Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Lebeau

Deuxième microlocalisation à croissance

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. nº 15, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

DEUXIEME MICROLOCALISATION A CROISSANCE

par G. LEBEAU

Exposé n° XV

22 Mars 1983

I. INTRODUCTION

Soit V la sous-variété involutive de $T^*\mathbb{R}^n$

$$V = \{(x,\xi),\ \xi_1 = \dots = \xi_d = 0\} \qquad 1 \leqslant d < n$$

On sait ([5] , [11]) que le spectre singulier analytique (SS) d'une microfonction partiellement holomorphe sur V est réunion de feuilles de V, mais qu'il n'en est pas de même pour le front d'onde C^∞ (WF) ; par exemple la fonction

$$f(x',x_n) = \int_{\xi' \in \mathbb{R}^d} e^{i[x_n \xi'^2 + x'\xi'] - x'^2|\xi'|} \frac{d\xi'}{(1+|\xi'|)^n}$$

$(n = d+1,\ x' = (x_1,\dots,x_d))$ est partiellement holomorphe sur V, est C^∞ aux points $(x' \neq 0,\ x_n = 0)$, mais pas à l'origine. Dans le cadre de l'étude de la propagation pour les opérateurs à caractéristiques multiples sur V ce phénomène est bien connu : la propagation C^∞ nécessite des conditions de Levi (cf. [1] , [3] , [7], [13]) contrairement à la propagation analytique ([2]).

D'autre part, il est clair (cf. J. M. Bony [1]), qu'il existe une notion de partielle holomorphie tempérée sur V, propageant le front d'onde C^∞ et (deux) micro-localisable à $\dot{\tilde{V}}$, le fibré normal à V dans $T^*\mathbb{R}^n$ privé de sa section nulle.

On se propose ici d'indiquer comment on peut (re) définir simplement ces notions en utilisant la théorie de J. Sjöstrand (14). On définira en même temps les notions analogues pour la lagrangienne $\Lambda = T^*_N\mathbb{R}^n$ où N est la sous-variété d'équation $x_{n-q+1} = \dots = x_n = 0$ $(1 \leqslant q < n)$, et on donnera une majoration du spectre analytique de la trace sur N d'une distribution $f \in H^\nu_{comp}(\mathbb{R}^n)$ $(\nu > q/2)$ utilisant les notions précédentes (à comparer à [4] , [6]).

Dans la suite, on utilise la transformation F.B.I. usuelle :

$$(1) \qquad f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T^1 f(z,\lambda) = \int e^{-\frac{\lambda}{2}(z-x)^2} f(x)\,dx$$

associée à la transformation χ :

$$T^*\mathbb{R}^n \ni (x,\xi) \xrightarrow{\ \chi\ } z = x - i\xi \in \mathbb{C}^n$$

et on identifie V à son image par χ :

$$V = \{z \in \mathbb{C}^n \ , \ \mathrm{Im}\, z_j = 0 \quad j = 1,\dots,d\}$$

On note $\varphi(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\, z)^2$, $\varphi_V(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\, z")^2$ $(z" = (z_{d+1},\dots,z_n))$ qui est la fonction pluri-sous-harmonique canoniquement associée à V. L'espace $\mathbb{C}^n$ est alors muni de la structure symplectique $\frac{2}{i}\bar{\partial}\partial_{\varphi}$ et χ est canonique. On désigne par $H^{-\infty}_{\varphi,z_o}$ [resp. $H^{+\infty}_{\varphi,z_o}$] l'espace des fonctions holomorphes $u(z,\lambda)$, définies dans un voisinage Ω de z_o, pour $\lambda \geqslant 1$, telles qu'il existe C_ν et ν réels tels que :

$$\forall\, z \in \Omega \qquad \forall\, \lambda \geqslant 1 \quad |u(z,\lambda)| \leqslant C_\nu \lambda^\nu e^{\lambda\varphi(z)}$$

[resp. $\forall\, \nu$, $\exists\, C_\nu$ etc...] .

On définit de même, pour $z_o \in V$, les espaces $H^{+\infty}_{\varphi_V,z_o}$, $H^{-\infty}_{\varphi_V,z_o}$ de sorte qu'on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& H^{-\infty}_{\varphi_V,z_o} \arrow[dr] & \\
H^{+\infty}_{\varphi_V,z_o} \arrow[ur] \arrow[dr] & & H^{-\infty}_{\varphi,z_o} \\
& H^{+\infty}_{\varphi,z_o} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Alors pour $f \in \mathcal{E}'$, $T^1 f \in H^{-\infty}_{\varphi,z_o}$ et $(x_o, \xi^o) \notin WF(f)$ si et seulement si $T^1 f \in H^{+\infty}_{\varphi,z_o}$ $(z_o = x_o - i\,\xi^o)$.

Remarque : Dans le cas de la lagrangienne $\Lambda = T^*_N\mathbb{R}^n$, on pose plutôt avec $x' = (x_1,\dots,x_{n-q})$, $x" = (x_{n-q+1},\dots,x_n)$

$$(1') \qquad T^1 f(z,\lambda) = e^{-\frac{\lambda}{2} z"^2} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(z'-x')^2 - \frac{\lambda}{2}(iz"-x")^2} f(x)\, dx$$

La transformation χ associée est :

$$(X',X",\xi',\xi") \longrightarrow (z' = x' - i\,\xi' \ , \ z" = \ \xi" - ix")$$

de sorte que $\Lambda = \{z, \mathrm{Im}\, z = 0\}$, ce qui nous ramène au cas précédent avec $d = n$ et $\varphi_\Lambda = 0$.

II. PARTIELLE HOLOMORPHIE TEMPEREE ; MICROLOCALISATION, WF_V^2.

Définition : Soit $f \in \mathcal{E}'$. On dit que f est (V) partiellement holomorphe tempérée près de $(X_o, \xi^o) \in V$ si et seulement si $T^1 f \in H^{-\infty}_{\varphi_V, z_o}$ $(z_o = X_o - i\xi^o)$.

Cette définition (invariante par transformation canonique) est justifiée par le lemme de propagation standard suivant, conséquence du principe du maximum :

Lemme 17 : Soit $z_o \in V$, F la feuille de V passant par z_o et ω ouvert connexe de F contenant z_o. Si $u(z,\lambda) \in H^{-\infty}_{\varphi_V, z}$ pour $z \in \omega$ et $u(z,\lambda) \in H^{+\infty}_{\varphi_V, z_o}$, alors $u(z,\lambda) \in H^{+\infty}_{\varphi_V, z_o}$ pour tout $z \in \omega$ et aussi par le lemme (démontré par J. M. Bony dans [1] et également conséquence du principe du maximum).

Lemme B : Pour $z_o \in V$, $H^{+\infty}_{\varphi, z_o} \cap H^{-\infty}_{\varphi_V, z_o} = H^{+\infty}_{\varphi_V, z_o}$.

Pour microlocaliser la notion précédente, on se place au voisinage d'un point $z_o = (x'_o, z''_o)$ de V. Pour $u \in H^{-\infty}_{\varphi, z_o}$, $w = (w', w'') \in \mathbb{C}^n$, w'' près de z''_o, $\mathrm{Re}\, w'$ près de x'_o, $\mu \in]0,1[$ et ω petit voisinage de x'_o dans $\mathbb{R}^d$ on pose :

$$\tilde{u}_\omega(w,\mu,\lambda) = \int_{x'\in\omega} e^{-\frac{\lambda}{2}\rho(w'-x')^2} u(x',w'',\lambda)\,dx' \qquad \left(\rho = \frac{\mu^2}{1-\mu^2}\right)$$ alors $\tilde{u}_\omega$

vérifie une estimation :

$$|\tilde{u}_\omega(w,\mu,\lambda)| \leq C\,\lambda^\nu\, e^{\lambda\frac{\mu^2}{2}(\mathrm{Im}\, w')^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Im}\, w'')^2}$$

et au voisinage de $\omega \times \{z''_o\}$ on a par exemple la formule d'inversion :

$$u(z',z'',\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda\rho}\left[\frac{1}{2}\tilde{u}_\omega - \frac{i}{4\lambda\rho}\frac{\partial\tilde{u}_\omega}{\partial w'}\cdot\alpha_{\xi'}\right](z'-i\alpha_{\xi'}, z'', \mu, \lambda)\,d\xi' \tag{2}$$

où on a posé $\xi' = \rho\alpha_{\xi'}$ avec $|\alpha_{\xi'}| = \sqrt{2}$.

Soit $\tilde{V}$ le fibré normal à V dans $\mathbb{C}^n$; il s'identifie à la réunion des cotangents aux feuilles de V, qu'on identifie à $\mathbb{C}^n_W$ par :

$$\tilde{V} \ni (x',z";\xi') \longrightarrow (w' = x' - i\xi',\ w" = z") \in \mathbb{C}^n_w$$

et on note $\dot{\tilde{V}} = \tilde{V} \setminus$(section nulle) $= \{w \in \mathbb{C}^n\ ,\ \mathrm{Im}\ w' \neq 0\}$ et π la projection de $\dot{\tilde{V}}$ sur V .

<u>Définition de WF^2_V</u> : Soit $w_o \in \dot{\tilde{V}}$, avec $\pi(w_o)$ près de z_o. On dira que $w_o \notin WF^2_V(u)$ si et seulement si :
Il existe Ω voisinage de w_o dans $\mathbb{C}^n$, $C_o > 0$, $\lambda'_o > 0$, $\mu_o > 0$ et $B \in R$ tels que :

$$\forall\, w \in \Omega \quad \forall \mu \in\,]0,\mu_o] \qquad \forall\, \lambda \geqslant \frac{\lambda'_o}{\mu^2} \qquad |\, \tilde{u}_\omega(w,\mu,\lambda)\, | \leqslant \lambda^B\, e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\mathrm{Im}\ w')^2 + \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Im}\ w")^2 - C_o\,\lambda\,\mu^2}$$

On appelle $WF^2_V(u)$ le deuxième micro support tempéré de u le long de V ; c'est un fermé de $\dot{\tilde{V}}$ et en utilisant (2) et les formules d'inversion associées à des spheres $|\alpha_{\xi'}| = R \neq \sqrt{2}$] , on montre qu'il est homogène et qu'on a :

$$\pi^{-1}(z_o) \cap WF^2_V(u) = \emptyset \Longleftrightarrow u \in H^{-\infty}_{\varphi_V, z_o}$$

On a même un résultat assez précis d'invariance de l'exposant : si u vérifie $|u(z,\lambda)| \leqslant \mathrm{Cte}\ \lambda^\nu\, e^{\lambda\varphi}$ et $\pi^{-1}(z_o) \cap WF^2_V(u) = \emptyset$, alors au voisinage de z_o :

$$|u(z,\lambda)| \leqslant \mathrm{Cte}\ \lambda^{\nu + o(|\mathrm{Im}\ z'|)}\, (\mathrm{Log}\,\lambda)^{d/2}\, e^{\lambda\varphi_V}\ ]$$

III. <u>LA CONDITION DE LEVI</u>

Soit $\mathcal{D}_V$(cf. [8] , [10]) le sous-anneau des opérateurs pseudo-différentiels (dans le complexe [14]) engendré par les opérateurs de degré O et les opérateurs de degré 1 de symbole nul sur V. $\mathcal{D}_V$ est filtré par :

$$m \geqslant 0 \quad \mathcal{D}_V[m] = \{P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} P_\alpha\, \lambda^{|\alpha|} \xi'^\alpha\ ,\ \text{degré}\ (P_\alpha) \leqslant 0\ \}$$

Rappelons que pour $P \in \mathcal{D}_V[m]$ $(m > 0)$, et $\theta = (X'_o, z''_o; \xi'^o) \in \dot{\tilde{V}}$ on dit que θ est (fortement) non micro caractéristique pour P si :

$$\sum_{|\alpha| = m} \sigma_o(P_\alpha)(\pi(\theta))(\xi'^o)^\alpha \neq 0$$

et que, si $P \in \mathcal{D}_V[m]$ est sous forme Weierstrass par rapport à ξ_1 :

$$P = \lambda^m \xi_1^m - \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ \alpha_1 \neq m}} P_\alpha \lambda^{|\alpha|} \xi'^\alpha$$

on a le théorème de Cauchy-Kowalewski pour P et $H^{-\infty}_{\varphi_V}$ par rapport aux surfaces $z_1 = \text{Cte}$ ([8] ,[12]).

Dans la suite, on pose $\lambda' = \lambda\mu^2$. Soit $\mathcal{H}_{w_o}$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $v(w,\mu,\lambda')$, holomorphes en w près de w_o, définies pour $\mu \in]0, \mu_o]$, $\lambda' \geqslant 1$ et vérifiant une estimation :

$$|v(w,\mu,\lambda')| \leqslant \lambda^B e^{\lambda \frac{\mu^2}{2}(\text{Im } w')^2 + \frac{\lambda}{2}(\text{Im } w'')^2}$$

deux telles fonctions v_1 et v_2 étant égales dans $\mathcal{H}_{w_o}$ si et seulement s'il existe $C_1 > 0$, $\mu_1 > 0$, λ'_1, B_1 et Ω voisinage de w_o tels que, pour $w \in \Omega$, $\mu \in]0, \mu_1]$, $\lambda' \geqslant \lambda'_1$ on ait :

$$|v_1 - v_2|(w,\mu,\lambda') \leqslant \lambda^{B_1} e^{\lambda \frac{\mu^2}{2}(\text{Im } w')^2 + \frac{\lambda}{2}(\text{Im } w'')^2 - C_1 \lambda'} .$$

Ainsi, $w_o \notin WF^2_v(u)$ signifie $\tilde{u}_\omega = 0$ dans $\mathcal{H}_{w_o}$. Soit à présent $\mathcal{E}^2_{w_o}$ l'anneau des opérateurs (deux) micro-différentiels correspondants, inspiré de [8] : une fonction $q(w,\eta,\mu,\lambda')$ est élément de $\mathcal{E}^2_{w_o}$ si et seulement il existe U voisinage dans $\mathbb{C}^{2n}$ de $(w_o, \eta_o = -\text{Im } w_o)$, $\mu_o > 0$, $\lambda'_o > 0$, A tels que q soit définie, holomorphe en (w, η) dans $U \times [0, \mu_o] \times [\lambda'_o, +\infty[$ et y vérifie l'estimation :

$$|q| \leqslant \lambda'^A$$

avec la convention usuelle q = 0 si et seulement s'il existe, B, C > 0 (indépendant de μ) tels que :

$$|q| \leqslant \lambda^B e^{-C\lambda'}$$

le produit étant défini par :

$$p \circ q = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha',\alpha'') \\ |\alpha| \leqslant \frac{\lambda'}{c_o}}} \frac{1}{\alpha!} (i\lambda')^{-(\alpha')} (i\lambda)^{-|\alpha''|} \frac{\partial^\alpha p}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial^\alpha q}{\partial w^\alpha}$$

(indépendant de C_o pour C_o assez grand).

On fait opérer $\mathcal{E}^2_{w_o}$ sur $\mathcal{H}_{w_o}$ en posant :

$$q(v)(w.\mu,\lambda') = (\frac{\lambda'}{2\pi})^d (\frac{\lambda}{2\pi})^{n-d} \int_\Sigma e^{i\lambda\mu^2(w'-t')\eta' + i\lambda(w''-t'')\eta''} p(w,\eta,\mu,\lambda')v(t,\mu,\lambda')dt \Lambda d$$

avec Σ un bon contour, par exemple :

$$t' = w_o + u \;, \quad \eta = - \operatorname{Im} w_o - iC\bar{u} \;. \; |u| \leqslant R_o \;, \quad C > 1 \;.$$

Un opérateur $p \in \mathcal{E}^2_{w_o}$ est "classique", de degré m, s'il admet un développement asymptotique analytique :

$$p = \lambda'^m \sum_{k=o}^{+\infty} p_k(w,\eta,\mu)\lambda'^{-k}$$

avec $|p_k(w,\eta,\mu)| \leqslant C_1 C_2^k k!$ pour $(w,\eta;\mu) \in U \times]o,\mu_o]$, C_1 et C_2 étant indépendant de μ ; p est elliptique si et seulement si $|p_o(w,\eta\,;\mu)| \geqslant \delta > o$ dans $U \times]o,\mu_o]$, et les opérateurs elliptiques sont inversibles dans $\mathcal{E}^2_{w_o}$ ([8]).

<u>Proposition</u> : Il existe un morphisme d'anneau ϕ de $\mathcal{D}_V$ dans $\mathcal{E}^2_{w_o}$ tel que :

i) $\widetilde{(Pu)}_\omega = \phi(P)\tilde{u}_\omega$ (dans $\mathcal{H}_{w_o}$)

ii) $\phi(P)$ est classique et si $P \in \mathcal{D}_V[m]$, $m > o$ $\phi(P)$ est elliptique en w_o si et seulement si w_o est (fortement) non micro caractéristique pour P.

<u>Idée de la preuve</u> : $\phi(P)$ est uniquement déterminé par le théorème de la phase stationnaire et comme dans le cas isotrope [9] le point technique consiste à effectuer les déformations de contour. Si $P = p(x,\xi,\lambda) \in \mathcal{D}_V[0]$ on trouve :

$$\phi(P)(w,\eta,\mu,\lambda') = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(\lambda\rho)^{-k}\left(\frac{\Delta_{x'}}{2}\right)^k p \quad \left| \begin{array}{l} x' = w' + (1-\mu^2)\eta' \\ \xi' = \mu^2\eta' \\ x'' = w'' \\ \xi'' = \eta'' \end{array}\right.$$

en particulier $\phi(\xi') = \mu^2\eta'$, d'où si

$$P = \sum_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha \lambda^{|\alpha|}\xi'^{\alpha} \in \mathcal{D}_V[m] ,$$

$$\phi(P) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \phi(p_\alpha)\lambda'^{|\alpha|}\eta'^{\alpha}$$

ce qui montre ii) .

<u>Remarque</u> : Les anneaux considérés par Y. Laurent [8] sont plus petits que $\mathcal{E}^2_{w_0}$: on y suppose l'analyticité en μ près de 0 dans les symboles, ce qui est naturel dans le complexe, et permet un calcul symbolique très précis.

Dans le réel, il peut être intéressant de garder $\mu > 0$: par exemple $p = \lambda\xi'^2 + a$ ne vérifie pas la condition de Levi pour $a \neq 0$ mais $\phi(p) = \lambda'\mu^2\eta'^2 + a$ est inversible dans $\mathcal{E}^2_{w_0}$ pour $a \notin \mathbb{R}_-$ (ce qui n'est pas surprenant, p étant alors H.E C^∞). Rappelons que dans [1] , J. M. Bony a démontré le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Soit $P \in \mathcal{D}_V(m)$, $m > 0$, transversalement elliptique sur V. Si $Pu \in H^{+\infty}_\varphi$ (i.e. est C^∞), WF(u) propage sur les feuilles de V.

Indiquons brièvement comment on peut retrouver ce résultat à l'aide des constructions précédentes : $\phi(P)$ est elliptique sur $\tilde{V}$, par inversion de $\phi(P)$ on en déduit des majorations de $\tilde{u}$ pour $\lambda \geqslant \frac{\lambda_0}{\mu^2}$, puis en utilisant la représentation inverse (2), que $u \in H^{-\infty}_{\varphi_V} + H^{+\infty}_\varphi$. On applique alors les deux lemmes A et B.

IV. TRACE

Soit $f \in H^{\nu}_{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\nu > \frac{q}{2}$ et N la sous-variété d'équation :

$$N = \{(X',X"), \quad X" = (x_{n-q+1},\dots,x_n) = 0\}$$

$\Lambda = T^*_N\mathbb{R}^n$ le fibré conormal à N dans $\mathbb{R}^n$:

$$\Lambda = \{(x',x",\xi',\xi") \in T^*\mathbb{R}^n \ , \ x" = 0 \ , \ \xi' = 0\} .$$

ρ la projection canonique de $T^*\mathbb{R}^n|_N$ sur T^*N

$$\rho(X',0,\xi',\xi") = (x',\xi")$$

$T^*\Lambda$ le cotangent à Λ de point courant : $(X',\xi";X'^*,\xi"^*)$.

La projection de Λ sur N induit l'injection j de $\Lambda \underset{N}{\times} T^*N$ dans $T^*\Lambda$:

$$j[(x',\xi"),(x',x'^*)] = (x',\xi";x'^*,0)$$

et on note $\check{\rho}$ la projection de $j(\Lambda \underset{N}{\times} T^*N)$ sur T^*N :

$$j(X',\xi" \ ; \ x'^*,0) = (x',x'^*)$$

Soit SS le spectre singulier analytique.

<u>Théorème</u> : $SS(f|_N) \subset \rho(SS(f) \cap T^*\mathbb{R}^n|_N) \cup \check{\rho}(WF^2_{\Lambda}(f) \cap (\xi"^* = 0, |\xi"| = 1))$

<u>Idée de la preuve</u> : On identifie $T^*\Lambda$ à $\mathbb{C}^n_y$ par :

$$T^*\Lambda \ni (X',\xi";X'^*,\xi"^*) \longrightarrow (y' = x' - ix'^* \ , \quad y" = -\xi" + i\xi"^*) \in \mathbb{C}^n$$

et on pose : $(s = \mu^{-2})$

$$S^2f(y,s,\lambda') = \frac{1}{\lambda'}\int e^{-\frac{\lambda'}{2}(y"+\frac{\eta"}{s\lambda'})^2 - \frac{\eta'^2}{2\lambda'} + iy'.\eta'}\left(\frac{-y".\eta"}{s^2}\right)\hat{f}(\eta)d\eta$$

où $\hat{f}(\eta)$ est la transformée de Fourier de f. On montre facilement que S^2f se calcule en fonction de $\widetilde{T^1f}$ (où T^1 est celui de (1')) et en particulier

$y_o = (y'_o, y''_o)$ (y''_o réel) n'est pas dans $WF^2_\Lambda(f)$ si et seulement s'il existe W voisinage de y_o, $C > 0$, $S_o > 0$, $\lambda'_o > 0$, $B > 0$ tels que

$$\forall\, y \in W \quad \forall s \geqslant s_o \quad \forall \lambda' \geqslant \lambda'_o \qquad |S^2 f(y,s,\lambda')| \leqslant s^B e^{\frac{\lambda'}{2}[(\mathrm{Im}\, y)^2 - C]} \tag{3}$$

l'intérêt de la forme explicite de S^2 étant :

<u>Lemme</u> :

$$\int_0^{+\infty} ds \int_{\mathbb{S}^{q-1}} dy''\, S^2 f(y,s,\lambda') = (2\pi)^{\frac{n+q}{2}} \lambda'^{\frac{n-q}{2}} H(\lambda') T^1(f|_N)(y',\lambda')$$

où $H(\lambda') \simeq (\frac{2\pi}{\lambda'})^{q/2}$, $T^1(f|_N)(y',\lambda') = \int e^{-\frac{\lambda'}{2}(y'-t')^2} f|_N(t')dt'$.

Soit alors $(x'_o, \xi'_o) \in \dot{T}^* N$ tel que :

a) $\forall\, \xi''$ $\quad (x'_o, 0, \xi'_o, \xi'') \notin SS(f)$

b) $\forall\, \xi''$, $|\xi''| = 1$ $\quad (x'_o, \xi'' ; \xi'_o, 0) \notin WF^2_\Lambda(f)$

il s'agit de prouver $(x'_o, \xi'_o) \notin SS(f|_N)$ ou ce qui est équivalent, que $T^1(f|_N)(y',\lambda')$ est à décroissance exponentielle en λ' près de $y'_o = x'_o - i\xi'_o$.

D'après b) on a l'estimation (3) avec W voisinage complexe de $\{(y'_o, y''),\ y'' \in \mathbb{R}^d\ ,\ |y''| = 1\}$, et on conserve les notations (3) , s_o, B, c. On découpe l'intégrale à gauche en trois morceaux :

$$I_1 = \int_0^{s_o} \qquad I_2 = \int_{s_o}^{e^{\gamma\lambda'}} \qquad I_3 = \int_{e^{\gamma\lambda'}}^{+\infty}$$

où γ est choisi tel que $0 < \gamma < \frac{C}{2(B+1)}$.

Pour majorer I_1 on utilise a), pour I_2 b) quant à I_3 , on remarque que, pour $\alpha \in\ ]0,1[$:

$$I_3 \leqslant \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{q-1}) e^{-\alpha\gamma\lambda'} \lambda'^{-\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda'}{2}(1-\frac{1}{\rho})^2} \frac{d\rho}{\rho^{2-\alpha}} \cdot \int e^{-\frac{\eta'^2}{2\lambda'} + |\mathrm{Im}\, y'|\eta'}$$

$$|\hat{f}(\eta)|(1 + |\eta''|)^\alpha d\eta .$$

et on conclut en choisissant $\alpha < \nu - q/2$.

REFERENCES

[1] J. M. BONY : Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques. Astérisque 34-35 (1976).

[2] J. M. BONY et P. SCHAPIRA : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier, Grenoble (1976).

[3] A. GRIGIS : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles. Comm. in P.D.E. 4 (11) (1979).

[4] D. IAGOLNITZER : Singular spectrum of products of distributions at u = O points. Sem. Goulaouic-Schwartz, exposé n° 1, 1978-1979.

[5] M. KASHIWARA, T. KAWAI : Deuxième microlocalisation. Proc. of Les Houches, 1979. Lect. Notes in Physics n° 126, Springer.

[6] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA : Variété caractéristique de la restriction d'un module différentiel. Prépublication. Univ. Paris Nord.

[7] R. LASCAR : Propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques de multiplicité variable dans Lec. Notes n° 856, Springer.

[8] Y. LAURENT : Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe : opérateurs 2 micro-différentiels. Thèse Orsay, 1982.

[9] G. LEBEAU : Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes (à paraître)

[10] T. MONTEIRO : Problème de Cauchy micro-différentiel. Constructibilité des solutions des systèmes microdifférentiels. Thèse Université Paris-Nord, 1982.

[11] M. SATO, M. KASHIWARA, T. KAWAI : Hyperfunctions and pseudo differential equations. Lect. Notes n° 287, Springer.

[12] P. SCHAPIRA : Livre à paraître chez Springer.

[13] J. SJÖSTRAND : Propagation of singularités for operators with multiple involutive characteristics. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26.1. (1976).

[14] J. SJÖSTRAND : Cours à Orsay (1981), Astérisque.

***