Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

R. Temam

Fonction convexe d'une mesure et applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n^{o} 10, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A10_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1982-1983

FONCTION CONVEXE D'UNE MESURE ET APPLICATIONS

par R. TEMAM

Exposé n° X

18 Janvier 1983

INTRODUCTION

Soit μ une mesure bornée définie sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans un espace euclidien de dimension finie X. Etant donnée également une fonction convexe f de X dans $\mathbb{R}$ qui vérifie certaines conditions, nous nous proposons de définir une mesure bornée sur Ω, notée $f(\mu)$. Lorsque $f(\xi) = |\xi|$ est la norme de ξ dans X, ou si X = R et $f(\xi) = \xi^+$ ou ξ^-, nous retrouvons les mesures usuelles $|\mu|$, μ^+, μ^-. De même lorsque $\mu = h dx$ est une fonction, $f(\mu)$ n'est rien d'autre que $f \circ h \, dx$ (dx = la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$). Au § 1, après avoir donné les hypothèses sur f (§ 1.1) et la définition de $f(\mu)$ (§ 1.2), nous donnons aux § 1.3 et 1.4 différentes propriétés de $f(\mu)$. Les applications sont décrites au § 2 : problème d'évolution associé à l'équation des surfaces minimales d'une part (§.2.1) et, d'autre part, exemple de problèmes variationnels dont la solution est singulière.

1. DEFINITION ET PROPRIETES DE $f(\mu)$

1.1 Hypothèses sur f :

Soit X un espace euclidien de dimension finie dont on note $\xi.\eta$ et $|\xi|$ le produit scalaire et la norme. On se donne une fonction convexe f de X dans $\mathbb{R}$ dont la croissance à l'infini est au plus linéaire ; c'est-à-dire qu'il existe k_1, $0 < k_1 < \infty$, tel que

$$\text{(H1)} \qquad f(\xi) \leqslant k_1(1 + |\xi|), \quad \forall \xi \in X .$$

Il est connu que f est alors continue de X dans $\mathbb{R}$ [(1)]. On considère alors la fonction conjuguée f^* de f, définie sur X à valeurs dans $R \cup \{+\infty\}$,

$$f^*(\eta) = \sup_{\xi \in X} \{\xi.\eta - f(\xi)\}, \quad \forall \eta \in X .$$

Cette fonction est convexe s.c.i. et finie sur son domaine

$$K = \text{dom } f^* = \{\eta \in X , f^*(\eta) < +\infty\}.$$

[(1)] Pour tout ce qui concerne les propriétés des fonctions convexes, on pourra par exemple se reporter à I. Ekeland-R. Temam [1].

En raison de (H1), K est inclus dans la boule de X de centre O de rayon k_1 et f^* est borné inférieurement sur K ,

$$(1.1) \qquad f^*(\eta) \geqslant -k_1 \quad , \qquad \forall \eta \in K .$$

Nous ferons l'hypothèse que f^* est borné supérieurement sur K

$$(H2) \qquad f^*(\eta) \leqslant k_2 \quad , \qquad \forall \eta \in X ,$$

ce qui entraîne que K est fermé ; ainsi K est convexe compact non vide.

Il est parfois commode de supposer que

$$(H3) \qquad f(O) = O \quad , \quad f \geqslant O,$$

ce qui entraîne facilement les mêmes propriétés pour f^*. Si f vérifie (H1) et (H2) mais pas (H3) alors on peut trouver une fonction affine ℓ de X dans $\mathbb{R}$, telle que

$$(1.2) \qquad f = g + \ell$$

où g est une fonction convexe de X dans $\mathbb{R}$ qui vérifie (H1) (H2) (H3). Par exemple on peut prendre $\ell(\xi) = a.\xi + f(0)$, où a est un sous gradient de f en O (cf. [1]).

Il est aussi utile d'associer à f la fonction f_∞ , définie de X dans $\mathbb{R}$ par

$$(1.3) \qquad f_\infty(\xi) = \sup_{\eta \in K} \xi.\eta .$$

C'est la fonction d'appui du convexe K ; elle est positivement homogène et sa conjuguée f_∞^* est la fonction indicatrice de K. On sait que

$$(1.4) \qquad f_\infty(\xi) = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t\xi)}{t} \quad , \qquad \forall \xi \in X ,$$

et on montre que l'hypothèse (H2) revient à supposer que $(f - f_\infty)(\xi)$ reste borné lorsque $|\xi| \to +\infty$.

1.2 Définition de $f(\mu)$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Nous notons $\mathcal{C}_o(\Omega;X)$ (resp. $\mathcal{C}_o^\infty(\Omega;X)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. $\mathcal{C}^\infty$) de Ω dans X à support compact dans Ω Nous notons $M_1(\Omega;X)$ l'ensemble des mesures bornées sur Ω à valeurs dans X. Lorsque $X = \mathbb{R}$, nous écrivons plus simplement $\mathcal{C}_o(\Omega)$, $\mathcal{C}_o^\infty(\Omega)$, $M_1(\Omega)$.

Si f est une fonction convexe de X dans $\mathbb{R}$ qui vérifie (H1)(H2) et si $\mu \in M_1(\Omega;X)$, nous nous proposons de définir la mesure $f(\mu)$[1] . Pour tout φ de $\mathcal{C}_o(\Omega)$, $\varphi > 0$, nous posons

$$(1.5) \qquad < f(\mu), \varphi > = \sup_v \{\int_\Omega v\varphi\mu - \int_\Omega f^*(v)\varphi\, dx\} \quad ,$$

le supremum étant pris pour les v de $\mathcal{D}_f(\mathcal{C}_o) = \{v \in \mathcal{C}_o(\Omega;X),\ f^* \circ v \in L^1(\Omega)\}$,

ce qui n'est rien d'autre que l'ensemble des v de $\mathcal{C}_o(\Omega;X)$ à valeurs dans K ; on montre que le supremum dans (2.1) est inchangé si l'on remplace $\mathcal{D}_f(\mathcal{C}_o)$ par $\mathcal{D}_f(\mathcal{C}_o^\infty)$ ou $\mathcal{D}_f(L^1_\mu)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_f(\mathcal{C}_o^\infty) &= \{v \in \mathcal{C}_o^\infty(\Omega;X),\ f^* \circ v \in L^1(\Omega)\} \\
&= \{v \in \mathcal{C}_o^\infty(\Omega;X),\ v(\Omega) \subset K\} \\
\mathcal{D}_f(L^1_\mu) &= \{v \in L^1(\Omega,\mu;X) ,\ f^* \circ v \in L^1(\Omega)\},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_f(\mathcal{C}_o^\infty) \subset \mathcal{D}_f(\mathcal{C}_o) \subset \mathcal{D}_f(L^1_\mu).$$

Lorsque $\varphi \in \mathcal{C}_o(\Omega)$ est de signe quelconque, nous écrivons $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, $\varphi^+ = \max(\varphi,0)$, $\varphi^- = \max(-\varphi, 0)$ et nous posons

$$(1.6) \qquad <f(\mu),\varphi> = <f(\mu), \varphi^+> - <f(\mu), \varphi^->.$$

On a alors le

Théorème 1.1 : Sous les hypothèses précédentes, l'application $\varphi \to < f(\mu), \varphi >$ définit une mesure de Radon bornée sur Ω , qui est absolument continue par rapport à $|\mu|$. En outre $f(\mu) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

---

(1) On notera aussi $f \circ \mu$ cette mesure par analogie avec les deux notations habituellement utilisées pour la composition des fonctions, $f \circ h$ et $f(h)$. Dans le cas très particulier où $n = 1$, $X = \mathbb{R}$ et f est à valeurs dans Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}$) , on notera de préférence $f \circ \mu$ pour éviter toute confusion avec la mesure image $f(\mu)$.

La démonstration de ce résultat est donnée dans F. Demengel et R. Temam [2] ; pour la preuve, on se ramène d'abord au cas où f vérifie (H3).

Remarque 1.1 : i) Les fonctions $\xi \to |\xi|$, et si $X = \mathbb{R}$, $\xi \to \xi^+$, $\xi \to \xi^-$, vérifient les conditions (H1) (H2) (H3). Dans ces cas, on vérifie aisément que $f(\mu)$ coïncide respectivement avec les mesures habituelles $|\mu|$, μ^+, μ^-.

ii) La définition de $f(\mu)$ fait jouer un rôle particulier à la mesure de Lebesgue dx ; si f est une fonction affine, $f(\xi) = a.\xi + b$, alors $f(\mu) = a.\mu + b\,dx$.

1.3 Décomposition de Lebesgue de $f(\mu)$ et conséquences

Nous nous proposons d'expliciter la décomposition de Lebesgue de $f(\mu)$, connaissant celle de μ.

Nous commençons par un lemme :

Lemme 1.1 : *Si f vérifie les hypothèses (H1) (H2) et si $\mu \in M_1(\Omega;X)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, $\mu = h dx$ avec $h \in L^1(\Omega;X)$, alors $f(\mu) = f(hdx) = f \circ h\,dx$.*

Dans le cas général, lorsque $\mu \in M_1(\Omega;X)$ et

$$\mu = hdx + \mu^S, \tag{1.7}$$

où $h \in L^1(\Omega;X)$ et $\mu^S \in M_1(\Omega;X)$ est singulière nous avons le résultat suivant qui est prouvé en [2] :

Théorème 1.2 : *Sous les hypothèses précédentes,*

$$f(\mu) = f \circ h\,dx + f_\infty(\mu^S). \tag{1.8}$$

Ainsi la partie singulière de $f(\mu)$ est portée par le même ensemble que la partie singulière de μ.

Exemple : Si $X = \mathbb{R}^n$ et $f(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$, les hypothèses (H1) (H2) sont vérifiées $f_\infty(\xi) = |\xi|$, et la mesure << $f(\mu) = \sqrt{1+|\mu|^2}$ >> s'écrit $f(\mu) = \sqrt{1+|h|^2}dx + |\mu^S|$.

Lorsque u est une fonction régulière de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$, $\int_\Omega \sqrt{1+|\text{grad } u|^2}\,dx$ représente l'aire du graphe de u. Supposons u régulière par morceaux : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Sigma$, où Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts disjoints et Σ leur frontière commune assez régulière, la restriction de u à Ω_i étant régulière, alors grad u est une mesure bornée et l'intégrale $\int_\Omega \sqrt{1+|\text{grad } u|^2}$ qui a un sens d'après ce qui précède est la somme des aires des hypersurfaces $\{x \in \Omega_1 , u(x)\} \cup \{x \in \Omega_2 , u(X)\}$ et de la portion du cylindre $\Sigma \times \mathbb{R}$ qui les relie. □

Caractère local de $f(\mu)$.

Supposons pour simplifier que $f(0) = 0$. Alors si h est une fonction qui s'annule sur une partie $\mathcal{O} \subset \Omega$, il en est bien sûr de même de $f \circ h$. Lorsque μ est une mesure concentrée sur un borélien $\mathcal{O}$ de Ω , on peut se demander s'il en est de même de $f(\mu)$. Nous avons le résultat suivant qui montre le caractère "local" de l'application $\mu \to f(\mu)$.

Théorème 1.3 : Soit f une fonction convexe de X dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses (H1) (H2) et $f(0) = 0$. Alors si $\mu \in M_1(\Omega;X)$, si $\mathcal{O}$ est un borélien $\subset\Omega$ et $\chi_{\mathcal{O}}$ sa fonction caractéristique,

$$f(\chi_{\mathcal{O}}\mu) = \chi_{\mathcal{O}} f(\mu). \tag{1.9}$$

En particulier si μ et $\nu \in M_1(\Omega;X)$ et sont égales sur un borélien $\mathcal{O} \subset \Omega$, alors il en est de même de $f(\mu)$ et $f(\nu)$.

Pour la démonstration on se ramène au cas où f vérifie (H3) ; on démontre que $\mathcal{O} \longrightarrow f(\chi_{\mathcal{O}}\,\mu)$ est une fonction additive d'ensembles et on prouve (1.9) en utilisant (1.8) et après avoir prouvé la propriété analogue pour f_∞ .

Remarque 1.2 : Fonctionnelles convexes

Il est possible d'associer à f des fonctionnelles convexes de $M_1(\Omega;X) \mapsto \mathbb{R}$; par exemple, $F(\mu) = \int_\Omega f(\mu)$, ou, si $\mathcal{O} \subset \Omega$ est un ensemble borélien, et $f(0) = 0$:

$$F_{\mathcal{O}}(\mu) = \int_{\Omega} f(\chi_{\mathcal{O}}\,\mu) = (\text{par } (3.3)) = \int_{\mathcal{O}} f(\mu).$$

On retrouve ainsi des fonctionnelles qui ont été étudiées par ailleurs ; cf. [3] et la bibliographie de cet article.

1.4 Approximation

Nous supposons que f vérifie (H1) (H2) et, pour simplifier, (H3). Si une famille de mesures μ_j converge vers μ, dans $M_1(\Omega;X)$ vaguement, on ne peut espérer en général que $f(\mu_j)$ converge vers $f(\mu)$. On peut par contre montrer des résultats de convergence pour des topologies plus fortes. Par exemple si μ_j converge vers μ vaguement et $\int_\Omega f(\mu_j)$ converge vers $\int_\Omega f(\mu)$, alors $f(\mu_j)$ converge vaguement vers $f(\mu)$.

Pour l'approximation de $f(\mu)$ on peut montrer aussi ceci : à toute mesure μ de $M_1(\Omega; X)$ il est possible par troncature et régularisation, d'associer une suite de fonctions $u_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega;X)$ telle que, lorsque $j \to \infty$,

$$(1.10)\qquad \begin{cases} u_j\,dx \to \mu & \text{vaguement ,} \\ f(u_j dx) = f \circ u_j dx \to f(\mu) & \text{, vaguement,} \\ \int_\Omega f(u_j)dx \longrightarrow \int_\Omega f(\mu), & \end{cases}$$

et ceci pour toute fonction convexe f qui vérifie (H1) (H2) (H3). Cela est établi en [2] où l'on trouvera aussi des résultats d'approximation dans des espaces fonctionnels plus complexes.

Remarque 1.3 :

i) Additivité par rapport à f. Le résultat d'approximation qui précède nous permet de prouver simplement la propriété d'additivité de $f(\mu)$ par rapport à f : si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes de Ω dans X qui vérifient (H1) et (H2), alors il en est de même de $f_1 + f_2$ et on a

$$(1.11)\qquad (f_1 + f_2)(\mu) = f_1(\mu) + f_2(\mu), \qquad \forall\, \mu \in M_1(\Omega;X).$$

ii) Nous pouvons définir $f(\mu)$ pour toute fonction f de X dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme $f_1 - f_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes de X dans $\mathbb{R}$ qui vérifient (H1) (H2), en posant $f(\mu) = f_1(\mu) - f_2(\mu)$. Grâce à (1.11) cette définition de $f(\mu)$ est indépendante de la décomposition de f en différence de deux telles fonctions.

En utilisant (1.8) nous pouvons encore définir $f(\mu)$ lorsque f_∞ est convexe sans que f ne le soit nécessairement (f_∞ donné par (1.4)) ; il est possible aussi de définir $f(\mu)$ lorsque μ est à valeurs dans un cône convexe $\mathcal{A}$ de X, f étant seulement définie de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$. Ces différentes extensions feront l'objet d'un travail ultérieur. □

2. APPLICATIONS

Nous décrivons succintement deux applications du concept de fonction convexe d'une mesure ; la première concerne le problème d'évolution associé à l'équation des surfaces minimales tandis que la seconde application provient de la mécanique (plasticité) et est extraite d'un travail assez large sur les problèmes variationnels de la plasticité (cf. R. Temam [4]). Cette seconde application a été la motivation initiale du travail décrit ici.

2.1 Surfaces minimales d'évolution

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ et soit Γ sa frontière. Nous considérons le problème aux limites suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u = h \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma \times (0,T) \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega \tag{2.3}$$

où h, φ, u_0 sont des fonctions données, $u : \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inconnue et $\mathcal{A}$ est l'opérateur des surfaces minimales

$$\mathcal{A}v = -\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} v}{\sqrt{1 + |\operatorname{grad} v|^2}}$$

Ce problème aux limites a été étudié par A. Lichnewsky et R. Temam [5] , R. Temam [6] pour l'existence, l'unicité, la régularité des solutions et leur comportement lorsque $t \to \infty$; cf. aussi C. Gerhardt [7] pour des résultats supplémentaires de régularité et Brakke [8] pour l'aspect paramétrique du problème. Le problème (2.1)-(2.3) ne possède pas en général de solution mais on démontre en [5] [6] <u>l'existence</u>

et l'unicité d'une solution faible qui se trouve être la solution classique lorsque celle-ci existe.

Dans le cas particulier où h = O et $\varphi(x,t) = \varphi(x)$ est indépendant de t, la solution faible de (2.1) - (2.3) est obtenue très simplement à l'aide de la théorie des semi-groupes non linéaires (cf. [6]) : supposons pour fixer les idées que $\varphi \in L^1(\Gamma)$ et $u_o \in L^2(\Omega)$; nous considérons alors la fonction F de $L^2(\Omega) = H$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$F(v) = \begin{cases} \int_\Omega \sqrt{1 + |\text{grad } v|^2} + \int_\Gamma |v - \varphi| d\Gamma & \text{si } v \in BV(\Omega) \\ +\infty & \text{si } v \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega). \end{cases}$$

où l'on a noté $\sqrt{1 + |\text{grad } v|^2}$ la mesure f(grad v) lorsque $f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$ (cf.§ 1) et $\int_\Omega \sqrt{1 + |\text{grad } v|^2}$ est l'intégrale sur Ω de cette mesure[(1)]. On démontre que F est convexe s.c.i. sur H et que si u est solution du problème (2.1)-(2.3) alors

$$(2.4) \qquad -\frac{du(t)}{dt} \in \partial F(u(t)) \quad , \text{ p.p. } t \in [O,T] .$$

$$(2.5) \qquad u(O) = u_o$$

où $\partial F(v)$ est le sous-différentiel en v de la fonction F ci-dessus. D'autre part le problème faible (2.4) (2.5) possède une solution unique u telle que

$$(2.6) \qquad u \in L^2(O,T;D(\partial F)) \quad , \quad u' = \frac{du}{dt} \in L^2(O,T;H) ,$$

où $D(\partial F) = \{v \in H, \ \partial F(v) \neq \emptyset\}$. Ainsi $D(\partial F) \subset BV(\Omega)$ et $u(t) \in BV(\Omega)$ p.p.

L'interprétation du problème faible (2.4) (2.5) qui est ainsi résolu (existence et unicité de solution) nécessité une caractérisation des ensembles $\partial F(v)$, $v \in H$. Cela est fait dans [2] en utilisant les résultats décrits dans la section 1. On arrive finalement en [2] au résultat suivant

Théorème 2.1 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière Γ est une variété de dimension n - 1 de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons donnés $\varphi \in L^1(\Gamma)$ et $u_o \in D(\partial F)$.

Alors il existe une fonction unique u qui vérifie (2.6) (2.4) (2.5).

---

(1) On a utilisé en [6] une définition plus compliquée de cette fonctionnelle puisque la mesure $\sqrt{1 + |\text{grad } v|^2}$ n'était pas encore définie.

Soit grad $u(t) = k(.,t)dx + \mu^s(t)$ la décomposition de Lebesgue de grad $u(t)$.

Alors pour presque tout t ,

(2.7) $$- \operatorname{div} \frac{k}{\sqrt{1+|k|^2}} + \frac{du}{dt} = 0 \qquad dx - \text{p.p.} \quad \text{dans} \quad \Omega$$

(2.8) $$\frac{k}{\sqrt{1+|k|^2}} \cdot \mu^s = |\mu^s| \qquad (1)$$

(2.9) $$\frac{k}{\sqrt{1+|k|^2}} \cdot \nu \in \operatorname{Sgn}(\varphi - u) \quad d\Gamma\text{- p.p. sur } \Gamma \ .$$

En outre ces conditions, jointes à (2.6) sont équivalentes à (2.4).

On renvoie à [2] pour la démonstration et des compléments.

2.2 Problèmes à solution singulière

Nous donnons une deuxième application du concept de fonctions de mesure. Elle concerne des problèmes variationnels provenant de la mécanique (plasticité) et dont les solutions, qui peuvent présenter des singularités sont cherchées dans un espace de fonctions à dérivées mesures. Ce qui suit est extrait d'un ensemble de résultats que l'on trouvera dans [4] . C'est en fait ce travail qui a été la motivation initiale de l'étude présentée du § 1.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont la frontière Γ est de classe $\mathcal{C}^1$. Nous considérons deux ouverts Γ_o et Γ_1 de Γ tels que $\Gamma_o \cap \Gamma_1 = \emptyset$, $\overline{\Gamma}_o \cup \overline{\Gamma}_1 = \Gamma$. Soit E l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^n$ et E^D le sous-espace de E des tenseurs à trace nulle. Si u est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^n$ on appelle $\varepsilon(u)$ la fonction (ou distribution) sur Ω à valeurs dans E, de composantes

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

---

(1) On définit en [2] une mesure $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \mu^s$ qui est telle que $\left|\frac{k}{\sqrt{1+|k|^2}} \cdot \mu^s\right| \leq |\mu^s|$ si bien que (2.8) (comme (2.9)) est non trivial.

et $\varepsilon^D(u)$ le déviateur de $\varepsilon(u)$ d'éléments

$$\varepsilon^D_{ij}(u) = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{n}(\operatorname{div} u)\,\delta_{ij}$$

Les espaces de travail naturels en plasticité sont les espaces

$$BD(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega)^n, \quad \varepsilon(u) \in M_1(\Omega;E)\}$$

$$U(\Omega) = \{u \in BD(\Omega), \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}.$$

Supposons donnés $f \in L\ (\Omega)^n$, $g \in L^\infty(\Gamma_1)^n$ et u_o qui est la trace sur Γ_o d'une fonction de $H^1(\Omega)$ nulle sur Γ_1. Le problème en déplacement de la plasticité est le problème $\mathcal{P}$ suivant

$$\text{(2.10)} \qquad \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega)^n \\ u = u_o \text{ sur } \Gamma_o}} \left\{ \frac{K}{2} \int_\Omega (\operatorname{div} u)^2\, dx + \int_\Omega \varphi(\varepsilon^D(u))\,dx - L(u) \right\}$$

où $K > 0$ est donné ,

$$\text{(2.11)} \qquad L(u) = \int_\Omega fu\, dx + \int_{\Gamma_1} g\, u\, d\Gamma ,$$

et φ est la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}|\xi|^2 & \text{si } |\xi| \leqslant 1 \\ |\xi| - \frac{1}{2} & \text{si } |\xi| \geqslant 1 . \end{cases}$$

Le dual de ce problème (cf. [4]) est le problème en contraintes $\mathcal{P}^*$,

$$\text{(2.12)} \qquad \sup_\sigma \left\{- \frac{1}{2} \mathcal{A}(\sigma,\sigma) + \int_{\Gamma_o} (\sigma.\nu).u_o\, d\Gamma\right\} ,$$

où $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ est la normale unitaire extérieure sur Γ ,

$$\text{(2.13)} \qquad \mathcal{A}(\sigma,\sigma) = \frac{1}{2nK} \int_\Omega (\operatorname{tr} \sigma)^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\sigma^D|^2\, dx ,$$

et la minimisation en (2.12) est prise sur $\mathcal{S}_{ad} \cap \mathcal{K}_{ad}$

$$(2.14)\qquad \mathcal{S}_{ad} = \{\sigma \in L^2(\Omega;E),\ \operatorname{div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans}\ \Omega$$
$$\sigma.\nu = g \quad \text{sur}\ \Gamma_1\}\ .$$

$$(2.15)\qquad \mathcal{K}_{ad} = \{\sigma \in L^2(\Omega;E),\quad |\sigma^D(x)| \leqslant 1 \ \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

Il a été prouvé [4] que l'infimum de (1.10) est égal au supremum de (2.12) et ce nombre qui appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est fini (i.e. $> -\infty$) si et seulement s'il existe des σ admissibles pour $\mathcal{P}^*$, c'est-à-dire $\mathcal{S}_{ad} \cap \mathcal{K}_{ad} \neq \emptyset$. Dans ce cas $\mathcal{P}^*$ possède une solution unique σ. Le problème de l'existence de solution pour le problème en déplacement est, lui, très difficile : (2.10), ne possède pas en général de solution et il faut rechercher des solutions généralisées.

Une première extension envisageable de $\mathcal{P}$, consiste à remplacer pour (2.10) la minimisation dans $H^1(\Omega)^n$ par la minimisation dans $U(\Omega)$, l'intégrale $\int_\Omega \varphi(\varepsilon^D(u))dx$, étant remplacée par l'intégrale sur Ω de la mesure $\varphi(\varepsilon^D(u))$ que l'on définit avec les résultats du § 1, d'où $\int_\Omega \varphi(\varepsilon^D(u))$.

Cette généralisation n'est toutefois pas suffisante et, pour des raisons expliquées en [4], il faut considérer le problème $\mathcal{Q}$ suivant :

$$(2.16)\qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in U(\Omega) \\ u.\nu = u_o.\nu \\ \text{sur } \Gamma_o}} \left\{\frac{K}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)^2 dx + \int_\Omega \varphi(\varepsilon^D(u)) + \int_{\Gamma_o} |\mathcal{T}^D(u_o - u)|d\Gamma - L(u)\right\}$$

où $\mathcal{T}(v)$ est le tenseur défini sur Γ d'éléments

$$\mathcal{T}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_i\ \nu_j + v_j \nu_i)$$

et $\mathcal{T}^D(v)$ est son déviateur.

Il a été prouvé (cf. [4]) que les infima de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ sont les mêmes et que si une certaine condition dite hypothèse de charge sûre est satisfaite (1) alors $\mathcal{Q}$ possède une solution au moins.

Dans ce cas, si σ est la solution de $\mathcal{P}^*$ et u est une solution de $\mathcal{Q}$, on écrit les décompositions de Lebesgue de $\varepsilon(u)$ et $\varepsilon^D(u)$,

---

(1) Une des formes de cette hypothèse est que $\mathcal{S}_{ad} \cap \lambda\mathcal{K}_{ad} \neq \emptyset$ pour un $\lambda > 1$ alors que inf $\mathcal{P} > -\infty$ si cela a lieu pour $\lambda = 1$.

$$(2.17)\quad \begin{cases} \varepsilon(u) = h\,dx + \mu^S \\ \varepsilon^D(u) = h^D dx + \mu^S \quad , \quad h^D = h - \dfrac{\mathrm{div}\, u}{n} I, \end{cases}$$

et l'on montre que l'on peut définir des mesures bornées notées $\sigma.\ \varepsilon(u)$, $\sigma^D.\ \varepsilon^D(u)$, $\sigma\ .\ \mu^S$, $\sigma^D.\ \mu^S$ qui coïncident avec les produits contractés usuels lorsque σ est régulier.

On démontre alors ceci (généralisation des conditions d'optimalité classiques en optimisation (cf. par exemple [1]) :

<u>Théorème 2.2</u> : <u>Sous les hypothèses précédentes si</u> $u \in U(\Omega)$ <u>est solution de</u> (2.16) <u>et si</u> $\sigma \in \mathcal{S}_{ad} \cap \mathcal{K}_{ad}$ <u>est solution de</u> (2.12) <u>alors avec les décompositions de Lebesgue</u> (2.17), <u>nous avons</u>

$$(2.18)\qquad \sigma^D(x) \in \partial\varphi(h^D(x)) \iff h^D(x) \in \partial\varphi^*(\sigma^D(x)) \quad \text{p.p.}\quad x \in \Omega \ ,$$

$$(2.19)\qquad \sigma^D.\ \mu^S = |\mu^S| \qquad (1)$$

$$(2.20)\qquad K\ \mathrm{div}\ u = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\ \sigma$$

$$(2.21)\qquad \sigma.\nu \in \mathrm{sign}\ (\mathcal{E}^D(u_o - u))\ d\Gamma - \text{p.p}\quad \text{sur}\quad \Gamma_o$$

On renvoie à [4] et [2] pour les démonstrations et des résultats complémentaires.

---

(1) On montre que $|\sigma^D.\ \mu^S| \leqslant |\mu^S|$ et 2.19) n'est donc pas trivial, il en est de même de (2.21).

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Ekeland et R. Temam : Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris, 1974.

[2] F. Demengel et R. Temam : Convex functions of a measure and applications. A paraître.

[3] R. Temam : Approximation de fonctions convexes sur un espace de mesures et applications. Canad. Math. Bull. 25, 1982, p. 392-413.

[4] R. Temam : Problèmes mathématiques en plasticité. Collection M.M.I., Dunod, Paris, 1983.

[5] A. Lichnewsky et R. Temam : Pseudo-solutions of the time dependent minimal surfaces problem. J. Diff Eq. 30, 1978, p. 340-364.

[6] R. Temam : Applications de l'analyse convexe au calcul des variations, dans "Non linear operators and the calculus of variations". Lecture Notes in Math. vol. 543, Springer Verlag, 1976.

[7] C. Gerhardt : Evolutionary surfaces of prescribed mean curvature, J. Diff. Eq., 36, 1980, p. 139-172.

[8] K. A. Brakke : The motion of a surface by its mean curvature, Mathematical notes, vol. 20, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1978.

*
* *
*