

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Valeurs propres immergées dans le spectre continu d'une surface de Riemann

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 8, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983___A8_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

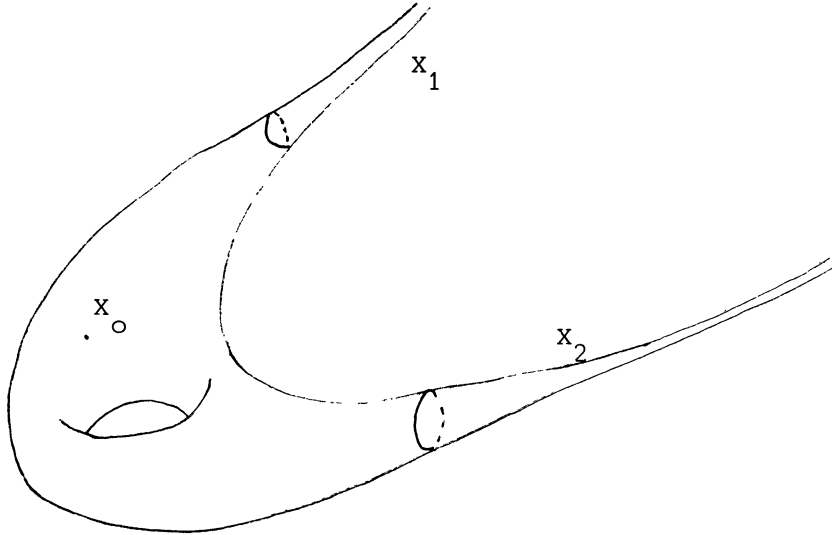
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 2 - 1 9 8 3

VALEURS PROPRES IMMERGEES DANS LE SPECTRE
CONTINU D'UNE SURFACE DE RIEMANN

par Y. COLIN DE VERDIERE

On étudie la théorie spectrale du laplacien sur une variété riemannienne complète, non compacte, de volume fini du type suivant : $X = X_0 \cup_{i=1}^N X_i$ où X_0 est compacte et X_i est isométrique à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [b_i, +\infty[$ équipé de la métrique hyperbolique $\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ ($x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, y \in [b_i, +\infty[$).



On obtient par exemple de telles variétés à courbure constante -1 en prenant des quotients $X = H/\Gamma$ où H est le demi-plan de Poincaré avec la métrique hyperbolique et Γ est un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$, groupe des isométries de H , agissant de façon proprement discontinu et sans points fixes de façon que $\text{aire}(H/\Gamma) < +\infty$. Les fonctions sur X s'identifient alors aux fonctions sur H Γ -périodiques (on dit plutôt automorphes dans ce contexte).

Les résultats que nous décrivons ici se généralisent au cas des quotients de volume fini d'espaces symétriques de rang 1 même à courbure non constante (voir [D] pour une description géométrique des pointes de ces variétés).

La variété X étant complète, il est classique ([G] et aussi [C]) que $\Delta \uparrow C_0^\infty(X)$ est essentiellement autoadjoint sur $L^2(X)$: nous noterons Δ_∞ cette extension autoadjointe, Δ désignant le laplacien au sens des distributions.

Rappelons d'abord les résultats classiques ([K] ou [L.P.] sur la théorie spectrale de Δ_∞ : le spectre de Δ_∞ se compose d'un spectre absolument continu $[\frac{1}{4}, +\infty[$ de multiplicité N et d'un spectre discret fini ou infini formé de valeurs propres $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, ne s'accumulant (éventuellement) qu'en $+\infty$.

On a le :

Théorème : 1) Si $N(\lambda) = \text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n \leq \lambda\}$, alors

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} (N(\lambda)/\lambda) \leq \frac{1}{4\pi} \text{aire}(X).$$

2) Pour une métrique générique sur X_0 (voir signification précise plus loin), Δ_∞ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres toutes situées dans $[a, \frac{1}{4}[$.

Commentaires : (a) le résultat 1) est démontré par de nombreux auteurs ([L-P] , [M]) en utilisant assez explicitement les séries d'Eisenstein (description du spectre continu). Donnelly ([D]) donne une démonstration s'appliquant aux espaces localement symétriques à l'aide d'estimations du noyau de l'équation de la chaleur ; nous avons donné dans [CV3] une démonstration s'appuyant sur le principe du minimax et se généralisant au cas localement symétrique.

(b) Dans le cas $X = H/\Gamma$, on a $N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \text{aire}(X)$ dans beaucoup de cas arithmétiquement intéressants, par exemple $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, cela résulte d'une écriture explicite des séries d'Eisenstein. On ne sait pas si c'est vrai pour tout Γ (conjecture de Roelcke , [V]).

(c) L'étude des valeurs propres inférieures à $\frac{1}{4}$ peut se faire au moyen des méthodes isopérimétriques usuelles sur les variétés compactes ([B]).

Je vais consacrer le reste de cet exposé à esquisser une preuve du résultat 2) en supposant pour simplifier $N = 1$. Ce résultat et d'autres sont l'objet de l'article [CV 3] .

1. Théorie spectrale de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [b, +\infty[$ (conditions de Neumann)

En utilisant une séparation des variables évidente

$$f(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(y) e^{2\pi i n x}$$

on peut écrire

$$L^2(X_1, \frac{dx dy}{y^2}) = \hat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{Z}} L^2([b, +\infty[, \frac{dy}{y^2})$$

et $\Delta_\infty = \hat{\bigoplus}_{n \in \mathbb{Z}} H_n$,

où H_n est unitairement équivalent à $-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{4} + 4\pi^2 n^2 e^{2t}$ sur $L^2([\log b, \infty[, dt)$

avec au point $B = \log b$ la condition aux limites $2f'(B) - f(B) = 0$.

H_0 a donc un spectre continu $[\frac{1}{4}, +\infty[$ de multiplicité 1 alors que les H_n sont à résolvante compacte pour $n \neq 0$; on a même plus : $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} H_n$ est à résolvante compacte : si $\alpha_n = \inf(\text{spectre } H_n)$, on a $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$.

En utilisant des méthodes du type minimax, on peut montrer :

$$\sum_{n \neq 0} \text{Card} \{ \text{val. propres de } H_n \leq \lambda \} \sim \frac{\lambda}{4\pi} \text{aire}(X_1).$$

2. Les opérateurs Δ_a de Lax-Phillips

Si f est une fonction sur $X = X_0 \cup X_1$, on note $f_0(y)$ ($y \geq b$) le zéro-ème coefficient de Fourier de f défini par

$$f_0(y) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f^1(x,y) dx \quad \text{où } f^1 = f \upharpoonright X_1.$$

On a alors : si $\lambda_n \geq \frac{1}{4}$ est une valeur propre de Δ_∞ associée à une fonction propre φ_n , $\varphi_{n,0}(y) \equiv 0$; en effet on doit avoir

$$(i) \quad \int_b^{+\infty} |\varphi_{n,0}(y)|^2 \frac{dy}{y} < +\infty \quad \text{et}$$

$$(ii) \quad (y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda_n) \varphi_{n,0}(y) = 0$$

ce qui est incompatible (voir § 1) sauf si $\varphi_{n,0} \equiv 0$.

Le rôle important joué par le zéro-ème coefficient de Fourier dans ce contexte a amené Lax et Phillips à définir les opérateurs Δ_a : si $a > b$, on pose $\mathcal{H}_a^S = H^S(X) \cap \{f \mid f_0 \upharpoonright [a, +\infty[\equiv 0\}$ et $q_a(f) = \int_X \|df\|^2$, alors la forme q_a de domaine \mathcal{H}_a^1 est fermée sur l'espace de Hilbert \mathcal{H}_a^0 . On note Δ_a l'opérateur autoadjoint associé par l'extension de Friedrichs à q_a .

Le domaine de Δ_a est le sous-espace de \mathcal{H}_a^1 formé des fonctions f telles que $\Delta f = g + CT_a$ où $g \in L^2(X)$ et $T_a \in \mathcal{D}'(X)$ est définie par $\langle T_a | f \rangle = f_0(a)$; on a alors $\Delta_a f = g$.

Théorie spectrale de Δ_a : Il résulte aisément de l'étude du cas du cylindre hyperbolique que Δ_a est à résolvante compacte. On peut classer les valeurs propres de Δ_a en deux types :

Type I : λ_n valeur propre de Δ_∞ telle que la fonction propre associée φ_n vérifie $\varphi_{n,0} \equiv 0$ (c'est le cas de toutes les valeurs propres de Δ_∞ qui sont $\geq \frac{1}{4}$)

Type II : $\mu_j(a)$ associée à des fonctions propres φ_j telle que

$$\varphi_{j,0}(a) = 0, \quad \frac{d}{dy} \varphi_{j,0}(a) \neq 0$$

Les valeurs propres de type II se calculent à partir du zéro-ème coefficient de Fourier des séries d'Eisenstein.

On prouve à partir du cas du cylindre et du principe du minimax que $\text{Card} \{ \text{Val. propres de } \Delta_a \leq \lambda \} \sim \frac{\lambda}{4\pi} \text{ aire}(X)$, ce qui conduit au résultat I du théorème.

Remarque : Les opérateurs Δ_a permettent une approche aisée de la théorie spectrale de Δ_∞ ; on peut s'en servir pour avoir une preuve rapide du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein ([CV1]).

3. Le cas générique

Soit K un compact d'intérieur non vide de X_0 et $\mathcal{M} \subset C_0^\infty(K)$ l'ensemble des f telles que le laplacien Δ_∞ pour la métrique $e^f g_0$ n'ait aucune valeur propre $\geq \frac{1}{4}$, alors \mathcal{M} est un résiduel au sens de Baire. On note $\Delta_{a,f}$ l'opérateur Δ_a pour la métrique $e^f \cdot g_0$.

Esquisse de la preuve : L'idée est d'appliquer la théorie des perturbations à la famille analytique d'opérateurs $\Delta_{a,tf}$ (si on se place au voisinage de g_0) : on peut ainsi montrer que :

- 1) génériquement les valeurs propres de $\Delta_{a,f}$ sont simples
- 2) si λ_0 est valeur propre simple de Δ_a de type II, c'est encore vrai pour la valeur propre $\lambda(t)$ de $\Delta_{a,tf}$ pour t petit voisin de 0 où $\lambda(t)$ est la valeur propre de $\Delta_{a,tf}$ dépendant continument de t telle que $\lambda(0) = \lambda_0$.

Il reste essentiellement à montrer un résultat de densité du genre suivant si λ_0 est une valeur propre simple de type I de Δ_a il existe $f \in C_0^\infty(K)$ telle que la valeur propre $\lambda(t)$ de $\Delta_{a,tf}$ soit de type II pour $t \neq 0$ petit, autrement dit si $\psi(t)$ est la fonction propre associée :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_0 \neq 0 .$$

Supposons prouvé le :

Lemme : Si $U \subset X_0$ est un ouvert et $\lambda_0 > \frac{1}{4}$ donné il existe $h \in D(\Delta_a)$ telle que $h_0 \neq 0$ et $(\Delta_a - \lambda_0)h \in C_0^\infty(U)$.

Soit $U \subset K$ telle que la fonction propre ψ_0 de Δ_a ne s'annule pas sur U et on écrit : $(\Delta_a - \lambda_0)h = f\psi$ où $f \in C_0^\infty(U)$ et h comme dans le lemme précédent ; on obtient :

$$(\Delta_a - \lambda_0)(\dot{\psi} - h) = \dot{\lambda}_0 \psi ,$$

donc $\dot{\lambda}_0 = 0$ et $\dot{\psi}_0 = h_0 \neq 0$.

Preuve du lemme : On choisit une métrique g_1 telle que $\text{support}(g_1 - g_0) \subset U$ et $\lambda_0 \notin \text{spectre}(\Delta_{a,g_1})$ et pour $z_0 \in X_0 \cup \{(x,y) \in X_1 \mid y < a\}$ on pose $R(z_0, \cdot) = (\Delta_{a,g_1} - \lambda_0)^{-1}(\delta(z_0))$. Pour $z_0 \in X_0$ ou $y(z_0) < y < a$, on a :

$$R(z_0, \cdot) \Big|_0(y) = A(z_0)y^{s_0} + B(z_0)y^{1-s_0} \quad (\text{avec } s_0(1-s_0) = \lambda_0)$$

et on vérifie que dans $X_0 \cup \{(x,y) \in X_1 \mid y < a\}$, on a :

$$(\Delta_{g_1} - \lambda_0)A = (\Delta_{g_1} - \lambda_0)B = 0 .$$

Or $A(z_0)y^{s_0} + B(z_0)y^{1-s_0}$ n'est pas nul pour tout z_0 car cela impliquerait que pour tout $f \in C_0^\infty(X_0 \cup \{(x,y) \in X_1 \mid y < a\})$ on ait $(\Delta_{a,g_1} - \lambda_0)^{-1}f \Big|_0 \equiv 0$,

ce qui est faux : prendre $k = \varphi(y)$, $\varphi \in C_0^\infty(]b,a[)$ et $f = (\Delta_{g_1} - \lambda_0)k$.

Donc par le principe de prolongement analytique des solutions d'une équation elliptique à coefficients C^∞ , il existe $z_0 \in U$ tel que $A(z_0)y^{s_0} + B(z_0)y^{1-s_0} \neq 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(U)$ telle que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de z_0 on pose $h(z) = (1 - \varphi(z)) R(z_0, z)$: c'est une solution du problème.

REFERENCES

- [B] Büser P. : Proc. Symposia in Pure Mathematics, 36 (1980).
- [C] Chernoff : J. of Functional analysis 12, 401-404 (1973).
- [CV1] Y. Colin de Verdière : C. R. Acad. Sc. 293 (1981), 361-363.
- [CV2] Y. Colin de Verdière : Pseudo-laplaciens I, Ann. Inst. Fourier 32(1982), 275-286.
- [CV3] Y. Colin de Verdière : Pseudo-laplaciens II, Ann. Inst. Fourier 33(1983).
- [D] Donnelly H. : Comm. P. D. E. 6 (1981), 963-982.
- [G] Gaffney : PNAS 1950.
- [K] Kubota : Elementary theory of Eisenstein series (1973).
- [L.P.] P. D. Lax, R. Phillips : Scattering theory for automorphic functions. Ann. of Math. Studies 87 (1976).
- [M] Muller : Preprint, I.H.E.S. (1980).
- [V] Venkov : Russian Math. surveys 34 (1976), 79-153.

*
* *
*