Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

Y. Meyer

Intégrales singulières, opérateurs multilinéaires et équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. nº 19, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

INTEGRALES SINGULIERES, OPERATEURS MULTILINEAIRES ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par Y. MEYER

Exposé n° XIX

3 mai 1983

L'ordre logique de cet exposé serait celui du titre. En effet de nouveaux opérateurs multilinéaires seront obtenus à partir des résultats de G. David et J. L. Journé sur la continuité L^2 des opérateurs dont les noyaux vérifient les estimations usuelles (taille et croissance).

Ces nouveaux opérateurs multilinéaires permettent de résoudre explicitement des équations aux dérivées partielles paraboliques ou elliptiques, à coefficients mesurables et bornés, dont l'étude échappe à toute autre approche.

Ces applications spectaculaires que nous allons commencer par décrire, sont dues à Eugène B. Fabes, David S. Jerison et Carlos E. Kenig. Nous remercions vivement ces auteurs de nous avoir communiqué leur travail inédit.

L'ordre que nous allons suivre est l'ordre opposé de celui du titre. Les équations aux dérivées partielles auront droit à une place honorifique tandis que l'étude des opérateurs multilinéaires et des intégrales singulières associées sera présentée comme un "lemme technique".

Avant de préciser davantage, il est possible d'expliquer pourquoi dans notre théorie apparaissent des opérateurs multilinéaires qui n'existent pas dans la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels.

Nous allons considérer un exemple. Soit $B(x)$ une fonction appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, à valeurs dans les matrices $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients réels ou complexes. Nous supposerons systématiquement $\|B(x)\|_\infty < \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n > 0$ est une petite constante dont la valeur sera précisée par la suite.

Nous désignerons par L l'opérateur $\Delta + \operatorname{div} B \nabla$ où $\Delta = \sum_1^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ et $\operatorname{div} B \nabla u = \sum_1^{n+1} \sum_1^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(b_{j,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$.

La solution du problème de Dirichlet ou de Neumann suivant : $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times]0,+\infty[$ avec valeurs au bord $u(x',0) = g(x') \in L^2(\mathbb{R}^n;\, dx')$ conduit à munir l'espace E des solutions d'une certaine structure hilbertienne qui sera précisée par la suite et à construire un opérateur linéaire $L(B) : L^2(\mathbb{R}^n) \to E$.

Cet opérateur $L(B)$ sera, en fait, une fonction holomorphe de $B(x) \in (L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))^{(n+1)^2} = X$. Une telle fonction holomorphe sur un espace de Banach a toujours un développement en série de Taylor

$$L(B) = \sum_0^\infty L_k(B) . \tag{1}$$

où les "polynômes homogènes" $L_k : X \to E$ sont les restrictions à la diagonale de X^k d'applications multilinéaires $\tilde{L}_k : X^k \to E$ vérifiant

$$(2) \qquad \|\tilde{L}_k(x_1,\ldots,x_k)\|_E \leqslant C^k \|x_1\|_X \ldots \|x_k\|_X \ .$$

Nous ne savons pas encore calculer numériquement la constante C apparaissant dans le second membre de (2). Ceci nous forcera à nous limiter à la théorie locale où $\| B \|_\infty < \varepsilon_n$, ε_n étant choisi de sorte que $C\,\varepsilon_n < 1$ ce qui permet de sommer la série (1).

Si les coefficients $b_{j,k}(x)$ appartenaient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, l'aspect multilinéaire disparaîtrait. A cause des relations de commutation entre opérateurs pseudo-différentiels classiques et multiplications par des fonctions douces, le "mot" $\tilde{L}_k(x_1,\ldots,x_k)$ pourrait se contracter en un opérateur pseudo-différentiel classique.

Dans notre cas, $\tilde{L}_k(x_1,\ldots,x_k)$ n'est pas un o.p.d., quel que soit le sens que l'on attribue à ce mot. Ces opérateurs multilinéaires nouveaux se situent "au delà des opérateurs pseudo-différentiels" mais redeviennent automatiquement des o.p.d. classiques si l'on augmente la régularité (et si l'on se restreint à la théorie locale).

Nous allons dans les trois premières sections, décrire les équations aux dérivées partielles que cette théorie (pressentie par A. P. Calderón mais développée par E. Fabes, D. Jerison et C. Kenig) permet de traiter.

La quatrième section contient la description des opérateurs multilinéaires utilisés dans les problèmes précédents. La continuité de ces opérateurs s'obtient très simplement à partir d'un théorème général de G. David et J. L. Journé. Les sections 5 et 6 sont consacrées à cette relation.

I. PROBLEME DE NEUMANN ET CONJECTURE DE KATO

Nous allons commencer par écrire des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$. La naïveté des exemples qui suivent n'est qu'apparente.

Nous désignerons systématiquement par (x,t) un élément de $\mathbb{R}^2_+$ avec $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Un opérateur linéaire continu $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est donné ; $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R};dx)$ et l'opérateur A agit sur une fonction de deux variables $u(x,t)$ en bloquant la variable t et en transformant la fonction de x ainsi définie.

Nous supposerons l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on ait

(1) $$\mathcal{R}e < Af,f > \geqslant \delta \|f\|_2^2$$

On a désigné par $<f,g> = \int_{\mathbb{R}} f\,\bar{g}\,dx$ le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathbb{R})$.

L'équation d'évolution que nous voulons traiter est

(2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(A\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{où} \quad u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$$

sera définie par ses valeurs au bord.

Le problème de Dirichlet consiste à se donner

(3) $$u(x,0) = f(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

et à chercher si

$$\sup_{t>0} \|u(x,t)\|_{L^2(dx)} \leqslant C\|f(x)\|_{L^2(dx)} .$$

Le problème de Neumann revient à se donner

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

et à chercher si

(5) $$\sup_{t>0} \left\{ \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right\|_2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_2 \right\} \leqslant C\|g\|_2 .$$

Pour traiter ces deux problèmes, on utilise un algorithme dû à T. Kato et A. McIntosh

On désigne par $L : V \to H$ l'opérateur DAD où $D = -i\,\frac{d}{dx}$, $H = L^2(\mathbb{R}; dx)$ et où V est le sous-espace de l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$ défini par la condition que $Af \in H^1(\mathbb{R})$. On montre que V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

De plus l'opérateur L est accrétif de type maximal. Cela signifie que $\mathcal{R}e <Lf,f> \geqslant \delta\|Df\|_2^2$ pour tout $f \in V$ et que $1 + L : V \to H$ est un isomorphisme. En particulier $V = (1+L)^{-1}H$ et $1+L$ est fermé.

La théorie de Kato permet de définir l'unique racine carrée accrétive de type maximal S de L.

On a, sur le domaine V de L,

$$S = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\infty} (1 + t^2L)^{-1}L \, dt \ . \tag{6}$$

Pour donner un sens à cette intégrale, on observe que $\|(1+t^2L)^{-1}\| \leqslant 1$ parce que L est accrétif de type maximal.

Si $f \in V$, alors $Lf = g$ appartient à H et l'intégrale $\int_0^1 \ldots dt$ a un sens.

Pour traiter $\int_1^{\infty}$, on utilise l'identité résolvante

$(1+t^2L)^{-1}L = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}(1+t^2L)^{-1}$ ce qui implique $\|(1+t^2L)^{-1}L\| \leqslant \frac{2}{t^2}$.

Naturellement le domaine W de S contient strictement V. On peut définir W de deux façons différentes. D'une part $W = (1+S)^{-1}H$. D'autre part, on peut poser, pour tout $\varepsilon > 0$, $L_\varepsilon = L + \varepsilon$ puis $L_\varepsilon^{-1/2} = \frac{1}{\pi} \int_o^{\infty} (L_\varepsilon + \lambda)^{-1} \lambda^{-1/2} d\lambda$. Alors $L_\varepsilon^{-1/2}$ est continu sur H et l'on définit $L_\varepsilon^{1/2} = L_\varepsilon L_\varepsilon^{-1/2}$. Le domaine de $L_\varepsilon^{1/2}$ coïncide avec l'image de $L_\varepsilon^{-1/2}$ et ne dépend pas de $\varepsilon > 0$; on le désigne par W. On a finalement $S = L_\varepsilon^{1/2} + R_\varepsilon$ où $\|R_\varepsilon\| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}$.

Revenons au problème de Dirichlet et au problème de Neumann. Le problème de Dirichlet se résout par

$$u(t) = e^{-tS} u(0) \ . \tag{7}$$

On a posé $u(t) = u(x,t)$; Les opérateurs accrétifs de type maximal sont les générateurs infinitésimaux des semi-groupes de contraction et l'on a donc $\|u(t)\| \leqslant \|u(0)\|$.
Pour traiter le problème de Neumann, nous passerons par l'intermédiaire de u(0). Ceci revient à supposer que g(x) appartienne à un sous-espace dense convenable.
Alors, avec les notations précédentes, $g = -Su(0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = iD\,u\,(0)$. L'opérateur associé au problème de Neumann est donc DS^{-1} que l'on peut d'ailleurs remplacer par ADS^{-1} parce que $A : H \to H$ est un isomorphisme.

Quitte à multiplier A par une constante numérique, on peut supposer que $\delta = 1$ dans (1) et l'on a $A^{-1} = 1 - B$ où $\|B\| < 1$. On a alors l'identité de Mc Intosh

$$ADS^{-1} = \sum_{o}^{\infty} T_k(B) \tag{8}$$

où

$$T_k(B) = \frac{2}{\pi} \int_o^{\infty} (P_tB)^k Q_t \, \frac{dt}{t} \tag{9}$$

avec

$$P_t = (1+t^2D^2)^{-1} \quad , \quad Q_t = tDP_t \ .$$

Les opérateurs multilinéaires associés sont

$$\int_0^\infty P_tB_1 \ldots P_tB_kQ_t \frac{dt}{t} \quad \text{où les } B_j \in \mathcal{L}(H,H) \text{ sont maintenant arbitraires.}$$

Cependant on construit facilement un opérateur linéaire continu $B : H \to H$ tel que $\int_0^\infty P_tBQ_t \frac{dt}{t}$ ne soit pas borné sur H.

Nous ne pouvons donc résoudre le problème de Neumann à ce niveau de généralité.

Nous reprenons alors l'étude du problème de Neumann avec l'hypothèse supplémentaire que l'opérateur accrétif $A : H \to H$ est défini par la multiplication ponctuelle par une fonction $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$. On a alors $\mathcal{R}e\, a(x) \geqslant \delta > 0$ presque-partout. Dans ces conditions il est démontré dans [3] que (5) a lieu.

Le contre-exemple du cas général et la difficulté du problème particulier viennent de ce que nous n'avons pas supposé A auto-adjoint. Le cas auto-adjoint est essentiellement de l'analyse "soft".

Un problème apparenté est l'étude de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{10}$$

lorsque $a(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ est à valeurs complexes et vérifie $\mathcal{R}e\, a(x) \geqslant \delta > 0$.

Là encore, nous chercherons à résoudre le problème de Neumann

$$\begin{cases} u(x,t) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{C} \quad \text{solution de (10) telle que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{soit donnée .} \end{cases} \tag{11}$$

Nous nous proposons d'obtenir l'estimation

$$\sup_{t>0} \left\{ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right\|_{L^2(dx)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right\|_{L^2(dx)} \right\} \leqslant C\|g\|_{L^2(dx)} \ . \tag{12}$$

Pour démontrer (12), il suffit de construire un opérateur linéaire continu $J : L^2(\mathbb{R}\,;dx) \to L^2(\mathbb{R}\,;dx)$ tel que $J(g) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)$.

Soit z(x) une primitive de la fonction bornée $\frac{1}{a(x)}$. On a alors l'identité remarquable suivante ([8])

(13) $$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z'(x)z'(y)}{z(x)-z(y)}\,\frac{\partial u}{\partial t}(y,0)\,dy \;.$$

En d'autres termes, le problème qui nous occupe est celui de la continuité L^2 du noyau de Cauchy associé à une courbe lipschitzienne ([3]).

Cette observation est un exemple illustrant la théorie générale qui suit : de nouveaux opérateurs d'intégrales singulières permettent de résoudre de nouvelles équations aux dérivées partielles.

Il convient, là encore, de remarquer que si a(x) est à valeurs réelles, (10) devient banale car le changement de variable $x \to h(x)$ où $h'(x) = \frac{1}{a(x)}$ ramène (10) à $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

II. PROBLEME DE NEUMANN ET CONJECTURE DE KATO (suite)

On étudie dans $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \,]0,+\infty[$ l'équation

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{j,k}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0$$

en supposant $a_{j,k}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que

(2) $$\mathcal{R}e \sum_1^n \sum_1^n a_{j,k}(x)\,\xi_j\,\bar{\xi}_k \geqslant \delta|\xi|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$, dx-presque partout.

Là encore on désigne par L l'opérateur accrétif de type maximal $-\sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{j,k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ et l'on réécrit (1) sous la forme

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = 0 \;.$$

On désigne par S la racine carrée accrétive de type maximal de L et le problème de Dirichlet associé à (3) est, en fait, l'étude du semi-groupe de contractions e^{-tS}, $t \geqslant 0$. Le problème de Neumann est bien plus redoutable et est toujours ouvert. Il revient à démontrer que le domaine de S est l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$. Il suffit pour cela d'établir la continuité de $S : H^1 \to L^2$. Nous allons décrire un résultat partiel obtenu dans cette direction. Une approche à la conjecture de Kato est d'appeler $A(x)$ la matrice des $((a_{j,k}(x))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ et de supposer $\delta = 1$ dans (2). On peut alors écrire le mystérieux opérateur $S = \sqrt{-\operatorname{div}(A(x)\nabla)}$ en une série d'opérateurs multilinéaires (en $B(x)$).

On a, en fait

(4) $$S = \sum_1^n S_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où

(5) $$S_j = \sum_o^\infty S_j^{(k)}(B)$$

et

(6) $$S_j^{(k)}(B) = \tilde{S}_j^{(k)}(B,\dots,B)$$

avec

(7) $$\| \tilde{S}_j^{(k)}(B_1,\dots,B_k) \| \leqslant C_n^k \, \|B_1\|_\infty \dots\dots \|B_k\|_\infty \, .$$

La norme dans le membre de gauche de (7) est la norme d'opérateur dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$

Notre ignorance de la valeur numérique de la constante C_n nous interdit de conclure en général. Cependant cette approche fonctionne lorsque $\|B\|_\infty < \varepsilon_n$ et $C_n \, \varepsilon_n < 1$.

III. LES TRAVAUX DE E. FABES, D. JERISON ET C. KENIG

Nous généralisons l'équation (1) du paragraphe précédent en remplaçant la matrice $A(x) = ((a_{j,k}(x)))_{1 \leqslant j,\, k \leqslant n}$ des coefficients par une matrice réelle, symétrique et dépendant de t, $A(x,t)$. Par ailleurs nous allons oublier le rôle privilégié de la variable t et ne traiter que l'aspect local de la théorie.

Plus précisément soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un domaine de classe C^1 et (en appelant maintenant x ce qui se notait (x,t)) soit $A(x)$ une matrice $(n+1) \times (n+1)$ réelle et symétrique, continue sur $\bar{\Omega}$ et telle que, pour une certaine constante $\delta > 0$, on ait

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n+1} \sum_{1}^{n+1} a_{j,k}(x)\, \xi_j\, \xi_k \geqslant \delta |\xi|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $x \in \bar{\Omega}$.

Nous étudions alors l'opérateur L défini par

$$(2) \qquad L(u) = -\operatorname{div}(A(x)\, \nabla u) =$$

$$- \sum_{1}^{n+1} \sum_{1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{j,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

Les solutions $u \in C(\bar{\Omega})$ de $Lu = 0$ dans Ω satisfont au principe du maximum. L'inégalité de Harnack correspondante a été obtenue par J. Moser et publiée sous le titre "On Harnack's theorem for elliptic differential operators" dans les Communications on pure and applied mathematics, Vol. XIV, 577-591 (1961).

On appelle $\lambda \geqslant 1$ un nombre réel tel que $\lambda^{-1} \leqslant \delta$ et $\lambda \geqslant \|A(x)\|_\infty$ et J. Moser démontre que, pour toute partie compacte $K \subset \Omega$, il existe une constante $c = c(K,\Omega,\lambda)$ telle que, pour toute solution $u \geqslant 0$ dans Ω de $Lu = 0$ on ait

$$(3) \qquad \sup_{x \in K} u(x) \leqslant c \inf_{x \in K} u(x)$$

Il est remarquable que l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$ ait été inventé par John et Nirenberg pour démontrer un lemme technique utilisé par J. Moser dans la preuve de (3).

Nous pouvons maintenant définir la mesure harmonique associée à L et à Ω .

Le principe du maximum entraîne, pour tout $x \in \Omega$, l'existence d'une mesure de probabilité $d\mu^x(y)$, portée par $\partial\Omega$ et telle que l'on ait

$$(4) \qquad u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\, d\mu^x(y)$$

pour toute solution $u \in C(\bar{\Omega})$ de $Lu = 0$.

L'inégalité de Harnack implique que les différentes mesures $d\mu^x(y)$ soient absolument continues l'une par rapport à l'autre.

Nous fixons dans la suite un point $x^0 \in \Omega$ et désignons par ω la mesure $d\mu^{x^0}(y)$.

On a alors le théorème de Fatou suivant : toute solution $u : \Omega \to [0,+\infty[$ de $Lu = 0$ admet ω-presque partout sur le bord $\partial\Omega$ des limites non tangentielles.

Le problème fondamental est alors de déterminer si la mesure harmonique ω est absolument continue par rapport à la mesure de surface $d\sigma$ sur $\partial\Omega$.

Ce problème sera analysé à l'aide du module de continuité $h(t)$ de la matrice $A(x)$ dans un champ de directions transverses à $\partial\Omega$, défini par un champ de vecteurs unitaires $\nu(y)$, $y \in \partial\Omega$, transverses et dirigés vers l'intérieur.

On pose alors, pour tout $t \geq 0$,

$$h(t) = \sup_{y \in \partial\Omega} \sup_{0 \leq s \leq t} |A(y+\nu s) - A(y)| \quad . \tag{5}$$

On a, dans ces conditions, les deux résultats suivants ([1] et [6]).

Théorème 1 : Désignons par Ω la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et par $\nu(y)$ la normale unitaire, intérieure en $y \in \partial\Omega$. Pour toute fonction $\overline{h}(t) : [0,1] \to [0, +\infty[$, continue et croissante et telle que

$$\int_0^1 (\overline{h}(t))^2 \frac{dt}{t} = +\infty \tag{6}$$

il existe une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, $x \to A(x)$, à valeurs dans les matrices symétriques, réelles et elliptique, telle que le module de continuité associé $h(t)$, défini par (5), vérifie $h(t) \leq \overline{h}(t)$ sur $[0,1]$ et que la mesure harmonique associée soit singulière par rapport à la mesure de surface $d\sigma$ sur $\partial\Omega$.

Rappelons que ω est singulière par rapport à $d\sigma$ s'il existe un borélien $E \subset \partial\Omega$, de mesure nulle pour $d\sigma$ et dont le complémentaire est de mesure nulle pour ω .

Théorème 2 : Si $A(x)$ est une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, à valeurs dans les matrices réelles, symétriques et elliptiques et si ν est un champ de vecteurs transverse à $\partial\Omega$ alors la condition

$$\int_0^1 (\overline{h}(t))^2 \frac{dt}{t} < +\infty \tag{7}$$

sur le module de continuité de $A(x)$ dans la direction ν ($h(t)$ est défini par (5)) entraîne les deux propriétés suivantes

(*) ω et $d\sigma$ sont mutuellement absolument continues

(**) la densité $k(y) = \frac{d\omega}{d\sigma}$ vérifie la condition B_2 de Muckenhoupt.

Rappelons qu'une fonction $k : E \to [0,+\infty]$ vérifie la condition B_2 sur un espace métrique E muni d'une mesure de type homogène $d\sigma$ s'il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que, pour toute boule $B \subset E$, on ait :

$$(8) \qquad \left(\frac{1}{\sigma(B)} \int_B k^2(y)\,d\sigma(y)\right)^{1/2} \leqslant C \, \frac{1}{\sigma(B)} \int_B k(y)\,d\sigma(y).$$

Le théorème 2 permet de poser et de résoudre le problème de Dirichlet associé à L et à Ω. On a un résultat un peu plus précis.

<u>Théorème 3</u> : <u>Soit</u> $g \in L^2(d\sigma)$. <u>Il existe alors une et une seule solution</u> $u : \Omega \to \mathbb{C}$ <u>de</u> $Lu = 0$ <u>dont la fonction maximale non tangentielle appartienne à</u> $L^2(d\sigma)$ <u>et dont les valeurs limites non tangentielles coïncident avec</u> $g\ d\sigma$ <u>presque-partout</u>. <u>De plus</u> u <u>vérifie</u>

$$(9) \qquad \| N_\alpha(u)\|_{L^2(d\sigma)} + \left(\int_\Omega \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\,|\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C \|g\|_{L^2(d\sigma)} .$$

On a désigné par $N_\alpha(u) : \partial\Omega \to [0,+\infty]$ la fonction maximale non tangentielle définie comme le supremum de $|u(x)|$ lorsque x appartient à un tronc de cône $\Gamma_\alpha(y)$, de sommet $y \in \partial\Omega$ et d'ouverture $\alpha > 0$.

Grâce à une localisation, on se ramène au cas où Ω est le demi-espace $t > 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[$.

On appelle A_0 une matrice, à coefficients constants, réelle ou complexe, telle que $|A_0(\xi)| \leqslant \lambda|\xi|$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ tandis que $\mathcal{R}e < A_0(\xi),\xi> \geqslant \lambda^{-1} |\xi|^2$.

On revient à la notation (x,t) pour désigner un point de $\mathbb{R}^{n+1}_+$ et l'on pose avec ces notations $B(x) = A(x,0)$ en appelant $A(x,t)$ la matrice notée $A(x)$ dans le théorème 2. On suppose enfin que le champ de vecteurs transverses $\nu(y)$ en $y \in \partial\Omega$ est tout simplement le champ des vecteurs normaux.

L'opérateur $L = \operatorname{div} B \nabla$ est défini par $L(u) = \sum_1^{n+1} \sum_1^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(b_{j,k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ en posant $x_{n+1} = t$. On désignera systématiquement par $u(t)$ (ou $f(t)$) une fonction $u(x,t)$ (ou une suite de $n+1$ fonctions $f_1(x,t),\dots,f_{n+1}(x,t)$) regardée comme une application de $[0,+\infty[$ dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}^n;dx)$.

Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Théorème 4 : Il existe deux constantes $\varepsilon(\lambda,n) > 0$ et $C(\lambda,n) > 0$ telles que si $B(x) = ((b_{j,k}(x)))_{1 \leqslant j,k \leqslant n+1}$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$ à coefficients dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifiant $\|A_0 - B(x)\|_\infty \leqslant \varepsilon(\lambda,n)$, alors, pour toute suite $f_1(x,t),\dots,f_{n+1}(x,t)$ de fonctions vérifiant

(10) $$\int_0^\infty \|f_j(x,t)\|_{L^2(dx)}\, dt < +\infty \quad , \; j = 1,2,\dots,n+1$$

(11) $$\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} t|f_j(x,t)|^2 dxdt < +\infty \quad , \; j = 1,2,\dots,n+1$$

et pour toute fonction $g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une solution $u(t) = u(x,t)$ de

(12) $$Lu(t) = \operatorname{div} f(t)$$

vérifiant (avec $C = C(\lambda,n)$)

(13) $$\sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^2(dx)} + \sup_{t>0} \left\|\int_0^t \nabla u(s)ds\right\|_{L^2(dx)} + \left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} t\,|\nabla u(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$
$$C\|g\|_{L^2(dx)} + C\int_0^\infty \|f(t)\|_{L^2(dx)}\, dt + C\left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} t|f(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{1/2} .$$

On a posé, pour alléger $f(t) = (f_1(x,t),\dots,f_{n+1}(x,t))$ de sorte que $\operatorname{div} f(t) = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x,t) + \dots + \frac{\partial^1}{\partial t} f_{n+1}(x,t)$ etc...

Naturellement la méthode pour passer du théorème 4 au théorème 3 est la technique usuelle.

On pose $B(x) = A(x,0)$ et $f(t) = (A(x,0) - A(x,t))\,\nabla u(t)$. On a donc $\|f(t)\|_2 \leqslant h(t)\,\|\nabla u\|_2$ et, si nous désignons par $|||\cdot|||$ la norme dans $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, \frac{dx\,dt}{t})$, il vient

$$\int_0^\infty \|f(t)\|_2 dt \leqslant \left(\int_0^\infty h^2(t)\frac{dt}{t}\right)^{1/2} |||t\,\nabla u(t)||| .$$

De même $|||tf(t)||| \leqslant \|h\|_\infty |||t\,\nabla u(t)|||$.

Ces deux inégalités montrent que si $C\|h\|_\infty < 1$ et $C\left(\int_0^\infty h^2(t)\frac{dt}{t}\right)^{1/2} < 1$, le théorème 4 implique le théorème 3. Il reste à prouver (13).

On pose $R(x) = B(x) - A_o$; $R(x)$ est une matrice $(n+1) \times (n+1)$, à coefficients complexes, petite en norme $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Le théorème 4 se démontre en construisant un opérateur $\mathcal{L}_R$ transformant le couple (f,g) dont la norme est donnée par le membre de droite de (13) en la solution $u(t)$ dont la norme est donnée par le membre de gauche de (13).

L'opérateur $\mathcal{L}_R$, holomorphe en R, se développe en une série d'opérateurs multilinéaires en R. Il est très remarquable et c'est une découverte essentielle de E. Fabes, D. Jerison et C. Kenig que ces opérateurs multilinéaires soient les mêmes dans tous les exemples que nous avons décrits.

IV. LA THEORIE GENERALE DES OPERATEURS MULTILINEAIRES

Nous introduisons les notations préalables à la définition des opérateurs multilinéaires du théorème 5.

Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction vérifiant $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0$,

$|\psi(x)| \leqslant C\,|x|^{-n+1}$ et $|\nabla\psi(x)| \leqslant C|x|^{-n}$ si $|x| \leqslant 1$ et $|\psi(x)| \leqslant C_m|x|^{-m}$, $|\nabla(x)| \leqslant C_m|x|^{-m}$ pour tout $m \geqslant 1$ si $|x| \geqslant 1$.

Nous posons alors, pour tout $t > 0$, $\psi_t(x) = t^{-n}\,\psi(\frac{x}{t})$ et nous appelons $Q_t : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de convolution avec ψ_t;

Nous désignons par $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction ayant toutes les propriétés de ψ à l'exception de $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$ et par P_t l'opérateur de convolution avec φ_t, agissant sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Soit $m(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une fonction homogène de degré 0 et $M : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur (de convolution) associé au multiplicateur $m(\xi)$: $M(e^{i\xi.x}) = m(\xi)e^{i\xi.x}$.

Posons, pour tout $t > 0$, $M_t = (1-P_t)M$.

Supposons qu'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle qu'en posant $\theta_t(x) = t^{-n}\theta(x/t)$ et en appelant Θ_t l'opérateur de convolution correspondant on ait (pour tout $t > 0$)

$$M_t = \Theta_t + R_t \tag{1}$$

où le noyau distribution de R_t est porté par $|x-y| \leqslant t$. On désigne par $b_j(x) \in L^\infty(\mathbb{R}$ des fonctions telles que $\|b_j\|_\infty \leqslant 1$ et par $B_j : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur de multiplication ponctuelle par $b_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Théorème 5 : Avec les notations précédentes, il existe une constante C ne dépendant que de la dimension n, des fonctions φ et ψ et de la fonction $m(\xi)$ telle que pour tout entier $k \geq 0$ et pour tout choix de $b_1,\ldots,b_k$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et de norme ≤ 1 et de $\mu(t) \in L^\infty(0,+\infty)$, l'opérateur

(2) $$L_k = \int_0^\infty Q_t B_1 M_t B_2 \ldots M_t B_k M_t \; \mu(t) \frac{dt}{t}$$

soit continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que sa norme $\|L_k\|$ vérifie

(3) $$\|L_k\| \leq C^{k+1} \|\mu\|_\infty .$$

De plus le noyau distribution $L_k(x,y)$ de L_k vérifie la célèbre condition de Calderón-Zygmund

(4) $$\int_{|x-y| \geq Z|x-x'|} |L_k(x,y) - L_k(x',y)|\, dy \leq C^{k+1} \|\mu\|_\infty .$$

On a également l'estimation quadratique correspondante :
si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $Q_t\, B_1\, M_t \ldots B_k\, M_t\, f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, \frac{dx\,dt}{t})$ avec une norme $\leq C^{k+1} \|f\|_2$.

V. LE THEOREME DE DAVID ET JOURNÉ

Nous allons définir une nouvelle classe d'opérateurs, que nous appellerons "opérateurs de Calderón-Zygmund". Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que cette nouvelle classe contient strictement ce que l'on désignait autre fois sous la nom d'opérateurs de Calderón-Zygmund. Le changement de terminologie correspond aux progrès de notre compréhension du sujet.

Définition 1 : Un opérateur linéaire continu $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est appelé un opérateur de Calderón-Zygmund s'il existe un exposant $\varepsilon \in]0,1]$ et une constante $C \geq 0$ tels que

(1) $$\|T(f)\|_2 \leq C\|f\|_2 \quad \text{pour toute fonction } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

(2) le noyau distribution $K(x,y)$ de T, restreint à l'ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par $y \neq x$, est en fait une fonction continue telle que

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n} \quad , \quad |K(x',y) - K(x,y)| \leq C|x-x'|^\varepsilon \, |x-y|^{-n-\varepsilon}$$

pour tout x, tout x' et tout y tels que $|x-y| \geqslant 2|x-x'|$,
$|K(x,y) - K(x,y')| \leqslant C|y-y'|^{\varepsilon} |x-y|^{-n-\varepsilon}$ dès que $|x-y| \geqslant 2|y-y'|$.

Les méthodes de variable réelle s'appliquent à cette classe d'opérateurs. En particulier Calderón, Cotlar et Zygmund associent à T les opérateurs tronqués définis par les noyaux $K_\varepsilon(x,y) = K(x,y)\, \mathbb{1}_{\{|x-y|\geqslant\varepsilon\}}$ et l'opérateur maximal T_* défini par

(3) $$T_* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)|.$$

Ces auteurs démontrent que $T_* : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ est borné lorsque $1 < p < +\infty$ et est de type faible sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Le problème que David et Journé ont résolu est la question fondamentale de savoir sous quelle condition (2) implique (1).

Pour mieux comprendre le théorème de David et Journé, nous appellerons $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ le groupe des automorphismes intérieurs particuliers $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de la forme $g(T) = STS^{-1}$, $T \in \mathcal{A}$, où S agit sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par $(Sf)(x) = f(\delta x + x_0)$, $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$; $\delta > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant arbitraires.

Si $T \in \mathcal{A}$ et si $\|T\|$ est la norme d'opérateur correspondante, alors $\|g(T)\| = \|T\|$ pour tout $g \in \mathcal{G}$. Il est donc naturel de chercher à établir la continuité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ d'un opérateur à l'aide d'hypothèses invariantes par l'action de $\mathcal{G}$.

Observons que si l'on désigne par $\gamma(T)$ la borne inférieure (éventuellement infinie) des constantes $C \geqslant 0$ telles que le noyau-distribution $K(x,y)$ de T vérifie (2), alors $\gamma(g(T)) = \gamma(T)$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Nous allons décrire une forme $\mathcal{G}$-invariante de la continuité de $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Rappelons une définition classique.

Définition 2 : Un ensemble E d'applications linéaires continues $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}$ est borné si pour toute partie bornée $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et pour toute partie bornée $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ il existe une constante $C = C(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ telle que

(4) $$|\langle T\varphi_1, \varphi_2 \rangle| \leqslant C \quad \text{pour } T \in E,\ \varphi_1 \in \mathcal{B}_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{B}_2.$$

Définition 3 : Une application linéaire continue $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ possède la propriété de cancellation faible si l'ensemble des applications $g(T)$, $g \in \mathcal{G}$, est un ensemble borné.

Il est évident que si $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue, alors (4) a lieu. Puisque $g(T)$, $g \in \mathcal{G}$, est alors continue avec la même norme, une application linéaire continue a la propriété de cancellation faible ; cette propriété est la traduction en "soft" de la continuité L^2.

On peut écrire explicitement la cancellation faible en posant si $u \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$, $\varphi^{(u,\delta)}(x) = \varphi(\frac{x-u}{\delta})$. Alors cette propriété de cancellation faible devient

$$(5) \qquad |\langle T\varphi_1^{(u,\delta)}, \varphi_2^{(u,\delta)}\rangle| \leqslant C\delta^n$$

pour $\varphi_1 \in \mathcal{B}_1$, $\varphi_2 \in \mathcal{B}_2$.

<u>Définition 4</u> : <u>Si</u> $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>est une application linéaire continue, l'adjoint</u> $T^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>est défini par</u> $\langle Tf,g\rangle = \langle f,T^*g\rangle$ <u>en appelant</u> $\langle .,.\rangle$ <u>la forme bilinéaire de dualité entre</u> $\mathcal{D}$ <u>et</u> $\mathcal{D}'$ <u>qui prolonge</u> $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$, $f \in \mathcal{D}$, $g \in \mathcal{D}$.

Nous allons rappeler la définition de l'espace BMO de John et Nirenberg. Une (classe de) fonction $\beta \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ appartient à $BMO(\mathbb{R}^n)$ s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^n$, de volume $|B|$, la variance de $\beta(x)$, restreinte à l'espace de probabilité B, muni de la mesure $\frac{dx}{|B|}$, ne dépasse pas C. Cela signifie que $\frac{1}{|B|}\int_B |\beta(x) - \mathcal{M}_B(\beta)|^2 dx \leqslant C$ en appelant $\mathcal{M}_B(\beta)$ la moyenne de β sur B.

<u>Théorème 6</u> : <u>Soit</u> $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>une application linéaire continue. Supposons que le noyau-distribution</u> $K(x,y)$ <u>de</u> T <u>vérifie les propriétés</u> (2) <u>de la définition</u> 1. <u>Alors une condition nécessaire et suffisante pour que</u> T <u>soit un opérateur de Calderón-Zygmund est l'ensemble des trois propriétés suivantes</u>

$$(6) \qquad T(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$$

$$(7) \qquad T^*(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$$

(8) T <u>a la propriété de cancellation faible.</u>

Il convient naturellement de définir $T(1)$. En fait $T(1)$ sera une forme linéaire continue sur le sous-espace $\mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n)$ composé des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ d'intégrale nulle.

On considère, pour cela, une décomposition $1 = u(x) + v(x)$ de 1 où $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et où $v = 0$ au voisinage du support de φ. Alors $\langle T(u), \varphi\rangle$ a un sens par hypothèse et pour donner un sens à $\langle T(v), \varphi\rangle$ il suffit d'expliquer pourquoi l'intégrale double $\iint K(x,y)\, \varphi(x) v(y)\, dx\, dy$ converge. On observe que cette inétgrale est automatiquement restreinte à $|x-y| \geqslant r > 0$ à cause des conditions sur les supports de φ et de v.

Par ailleurs $J(y) = \int K(x,y)\, \varphi(x) dx$ est une fonction continue de y en dehors du support de φ et $J(y) = O(|y|^{-n-\varepsilon})$ à l'infini. Cela assure la convergence de $\int J(y) v(y) dy$.

Rappelons ensuite que l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ de Stein et Weiss est l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ où R_j est la transformation de Riesz de symbole $\frac{\xi_j}{|\xi|}$.

Une définition équivalente est de définir $H^1(\mathbb{R}^n)$ comme le complété de $\mathcal{S}_o(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|f\|_1 + \sum_1^n \|R_j f\|_1$.

L'espace dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est $BMO(\mathbb{R}^n)$ comme l'ont montré Ch. Fefferman et E. Stein. Dans le même article, "H^p-spaces of several variables", Acta Math. 129 (1972) 137-193, Fefferman et Stein prouvent que tout opérateur de Calderón-Zygmund au sens de la définition 1 définit une application linéaire continue de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $BMO(\mathbb{R}^n)$. L'action de T sur $b \in L^\infty$ se fait en construisant une forme linéaire continue $T(b)$ sur le sous-espace $\mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ déjà considéré. Tout comme dans le cas où $b = 1$, on part de $\varphi \in \mathcal{D}_o(\mathbb{R}^n)$ et l'on décompose b en $b_1 + b_2$ où $b_2 = 0$ au voisinage du support de φ et où $b_1 \in L^\infty \cap L^2$. La définition de $T(b_1)$ ne pose alors aucun problème et l'intégrale double $\iint K(x,y)\varphi(x) b_2(y) dx\, dy$ devient absolument convergente dès que l'on intègre d'abord en x, puis en y.

Il est amusant (et instructif) d'appliquer le théorème 6 aux opérateurs de la classe interdite $Op\, S^o_{1,1}$, dont les symboles vérifient

$$|\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta\, \sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\, (1+|\xi|)^{|\beta| - |\alpha|} .$$

Alors la propriété $T(1) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ est évidente car $T(1) = \sigma(x,0) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$. La propriété de cancellation faible est également évidente pour tout symbole $\sigma(x,\xi)$ tel que $|\sigma(x,\xi)| \leqslant C$.

Le noyau distribution $K(x,y)$ de $T \in Op\, S^o_{1,1}$ vérifie toujours

$$|\partial_x^\alpha\, \partial_y^\beta\, K(x,y)| \leqslant C_{\alpha,\beta} |x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $T \in \mathrm{Op}\, S^{o}_{1,1}$ soit continu sur $L^{2}(\mathbb{R}^{n})$ est que $T^{*}(1) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n})$.

Pour vérifier que l'espace $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{n})$ intervient, même dans ce cas particulier, il suffit de produire un exemple. En dimension 1 on appelle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction paire, nulle au voisinage, de 0 et égale à 1 en 1. On appelle c_k une suite bornée de nombres réels ou complexes et l'on pose

$$(9) \qquad \sigma(x,\xi) = \sum_{o}^{\infty} c_k e^{i2^k x} \psi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$$

On vérifie immédiatement que $\sigma \in S^{o}_{1,1}$ et que $T^{*}(1) = \sum_{o}^{\infty} c_k e^{i2^k x}$. La condition nécessaire et suffisante pour que T soit borné sur $L^{2}(\mathbb{R})$ est que $\sum_{o}^{\infty} c_k e^{i2^k x} \in \mathrm{BMO}$; c'est à dire que $\sum_{o}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$. Observons que $T^{*}(1) \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ conduirait à $\sum_{o}^{\infty}|c_k| < +\infty$.

La classe des opérateurs paradifférentiels de J. M. Bony est précisément ajustée pour satisfaire aux hypothèses du théorème 6. En fait ces opérateurs T appartiennent à $\mathrm{Op}\, S^{o}_{1,1}$ et vérifient de plus $T^{*}(1) = 0$.

Le théorème 6 a une version vectorielle qui est très utile dans les applications.

Théorème 7 : Soient H un espace de Hilbert séparable $\varepsilon \in \left]0,1\right]$ un exposant, $C \geq 0$ une constante et $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n}) \to \mathcal{D}'_{H}(\mathbb{R}^{n})$ un opérateur linéaire continu dont le noyau-distribution $K(x,y) \in \mathcal{D}'_{H}(\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n})$ vérifie les estimations

$$(10) \qquad \|K(x,y)\|_{H} \leq C|x-y|^{-n}$$

$$(11) \qquad \|K(x',y) - K(x,y)\|_{H} \leq C|x-x'|^{\varepsilon} |x-y|^{-n-\varepsilon}$$

pour tout x, tout x' et tout $y \in \mathbb{R}^{n}$ tels que $|x-y| \geq 2|x-x'|$

$$(12) \qquad \|K(x,y) - K(x,y')\|_{H} \leq C|y-y'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon}$$

lorsque $|x-y| \quad 2|y-y'|$.

Alors une condition suffisante pour que T se prolonge en un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2_H(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des trois propriétés suivantes :

(13) la propriété de cancellation faible

(14) l'existence de $\beta \in BMO(\mathbb{R}^n;H)$ telle que $T(1) = \beta$

(15) l'existence de $\gamma \in BMO(\mathbb{R}^n;H)$ telle que, pour tout vecteur fixé $e \in H$, on ait $T^*(e) = \langle e,\gamma\rangle_H$.

Naturellement la propriété de cancellation faible se définit comme dans le cas scalaire en demandant que l'ensemble des opérateurs $g(T)$, $g \in \mathcal{G}$, soit une partie bornée de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ ,\ \mathcal{D}'_H(\mathbb{R}^n))$.

VI. RETOUR AUX OPERATEURS MULTILINEAIRES

Désignons par $\mathcal{T}$ la topologie forte sur $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\ L^2(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}$. Une suite T_j, $j \in \mathbb{N}$ (ou un filtre T_α , $\alpha \in A$) converge au sens de $\mathcal{T}$ vers $T \in \mathcal{A}$, si pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $T_j(f)$ converge, pour la norme $L^2(\mathbb{R}^n)$, vers $T(f)$.

Nous désignons par $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ la sous-algèbre des opérateurs de multiplication ponctuelle par des fonctions $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par $\Delta \subset \mathcal{B}$ la boule unité définie par $\|b\|_\infty \leqslant 1$. La boule ouverte correspondante est notée $\mathring{\Delta}$.

Enfin le groupe $\mathcal{G}$ se compose des automorphismes de $\mathcal{A}$ de la forme particulière $T \mapsto STS^{-1}$ où S agit sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par $Sf(x) = f(\delta x + x_o)$, $\delta > 0$, $x_o \in \mathbb{R}^n$.

Finalement le problème que nous étudions est la recherche des applications $F : \Delta \to \mathcal{A}$ ayant les propriétés suivantes

(1) F est continue lorsque Δ et $\mathcal{A}$ sont munies de la topologie $\mathcal{T}$

(2) F est holomorphe sur $\mathring{\Delta}$

(3) F commute avec l'action de $\mathcal{G}$ sur Δ et sur $\mathcal{A}$.

La dernière condition signifie que l'action de l'opérateur $F(b)$ sur f, que nous noterons $F(b)[f] = h$ a la propriété que $F(Sb)[Sf] = Sh$ chaque fois que $b \in \Delta$ $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et que l'isomorphisme $S : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est défini par $Sf(x) = f(\delta x + x_o)$, $\delta > 0$, $x_o \in \mathbb{R}^n$

Ce programme est ambitieux. La seule remarque que nous sachions faire est que :

(4) $$F(b) = \sum_0^\infty F_k(b) = \sum_0^\infty \tilde{F}_k(b,\dots,b)$$

où $\tilde{F}_k : L^\infty(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{A}$ est multilinéaire, continue et commute avec l'action de $\mathcal{G}$. En particulier l'ensemble E_k des opérateurs $F_k(b)$, $b \in \Delta$, est invariant sous l'action de $\mathcal{G}$. Il est donc naturel de traiter cet ensemble d'opérateurs par un théorème dont les hypothèses soient invariants sous l'action de $\mathcal{G}$. C'est le cas du théorème 6 que nous allons utiliser pour construire des opérateurs particuliers dans E_k : ceux du pragraphe 4.

Nous désignons par $\Gamma(t)$ l'opérateur dont le symbole est $\exp(-t^2 |\xi|^2)$ et considérons simultanément les opérateurs

$$L_k = \int_0^\infty Q_t B_1 R_t B_2 \dots B_k R_t \mu(t) \frac{dt}{t}$$

$$L'_k = \int_0^\infty Q_t B_1 R_t B_2 \dots B_k P_t \mu(t) \frac{dt}{t}$$

et $$L''_k = \int_0^\infty Q_t B_1 R_t B_2 \dots B_k \Gamma(t) \mu(t) \frac{dt}{t} .$$

L'opérateur $P_t - \Gamma(t) = \tilde{Q}_t$ a les mêmes propriétés que Q_t. Par ailleurs, sous la seule condition que $\| L_t \| \leq 1$, l'opérateur $\int_0^\infty Q_t L_t \tilde{Q}_t \frac{dt}{t} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est borné. Il en résultera que $L'_k - L''_k$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs $R_t = (1-P_t)R$ et l'on a donc $L_k = L_{k-1} B_k R - L'_k R$. La continuité de $L_o = \int_0^\infty Q_t \mu(t) \frac{dt}{t}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, de $L_1, \dots,$ de L_{k-1} et celle de L''_k entraînent celle de L_k .

Il reste à étudier L''_k . On montre directement que le noyau-distribution $L''_k(x,y)$ de L''_k vérifie la condition (2) de la définition 1.

Une remarque simple est que si $L_t : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est continu et que $\| L_t \| \leq 1$, alors $\int_0^\infty Q_t L_t \frac{dt}{t}$ a toujours la propriété de cancellation faible.

On a $Q_t(1) = 0$ et donc $(L''_k)^*(1) = 0$

Finalement $L_k''(1) = L_{k-1}(b_k)$. On vérifie directement (sans utiliser un raisonnement par récurrence) que si $\|b_1\|_\infty \leq 1, \ldots, \|b_m\|_\infty \leq 1$ et $\|\mu\|_\infty \leq 1$, alors le noyau-distribution $L_m(x,y)$ de l'opérateur L_m est tel que

$$\int_{|x-y| \geq 2|x-x'|} |L_m(x,y) - L_m(x',y)|\,dy \leq C^{m+1}$$

où C ne dépend que de la dimension.

La continuité de L_{k-1} sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ fait partie de l'hypothèse de récurrence. Celle de $L_{k-1} : L^\infty \rightarrow BMO$ résulte alors de la propriété du noyau que nous venons d'écrire et du théorème de Feffermann et Stein déjà cité.

La continuité de L_o est immédiate car L_o est un opérateur de convolution dont le symbole appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Les résultats correspondants sur les fonctionnelles quadratiques associées, à savoir $\left(\int_o^\infty |Q_t B_1 R_t \ldots B_k R_t f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$, s'obtiennent de même à l'aide du théorème 7 que l'on applique en choisissant $H = L^2[(0,+\infty)\frac{dt}{t}]$.

Les opérateurs multilinéaires du paragraphe 4 commutent avec l'action de $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mu(t) = 1$.

Enfin un examen attentif du raisonnement par récurrence que nous venons de faire donne une croissance en C^k des constantes permettant de majorer les normes des opérateurs multilinéaires.

---

[1] L. Caffarelli, E. Fabes and C. Kenig : Completely singular elliptic-harmonic measures. Ind. U. Math. J. 30 (1981) 917-924.

[2] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola and S. Salsa : Boundary behavior of non negative solutions of elliptic operators in divergence form. Ind. U. Math. J. 30, (1981) 621-640.

[3] R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer : L'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes. Annals of Math. 116 (1982) 361-387.

[4] G. David et J. L. Journé : Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Note aux C. R. Acad. Sc., Paris, à paraître.

[5] E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig : Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations. Proc. NAS <u>79</u> (1982) 5746-5750.

[6] E. Fabes, D. Jerison and C. Kenig : Necessary and sufficient conditions for absolute continuity of elliptic harmonic measure. A paraître aux Annals of Math.

[7] Y. Meyer : Lemme de Cotlar, opérateurs définis par des intégrales singulières et applications aux équations aux dérivées partielles. Cours donné à l'Université Autonoma de Madrid, Avril 1983.

[8] C. Kenig and Y. Meyer : Kato's square roots of accretive operators and Cauchy kernels on Liptschitz curves are the same. Report n° 4, 1983, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Suède.

*
* *
*