choix des paramètres $\tau = \lambda^2\nu^2$, une équation de phase et une équation de transport.

L'équation de phase est explicitée ci-dessous :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 = a(x,y,\delta + \frac{s}{\lambda}, \nabla\xi) + \psi(\delta)\ \ c(x,y,\delta + \frac{s}{\lambda}) \tag{3.1}$$

On montre qu'il existe un voisinage ω de 0 dans $\mathbb{R}^n$, $\delta_0 > 0$, $s_0 > 0$ des fonctions réelles $\xi(x,y,\delta) \in C^\infty(\omega \times]0,\delta_0[)$, $\varphi(x,y,s,\delta) \in C^\infty(\omega \times]-s_0,s_0[\times]0,\delta_0[)$ φ ayant toutes ses dérivées en (x,y,s) continues pour $\delta \geqslant 0$, $\psi(\delta)$ vérifiant (3.1).

Ces fonctions de phases ayant de plus les propriétés :

(α) $|\xi(x,y,\delta)| \leqslant c_1\ \delta^{-M_1}$, $|\psi(\delta)| \leqslant c_2\ \delta^{-M_2}$ avec $M_1, M_2 \geqslant 0$,

(β) $\varphi(x,y,s,\delta) = s - \beta(x,y,s,\delta)s^2$ avec

$$\beta \in C^0(\omega \times]-s_0,s_0[\times [0,\delta_0[) \quad \text{et} \quad \beta(0) > 0 .$$

La condition de convexité sur φ exprimée par la propriété (β) est essentielle. On indique maintenant comment on choisit les paramètres :

δ,ν,λ,τ dépendent d'un entier k destiné à tendre vers l'infini.

Soit $\varepsilon > 0$ petit

$$\delta = b_k = k^{-\rho} \text{ ,où } \theta = 1 + \varepsilon \text{ et } \rho = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \ , \quad \lambda = \delta^{-\theta} = k^{\rho\theta} ,$$

$$\nu = k^\sigma \quad , \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon ,$$

et enfin $\tau = k^{2\rho\theta + 2\sigma}$.

Le reste de la preuve est classique et nous renvoyons pour plus de détails à notre article.

REFERENCES

[1] S. Alinhac, M. S. Baouendi : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé 22.

[2] S. Alinhac, C. Zuily : A paraître dans les Comm. in P. D. E. 1981.

[3] P. Cohen : O.N.R. Techn. Report 93 Stanford 1960.

[4] L. Hörmander : Springer Verlag 1963.

[5] L. Hörmander : Lecture Notes in Math. Springer Verlag n°459 (1975).

[6] R. Lascar : Lecture Notes in Math. Springer Verlag n° 856 (1981).

[7] A. Plis : Proc. Int. Congr. Math. Stockholm 1962.

[8] C. Zuily : Comm. in P.D.E. Mars 1981.

*
* *
*