SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. BREZIS

Solutions positives d'équations elliptiques non linéaires avec exposant de Sobolev critique et conjecture de Rellich pour les surfaces à courbure moyenne prescrite

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1982-1983), exp. n° 9, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1982-1983____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 2 - 1 9 8 3

SOLUTIONS POSITIVES D'EQUATIONS ELLIPTIQUES NON LINEAIRES AVEC EXPOSANT DE SOBOLEV CRITIQUE ET CONJECTURE DE RELLICH POUR LES SURFACES A COURBURE MOYENNE PRESCRITE.

par H. BREZIS

Exposé n° IX

16 Novembre 1983

On considère deux problèmes éloignés en apparence mais qui, en fait, sont étroitement liés.

Problème I :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné régulier avec $n \geqslant 3$. On cherche s'il existe une fonction u vérifiant :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + f(x,u) & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $p = (n+2)/(n-2)$, $f(x,0) = 0$ et $f(x,u)$ est une perturbation de u^p au sens que $\lim\limits_{u \to \infty} f(x,u)/u^p = 0$. Un exemple modèle est $f(x,u) = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. L'exposant $p = (n+2)/(n-2)$ est critique du point de vue des théorèmes de Sobolev. En effet les solutions de (1) correspondent à des points critiques de la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} - \int_\Omega F(x,u),$$

où $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt$. On notera que $p+1 = 2n/(n-2)$ est l'exposant de Sobolev limite pour l'injection $H_0^1 \subset L^{p+1}$, et donc cette injection n'est pas compacte -ce qui engendre de sérieuses difficultés.

Les résultats dont je parlerai ont été obtenus en collaboration avec L. Nirenberg [3] .

Problème II :

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe de Jordan régulière, et soit $H > 0$ un réel donné. On cherche s'il existe des surfaces de courbure moyenne égale à H qui s'appuient sur Γ . Par exemple si Γ est un cercle de rayon R, on voit qu'il existe deux calottes sphériques de courbure H lorsque $H < \frac{1}{R}$ (une "petite" calotte et une "grande" calotte); si $H = \frac{1}{R}$ il existe une seule solution (la demi-sphère d'équateur Γ) et si $H > \frac{1}{R}$ il n'existe aucune solution du problème.

Cette observation avait conduit Rellich à conjecturer que pour toute courbe Γ il existe au moins deux surfaces de courbure moyenne H qui s'appuient sur Γ

si H est prescrit assez petit. Nous avons établi ce résultat avec Coron [2] .

PROBLEME I

On connaît de très nombreux résultats d'existence pour les problèmes du type (1) dans le cas sous-critique $p < (n+2)/(n-2)$ (voir par exemple l'article de synthèse de P. L. Lions [5]). Par contre si $p = (n+2)/(n-2)$ la situation est totalement différente ; un célèbre résultat de Pohozaev affirme que si Ω est étoilé, alors il n'existe pas de solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)} & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \, . \end{cases}$$

Comme on le verra, le terme de perturbation $f(x,u)$ peut modifier considérablement la nature du problème.

Notre intérêt pour le Problème I provient du fait que l'on rencontre un phénomène comparable de manque de compacité dans de très nombreuses questions de calcul des variations, de géométrie et de physique. L'exemple le plus célèbre est le problème de Yamabe

$$\begin{cases} -4\dfrac{(n-1)}{(n-2)}\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)} - R(x)u & \text{sur } M \\ u > 0 & \text{sur } M \end{cases}$$

où M est une variété riemannienne de dimension n et $R(x)$ est la courbure scalaire.

Pour simplifier, je commence par le cas modèle :

$$(2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $p = (n+2)/(n-2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nos résultats principaux sont les suivants :

<u>Théorème 1</u> : On suppose que $n \geq 4$; le problème (2) admet une solution pour $\lambda \in]0, \lambda_1[$ (1). De plus si Ω est étoilé le problème (2) n'admet aucune solution lorsque $\lambda \notin]0, \lambda_1[$.

Lorsque $n = 3$ le problème (2) est beaucoup plus délicat et nous avons une réponse précise seulement pour les boules.

<u>Théorème 2</u> : On suppose que Ω est une boule de $\mathbb{R}^3$; le problème (2) possède une solution si et seulement si $\lambda \in]\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1[$.

Cette différence <u>surprenante</u> entre les cas $n \geq 4$ et $n = 3$ permettra peut être d'éclairer la conjecture de Yamabe qui est essentiellement résolue en grandes dimensions ($n \geq 6$, voir Th. Aubin [1]) et ouverte en petites dimensions ($n \leq 5$). J'esquisse les grandes lignes de la démonstration ; pour les détails voir [3].

On peut aborder le problème (2) via la recherche des points critiques non triviaux de la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} - \frac{\lambda}{2} \int |u|^2 .$$

Un autre point de vue - que nous allons utiliser consiste à chercher les <u>points critiques</u> de la fonctionnelle $\int |\nabla u|^2 - \lambda \int |u|^2$ <u>sur la sphère</u> $\|u\|_{L^{p+1}} = 1$.
Un tel point critique u vérifie l'équation

$$- \Delta u - \lambda u = \mu u^p$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\|u\|_{L^{p+1}} = 1$.
Si $\mu > 0$. On peut ensuite "faire disparaître μ " en jouant sur l'homogénéïté différente à gauche et à droite. Plus précisément, on établit que pour λ approprié (i.e. $\lambda \in]0, \lambda_1[$ au Théorème 1 et $\lambda \in]\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1[$ au Théorème 2) alors

---

(1) λ_1 désigne la 1ère valeur propre de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet.

$$(3) \qquad S_\lambda = \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in H^1_o \\ \|u\|_{L^{p+1}} = 1}} \left\{ \int |\nabla u|^2 - \lambda \int |u|^2 \right\} \text{ est atteint.}$$

La difficulté principale dans la démonstration de (3) provient du fait que la fonction $u \longmapsto \|u\|_{L^{p+1}}$ n'est pas continue pour la convergence faible dans H^1_o. Pour contourner cette difficulté on prouve d'abord que

$$(4) \qquad S_\lambda < S_o \qquad \forall \lambda > 0 \qquad \text{si } n \geqslant 4 ,$$

(avec la modification naturelle si $n = 3$). On notera que

$$S_o = \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in H^1_o \\ \|u\|_{L^{p+1}} = 1}} \left\{ \int |\nabla u|^2 \right\}$$ est la meilleure constante de Sobolev pour l'injection $H^1_o \subset L^{p+1}$. A cet effet on suit une idée introduite par Th. Aubin [1] dans le contexte de la conjecture de Yamabe : on évalue le quotient

$$Q_\lambda(u) = \frac{\int |\nabla u|^2 - \lambda \int |u|^2}{\|u\|^2_{L^{p+1}}}$$

pour

$$(5) \qquad u(x) = u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \qquad \varepsilon > 0$$

où $\varphi \in \mathcal{D}_+(\Omega)$, $\varphi \not\equiv 0$ et on fait un développement limité en ε. Les fonctions $(\varepsilon + |x|^2)^{-\frac{n-2}{2}}$ jouent un rôle spécial car ce sont les fonctions extrémales pour les inégalités de Sobolev dans $\mathbb{R}^n$.

En ce qui concerne la partie non-existence on utilise une méthode "à la Pohozaev" : c'est à dire multiplication de (2) par u et $\sum x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$; la nouveauté étant qu'il faut introduire des poids [(1)] avant d'intégrer.

En ce qui concerne le problème général (1), je me contenterai de citer un exemple :

On considère le problème

$$(6) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^p + \mu u^q & \text{sur } \Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $p = (n+2)/(n-2)$, $1 < q < p$ et $\mu > 0$ est une constante.

Théorème 3 : On suppose que $n \geqslant 4$, alors (6) admet une solution pour tout $\mu > 0$.

A nouveau, on rencontre de sérieuses difficultés lorsque $n = 3$:

Théorème 4 : On suppose que $n = 3$ (et $p = 5$)

a) si $3 < q < 5$, alors (6) admet une solution pour tout $\mu > 0$

b) si $1 < q \leqslant 3$, alors (6) admet une solution uniquement lorsque μ est assez grand [(2)].

La démonstration de ces résultats utilise une combinaison d'ingrédients topologiques et d'analyse "concrète". On commence par un résultat géométrique, qui est une variante du lemme du col d'Ambrosetti-Rabinowitz, mais sans la condition (PS) [(3)] .

Théorème 5 : Soit Φ une fonction de classe C^1 sur un Banach E. On suppose que

a) Il existe des constantes ρ et r telles que

$$\Phi(u) \geqslant \rho \quad \forall u \in E \quad \text{avec } \|u\| = r > 0.$$

---

(1) assez compliqués lorsque $n = 3$!

(2) ceci est prouvé rigoureusement pour $1 < q < 3$ et suggéré par l'ordinateur si $q = 3$.

(3) qui est une condition de compacité non satisfaite dans notre problème.

b) $\Phi(0) < \rho$ et $\Phi(v) < \rho$ pour un certain v, $\|v\| > r$. On pose

$$c = \operatorname*{Inf}_{P \in \mathcal{P}} \ \operatorname*{Max}_{w \in P} \ \Phi(w) \geq \rho$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des chemins joignant 0 à v.

Alors il existe une suite (u_j) dans E telle que $\Phi(u_j) \to c$ et $\Phi'(u_j) \to 0$.

Quand on applique le théorème 5 au problème (6) on prend $E = H_0^1(\Omega)$ et

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}\int |u|^{q+1} .$$

L'hypothèse a) est satisfaite si l'on choisit r assez petit et l'hypothèse b) est satisfaite si l'on prend v "assez grand". Toute la difficulté consiste à exploiter la conclusion du Théorème 5 et à passer à la limite dans la suite (u_j). A cet effet on établit que <u>si</u>

(7) $$c < \frac{1}{n} S^{n/2}$$

alors on peut passer à la limite : $u_j \longrightarrow u$ faiblement dans H_0^1 et u n'est <u>pas identiquement nul</u> (c'est le danger "mortel" qu'il faut éviter).

On est donc ramené à la question : est-il possible de trouver un v qui vérifie b) et tel que le c correspondant vérifie (7). Cette dernière étape est assez technique ; il faut choisir des <u>v spéciaux</u> de la forme (5) .

<u>PROBLEME II</u>

Le problème géométrique se ramène à un système elliptique.
Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < 1\}$. On cherche une fonction $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant

(8) $$\Delta u = 2H \, u_x \wedge u_y \qquad \text{sur } \Omega$$

avec la <u>condition de Plateau</u>

(9) $$\begin{cases} |u_x|^2 - |u_y|^2 = u_x . u_y = 0 & \text{sur } \Omega \\ u(\partial\Omega) = \Gamma \text{ et } u \text{ est croissante sur } \partial\Omega & \end{cases}$$

où $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe de Jordan régulière orientée. On peut aussi envisager la condition de Dirichlet

(10) $$u = \gamma \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

où γ est une fonction donnée sur $\partial\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, γ non identiquement constante. On suppose que Γ (resp. $\gamma(\partial\Omega)$) sont contenus dans une boule de rayon R. Le résultat principal est le suivant

Théorème 6 : On suppose que $H < \frac{1}{R}$, alors il existe au moins 2 solutions du problème (8) - (9) (resp. (8) - (10)).

Le principe de la démonstration est le suivant. On commence par rappeler l'existence d'une première solution $\underline{u}$ due à Hildebrandt [4] (c'est la "petite" solution). On cherche ensuite une deuxième solution sous la forme $u = \underline{u} + v$, de sorte que v vérifie

(11) $$\begin{cases} \mathcal{L}v = -\Delta v + 2H(\underline{u}_x \wedge v_y + v_x \wedge \underline{u}_y) = -2H(v_x \wedge v_y) & \text{sur } \partial\Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(pour simplifier on envisage ici seulement (8)-(10)).

Ce problème ressemble beaucoup au problème (2). Il a une structure variationnelle, à savoir :

1) l'opérateur $\mathcal{L}$ qui est auto-adjoint correspond à la fonctionnelle $\frac{1}{2}(\mathcal{L}v,v)$ avec

$$(\mathcal{L}v,v) = \int |\nabla v|^2 + 4H\int \underline{u}\cdot(v_x \wedge v_y),$$

2) le terme non linéaire $v_x \wedge v_y$ est la dérivée (de Fréchet) de la fonctionnelle de volume $\frac{1}{3}Q(v)$ où $Q(v) = \int v\cdot(v_x \wedge v_y)$.

Les solutions non nulles de (11) correspondent aux points critiques non triviaux de la fonctionnelle $(\mathcal{L}v,v) + \frac{4H}{3}Q(v)$. Comme précédemment, il revient au même de chercher les points critiques de $(\mathcal{L}v,v)$ sur la "variété" $Q(v) = 1$ et d'éliminer ensuite le multiplicateur de Lagrange. En fait on prouve que

(12) $$\operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1_o \\ Q(v)=1}} (\mathcal{L}v,v) \quad \text{est atteint.}$$

A cet effet on commence par vérifier que

(13) $$(\mathcal{L}v,v) \geqslant \delta \|v\|^2_{H^1_o} \qquad \forall v \in H^1_o \quad \text{avec} \quad \delta > o.$$

La difficulté essentielle dans la démonstration de (12) provient de ce que $Q(v)$ n'est pas continu pour la convergence faible dans H^1_o. Pour contourner cette difficulté on utilise la même approche qu'au Problème I. On considère l'inégalité isopérimétrique

(14) $$\int |\nabla v|^2 \geqslant S|Q(v)|^{2/3} \qquad \forall v \in H^1_o$$

(avec la meilleure constante $S = \operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1_o \\ Q(v)=1}} \{\int |\nabla v|^2\}$) qui joue ici le même rôle que l'inégalité de Sobolev pour le Problème I. On établit ensuite que

(15) $$\operatorname*{Inf}_{\substack{v \in H^1_o \\ Q(v)=1}} (\mathcal{L}v,v) < S .$$

(à nouveau il faut faire intervenir les fonctions extrémales pour l'inégalité isopérimétrique (14) dans $\mathbb{R}^2$ tout entier et un développement limité en ε).

Enfin on prouve (12). Pour les détails voir [2].

---

[1] Th. Aubin : Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. 55 (1976) p. 269-296.

[2] H. Brezis J. M. Coron : Sur la conjecture de Rellich pour les surfaces à courbure moyenne prescrite, C. R. Acad. Sc. 295 (1982), p. 615-618 et Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture. A paraître.

[3] H. Brezis, L. Nirenberg : Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. A paraître.

[4] S. Hildebrandt : On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature. Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) p. 97-114.

[5] P. L. Lions : On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. SIAM Review 24 (1982) p. 441-467.

* * *
*