

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

X. SAINT-RAYMOND

Autour du théorème de Holmgren sur l'unicité de Cauchy

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 17,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A17_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

AUTOUR DU THEOREME DE HOLMGREN SUR L'UNICITE DE CAUCHY

par X. SAINT-RAYMOND

(Université Paris XI)

Exposé n°XVII

15 Mai 1984

Dans cet exposé, nous présentons quelques propriétés géométriques s'appliquant à l'étude de l'unicité de Cauchy et précisant les résultats obtenus à partir du théorème de Holmgren et de quelques autres qui lui sont reliés ; les démonstrations détaillées paraîtront ultérieurement.

Nous nous donnons, au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ une fonction $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles telle que $d\varphi(x_0) \neq 0$. Le problème - cadre que nous posons est le suivant : existe-t-il au voisinage de x_0 une distribution $u \in \mathcal{K}$ vérifiant

$$(*) \quad \begin{cases} Pu = 0 \text{ et} \\ x_0 \in \text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\} ? \end{cases}$$

Les deux situations que nous envisagerons ici sont les suivantes :

Cas "analytique" : P est un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques au voisinage de x_0 et $\mathcal{K} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Cas " C^∞ " : P est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre à coefficients (complexes) C^∞ vérifiant la condition de résolubilité locale (P) dans un voisinage de x_0 (cf.[4]) et $\mathcal{K} = H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

Dans ces deux situations, nous disposons d'un "théorème de Holmgren", à savoir le théorème de Holmgren classique dans le cas analytique, et le théorème 1 de Strauss et Trèves [4] dans le cas C^∞ , qui s'énoncent tous deux : "si $p(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$, le problème (*) n'admet pas de solution" (dans cet énoncé, p désigne le symbole principal de l'opérateur P). Nous allons traiter ici les cas où $p(x_0, d\varphi(x_0)) = 0$.

§ 1. Théorie de Bony - Sjöstrand (propagation microlocale du support)

Pour toute précision sur ces questions, nous renvoyons à Sjöstrand [3].

Définition : soit F un fermé de \mathbb{R}^n ; on dit que $(x, \xi) \in N^*F \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ s'il existe $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\xi = \pm d\psi(x)$ et $x \in F \subset \{y \in \mathbb{R}^n / \psi(y) \geq \psi(x)\}$

Dans l'énoncé suivant, $C^\infty(\Omega)$ désigne l'anneau des fonctions C^∞ définies dans Ω et à valeurs réelles.

Théorème A (Bony-Sjöstrand) : soient F un fermé de \mathbb{R}^n et Ω un ouvert conique de $T^*\mathbb{R}^n$. Alors :

1. Si $(x_0, \xi_0) \in N^*F \cap \Omega$ et si $p \in C^\infty(\Omega)$ s'annule sur $N^*F \cap \Omega$, la bicaractéristique de p issue de (x_0, ξ_0) est localement contenue dans N^*F .

2. $\mathcal{N}_{N^*F}(\Omega) = \{p \in C^\infty(\Omega) / p|_{N^*F \cap \Omega} = 0\}$ est un idéal de $C^\infty(\Omega)$ stable par crochets de Poisson.

Définition : soient Ω un ouvert conique de $T^*\mathbb{R}^n$ et $p \in C^\infty(\Omega)$ une fonction à valeurs complexes. On note $\Sigma(p, \Omega)$ la réunion des parties coniques $\Gamma \subset \Omega \cap p^{-1}(0)$ telles que $\mathcal{N}_\Gamma(\Omega)$ soit stable par crochets de Poisson.

Remarques : $\Sigma(p, \Omega)$ est un fermé conique de Ω contenu dans $p^{-1}(0)$; l'idéal $I(p, \Omega) = \mathcal{N}_{\Sigma(p, \Omega)}(\Omega)$ est stable par crochets de Poisson, et donc si $\Sigma(p, \Omega)$ est une variété, c'est une variété involutive.

Exemples de calcul de $\Sigma(p, \Omega)$:

1. Soient $p(t, x_1, x_2; \tau, \xi_1, \xi_2) = \tau\xi_1 + ix_1\xi_2^2$ et $\Omega = \{\tau > 0\}$.

Alors $p^{-1}(0) \cap \Omega = \{\tau > 0, \xi_1 = x_1 \xi_2 = 0\}$. Les fonctions ξ_1 et $x_1 \xi_2$ s'annulent sur $p^{-1}(0)$, donc sur $\Sigma(p, \Omega)$, et leur crochet de Poisson aussi, qui vaut ξ_2 ; on peut donc écrire $\Sigma(p, \Omega) \subset \{\tau > 0, \xi_1 = \xi_2 = 0\}$ et comme cette dernière est une variété involutive, il y a égalité.

2. Soient $p(t, x_1, x_2; \tau, \xi_1, \xi_2) = \tau\xi_1 + x_2^2 \tau^2 + \xi_2^2 + it \tau^2$ et $\Omega = \{\tau > 0\}$.

Utilisant la même méthode, les fonctions suivantes s'annulent sur $\Sigma(p, \Omega)$:

$$\left. \begin{array}{l} \tau\xi_1 + x_2^2 \tau^2 + \xi_2^2 \\ t\tau^2 \end{array} \right\} \longrightarrow \xi_1 + 2\tau x_2^2 \longrightarrow x_2^2 \longrightarrow \xi_1 \longrightarrow \xi_2^2 \longrightarrow \xi_2 \longrightarrow 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} t \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad} x_2$$

Si donc la fonction 1 s'annule sur $\Sigma(p, \Omega)$, c'est que $\Sigma(p, \Omega) = \emptyset$.

Combiné avec le "théorème de Holmgren", le théorème A permet d'énoncer le

Théorème B (Bony-Sjöstrand) : supposons qu'il existe un voisinage conique Ω de $(x_0, d\varphi(x_0))$ tel que l'une des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

(i) $(x_0, d\varphi(x_0)) \notin \Sigma(p, \Omega)$.

(ii) il existe une variété involutive $\Sigma \supset \Sigma(p, \Omega) \ni (x_0, d\varphi(x_0))$ telle que tout voisinage de $(x_0, d\varphi(x_0))$ sur la feuille bicaractéristique Σ^* passant par $(x_0, d\varphi(x_0))$ sorte de $\{(x, \xi) \in \Sigma(p, \Omega) / \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$.

Alors il y a unicité de Cauchy (i.e. le problème (*) n'admet pas de solution).

Exemples : notons (t, x_1, x_2) les points de \mathbb{R}^3 , et regardons près de $x_0 = (0, 0, 0)$ les problèmes suivants :

1. $P = D_t D_{x_1} + x_2^2 D_t^2 + D_{x_2}^2 + it D_t^2$ et $\varphi(t, x_1, x_2) = t$. Alors $\Omega =$

$\{\tau > 0\}$ est un voisinage conique de $(x_0, d\varphi(x_0))$, et le calcul effectué à l'exemple 2 ci-dessus montre qu'on est dans le cas (i) du théorème B.

2. $P = D_t D_{x_1} + ix_1 D_{x_2}^2$ et $\varphi(t, x_1, x_2) = t - e^{-1/x_2^2}$. Alors $\Omega = \{\tau > 0\}$

est un voisinage conique de $(x_0, d\varphi(x_0))$ et le calcul effectué en exemple 1 ci-dessus montre que la variété involutive $\Sigma = \{\xi_2 = 0\}$ contient $\Sigma(p, \Omega)$.

La feuille bicaractéristique Σ^* a pour équation paramétrique

$t = x_1 = \xi_1 = \xi_2 = 0$, $x_2 = s$, $\tau = 1$ (s paramètre voisin de 0) ; pour tout $s \neq 0$, $\varphi(0, 0, s) < 0 = \varphi(x_0)$. On est donc dans le cas (ii) du théorème B.

Cette théorie a été construite pour traiter le cas analytique, mais comme nous l'avons observé dès le début, elle s'applique aussi bien au cas C^∞ grâce au théorème 1 de Strauss et Trèves [4]. Comparons le résultat obtenu ainsi au classique théorème d'unicité de Hörmander sous les hypothèses que P est principalement normal et que la surface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ est pseudo-convexe. L'hypothèse que nous faisons ici de la condition (P) est plus faible que l'hypothèse P principalement normal. Pour comparer les hypothèses de pseudo-convexité, plaçons-nous dans le cas $P = X + iY$ où X et Y sont deux champs réels linéairement

indépendants en x_0 et vérifiant : $X\varphi(x_0) = Y\varphi(x_0) = 0$, et $[X, Y] = 0$ au voisinage de x_0 (P est alors principalement normal) ; le théorème d'Hörmander prouve l'unicité si $(X^2 + Y^2) \varphi(x_0) < 0$, et la théorie de Bony - Sjöstrand permet d'obtenir cette propriété dès qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $(\alpha X + \beta Y)^k \varphi(x_0) < 0$. (On remarquera qu'il suffit par exemple que $X^2 \varphi(x_0) < 0$).

§ 2 . Réciproques au théorème d'unicité.

Dans le cas analytique, Zachmanoglou [6] a montré que pour les opérateurs non dégénérés du premier ordre la condition suffisante d'unicité obtenue au théorème B est aussi nécessaire. Nous allons maintenant donner des réciproques plus générales, mais séparément pour chacun des deux cas ; malheureusement, la technique que nous employons dans le cas analytique, qui consiste à utiliser les constructions de Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [1], ne nous fournit que des solutions dont le support est un demi-espace ; cela nous conduit à ajouter quelques hypothèses que nous discutons après l'énoncé du théorème 1 .

Théorème 1 : Supposons que nous sommes dans le cas analytique, que $d_{\xi} p(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$, et qu'il existe un voisinage conique Ω de $(x_0, d\varphi(x_0))$ tel que

- (Rg) $\Sigma(p, \Omega)$ est une variété (involutive) analytique passant par (x_0, ξ_0) ;
- (Tr) $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))$, la feuille bicaractéristique passant par $(x_0, d\varphi(x_0))$, est transverse aux fibres (i.e. $\forall f \in I(p, \Omega) = \mathcal{N}_{\Sigma(p, \Omega)}(\Omega)$, $df(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0 \implies d_{\xi} f(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$) ;

(Sj) $\varphi|_{\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))} \geq \varphi(x_0)$;

(Za) il existe $C > 0$ telle que $|d\varphi \wedge \xi \cdot dx| \leq C |\varphi - \varphi(x_0)|^{1/2}$ sur $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))$.

Sous les hypothèses précédentes, il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ solution du problème (*). De plus, u est analytique à l'intérieur de $\text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \geq \psi(x_0)\}$ avec ψ analytique et $d\psi(x_0) \neq 0$.

Commentaires : les hypothèses sont géométriques et indépendantes de l'équation φ choisie pour caractériser le demi-espace $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$; ce théorème contient le théorème 2 de Saint Raymond [2] ainsi que les

théorèmes de Zachmanoglou [5] (cas p réel) qu'il prolonge. L'hypothèse (Rg) empêche l'application du théorème B sous la condition (i), et l'hypothèse (Sj) est nécessaire d'après le théorème B sous la condition (ii). Les hypothèses (Tr) et (Za) sont liées à la technique que nous utilisons : elles sont nécessaires pour que le support de la solution soit un demi-espace. En effet, nous avons les résultats suivants :

Théorème 2 : supposons qu'il existe un voisinage conique Ω de $(x_0, d\varphi(x_0))$ et une fonction $f \in I(p, \Omega)$ telle que $d_{\xi} f(x_0, d\varphi(x_0)) = 0$ mais $(df \wedge \xi \cdot dx)(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$. Alors le problème (*) n'admet aucune solution dont le support soit $\{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \geq \psi(x_0)\}$ avec $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $d\psi(x_0) \neq 0$.

Théorème 3 : supposons qu'il existe un voisinage conique Ω de $(x_0, d\varphi(x_0))$ tel que (Rg), (Tr) et (Sj) soient vérifiées, mais (Za) n'est vérifiée dans aucun voisinage de $(x_0, d\varphi(x_0))$ sur $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))$. Alors, même conclusion qu'au théorème précédent.

Exemple : au voisinage de l'origine de \mathbb{R}^4 dont les points sont notés (t, x_1, x_2, x_3) , $p = \tau \xi_1 + ix_1 \xi_2^2$ et $\varphi = t + x_1^4 + x_2^4 + x_1 x_2 x_3$; avec $\Omega = \{\tau > 0\}$, $\Sigma(p, \Omega) = \{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$ et $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0)) = \{t = x_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0; \tau = 1\}$: les hypothèses (Rg) et (Tr) sont vérifiées ; $\varphi|_{\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))} = x_1^4 + x_2^4 \geq 0 = \varphi(x_0) \Rightarrow$ (Sj) est vérifiée ; enfin, $(d\varphi \wedge \xi \cdot dx)|_{\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))} = 4x_1^3 dx_1 \wedge dt + 4x_2^3 dx_2 \wedge dt + x_1 x_2 dx_3 \wedge dt$ et $|x_1 x_2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1^4 + x_2^4)^{1/2} \Rightarrow$ (Za) est vérifiée ; il y a donc non-unicité par le théorème 1. En revanche si nous conservons le même symbole et prenons $\varphi = t + x_1^4 + x_1 x_2 x_3$, (Rg), (Tr) et (Sj) sont toujours vérifiées, mais pas (Za) : on peut appliquer le théorème 3.

Le théorème 1 possède l'équivalent suivant pour le cas C^∞ (nous avons pu supprimer ici l'hypothèse (Za) en supprimant $d\psi(x_0) \neq 0$ dans la conclusion grâce à l'ordre 1 de l'équation) :

Théorème 4 : supposons que nous sommes dans le cas C^∞ , que $d_{\xi} p(x_0) \neq 0$ et qu'il existe un voisinage conique Ω de $(x_0, d\varphi(x_0))$ tel que

- (Rg) $\Sigma(p, \Omega)$ est une variété (involutive) C^∞ passant par $(x_0, d\varphi(x_0))$;
 (Tr) $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))$ est transverse aux fibres ;
 (Sj) $\varphi|_{\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))} \geq \varphi(x_0)$.

Sous les hypothèses précédentes et pour tout $s \geq 1$, il existe au voisinage de x_0 une fonction $u \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^n)$ solution du problème (*).

Commentaires : signalons que, bien que le problème soit C^∞ , nous traitons l'opérateur P lui-même sans le perturber. Pour les hypothèses (Rg) et (Sj), voir le commentaire du théorème 1 ; l'exemple $p = \xi_1 + ix_2^\tau$, $\varphi = t$ dans \mathbb{R}^3 montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse (Tr) sans la remplacer par autre chose : en effet, on peut prouver par la théorie de Bony-Sjöstrand que toute solution du problème (*) vérifie $\text{supp } u \subset \{x_2 = 0\}$, et 0 est la seule fonction H_{loc}^1 possédant un tel support !

§ 3. Régularité de $\Sigma(p, \Omega)$

Nous allons discuter dans ce paragraphe l'hypothèse (Rg) du théorème 4 . S'il était nécessaire de demander que $(x_0, d\varphi(x_0)) \in \Sigma(p, \Omega)$ (car sinon on peut appliquer le théorème B sous la condition (i)), fallait-il demander que $\Sigma(p, \Omega)$ soit une variété régulière ? Pour commencer de répondre à cette question, nous allons regarder un exemple relevant du cas C^∞ .

Il est aisé de construire sur \mathbb{R} une fonction f positive, C^∞ , paire, et telle que $f|_{\mathbb{R}^+}$ s'annule exactement sur "l'ensemble de Cantor" (i.e. l'ensemble de tous les réels de $[0,1]$ admettant au moins une écriture en base 3 n'utilisant pas le chiffre 1) ; dans \mathbb{R}^2 dont les points seront notés (t, x) , prenons près de l'origine $p = \xi + i\tau(t^2 + f(x))$ et $\varphi = t + x^2$; si $\Omega \subset \{\tau > 0\}$, on a $\Sigma(p, \Omega) = \{\xi = t = f(x) = 0\}$ qui est contenu dans la variété involutive $\Sigma = \{\xi = 0\}$; or la bicaractéristique de Σ issue de $(x_0, d\varphi(x_0))$ ne reste pas dans $\Sigma(p, \Omega)$ (car il existe des x arbitrairement petits tels que $f(x) \neq 0$) : on peut donc appliquer le théorème B sous la condition (ii).

Ainsi, il y a deux façons d'appliquer le théorème B sous la condition (ii) :

1 - Lorsque Σ^* pénètre dans la zone où $\varphi(x) < \varphi(x_0)$; il s'agit alors d'un théorème de propagation du support : $x_0 \in \text{supp } u$ si et seulement

si d'autres points x avec $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ sont dans $\text{supp } u$, d'où le théorème d'unicité.

2 - Lorsque Σ^* sort de $\Sigma(p, \Omega)$ cas illustré par l'exemple ci-dessus ; la "morale" du théorème est alors moins claire. Afin de comprendre davantage le phénomène observé, nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 5 : soient F un fermé de \mathbb{R}^n et $(x_0, \xi_0) \in N^*F$. Alors $\dim_{(x_0, \xi_0)} N^*F = n$. (ici, $\dim_{(x_0, \xi_0)}$ désigne la dimension de Hausdorff au point (x_0, ξ_0)).

Corollaire : s'il existe un voisinage conique Ω de $(x_0, d\varphi(x_0))$ tel que $\dim_{(x_0, d\varphi(x_0))} \Sigma(p, \Omega) < n$, alors il y a unicité de Cauchy (i.e. le problème $(*)$ n'admet pas de solution).

Commentaires : le théorème 5 établit une nouvelle propriété commune aux lagrangiennes et aux fibrés N^*F à ranger aux côtés du théorème A. Le corollaire étend le théorème B sous la condition (i) dans le cas où $\Sigma(p, \Omega)$ n'est pas une variété (si $\Sigma(p, \Omega)$ est une variété, elle est involutive et donc de dimension $\geq n$), mais nous ne savons pas s'il permet de traiter des cas ne vérifiant ni la condition (i) ni la condition (ii).

Exemple : reprenant l'exemple ci-dessus, nous calculons que $\dim \Sigma(p, \Omega) = 1 + \text{Log } 2 / \text{Log } 3 < 2$; la propriété d'unicité résulte donc du corollaire.

Nous pouvons maintenant "interpréter" le phénomène : si le problème $(*)$ n'admet pas de solution, c'est que $\Sigma(p, \Omega)$ n'est pas assez "gros" pour contenir un N^* $\text{supp } u$.

§ 4 . Aperçu des démonstrations

Th.1 : • Choix des coordonnées locales : par les hypothèses (Rg) et (Tr), il existe des coordonnées locales $x' = (x_1, \dots, x_r)$, $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$ et x_n telles que $(x_0, d\varphi(x_0)) = (0, 0, 0; 0, 0, 1)$ et $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0)) = \{x'' = x_n = \xi'' = \xi_n = 0, \xi_n = 1\}$.

• Construction de la fonction Ψ : avec ces coordonnées, on pose

$$(1) \quad \Psi(0, x'', x_n) = x_n - 2C(|x''|^2 + x_n^2), \quad C > 0 \text{ à fixer,}$$

et on prolonge Ψ analytiquement à un voisinage de l'origine en requérant

que $(x, d\psi(x)) \in \Sigma(p, \Omega)$; comme cette dernière est conique, par la formule d'Euler,

$$(2) \quad \psi(x', 0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad d\psi(x', 0, 0) = (0, 0, 1)$$

• Construction de la solution : comme $\Sigma(p, \Omega) \subset p^{-1}(0)$, on a $p(x, d\psi(x)) = 0$; comme $d_{\xi} p(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$, on peut utiliser la construction du corollaire 1.1 de Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [1] pour obtenir une solution de $Pu = 0$ dont le support soit localement $\text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \geq 0\}$.

• Vérifications géométriques : il reste à montrer que

$$(3) \quad \{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \leq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$$

or d'après (1) et (2), $\{\psi(x) = 0\} \cap \{x'' = 0\}$ est la projection sur la base de $\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0))$, et la propriété (3), pour $x'' = 0$, découle donc de l'hypothèse (Sj) ; pour des valeurs non nulles de x'' , c'est l'hypothèse (Za) qui permettra de montrer qu'on peut choisir C suffisamment grande dans (1) pour que $\{\psi(x) = 0\}$ évite les "vagues" éventuelles de $\{\varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ (dans les coordonnées choisies), ce qui assure (3).

Th.2 et 3 : dans chacun des deux cas, soit u une solution du problème (*) vérifiant $\text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \geq \psi(x_0)\}$ avec $\psi \in C^2$ et $d\psi(x_0) \neq 0$. Alors par la théorie de Bony-Sjöstrand,

$$(4) \quad \{(x, \lambda d\psi(x)) \in \Omega / \psi(x) = \psi(x_0) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^k\} = (N^* \text{supp } u \cap \Omega) \subset \Sigma(p, \Omega)$$

Si $f \in I(p, \Omega)$, f s'annule sur $\Sigma(p, \Omega)$ et donc sur le membre de gauche de (4) ; si de plus $d_{\xi} f(x_0, d\varphi(x_0)) = 0$, on obtient par développement limité

$$\psi(x) = \psi(x_0) \implies d_x f(x_0, d\varphi(x_0)) \cdot (x - x_0) = O(|x - x_0|^2),$$

ce qui contredit l'hypothèse $(df \wedge \xi \cdot dx)(x_0, d\varphi(x_0)) \neq 0$ du théorème 2 (car $d\varphi(x_0)$ et $d\psi(x_0)$ sont linéairement dépendants).

Pour démontrer le théorème 3, il faut d'abord remarquer que le théorème A et la formule (4) impliquent que

$$\Sigma^*(x_0, d\varphi(x_0)) \subset \{(x, \lambda d\psi(x)) \in \Omega / \psi(x) = \psi(x_0) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^*\} .$$

En utilisant les hypothèses (Rg) et (Tr) on peut trouver des coordonnées locales comme dans la démonstration du théorème 1, puis en utilisant (Sj) et en niant (Za), on construit une suite de points $m_j \rightarrow x_0$ tels que $\psi(m_j) = \psi(x_0)$ et $\varphi(m_j) < \varphi(x_0)$, ce qui contredit que $\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$.

Th.4 : de par sa définition, $\Sigma(p, \Omega)$ est involutive et donc feuilletée, et grâce à l'hypothèse (Tr) on peut en déduire un feuilletage de la base \mathbb{R}^n par projection (plusieurs feuilletages sont en principe possibles); on tire de l'hypothèse (Sj) que la feuille passant par x_0 est tangente à l'hypersurface d'équation $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, et donc on peut trouver des coordonnées locales (x', x'', x_n) avec $(x_0, d\varphi(x_0)) = (0, 0, 0; 0, 0, 1)$ et telles que les feuilles de la base aient pour équations : $x'' = \text{constante}$ et $x_n = \text{constante}$.

Ecrivons maintenant $P = X + c$; X étant la projection sur $T\mathbb{R}^n$ de H^s_p , c est un champ tangent aux feuilles, et $X\psi = 0$ si $\psi(x) = x_n^3 - |x''|^2$. Si nous prenons $v \in H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telle que $Xv = c$ (ce qui est possible puisque par $d_{\xi} p(x_0) \neq 0$ et par la condition (P), X est localement résoluble), nous pouvons choisir comme solution la fonction $u(x)$ définie par

$$\begin{cases} u(x) = \exp(-v(x) - [1/\psi(x)]) & \text{si } \psi(x) > 0, \\ u(x) = 0 & \text{si } \psi(x) \leq 0. \end{cases}$$

Clairement, on a $u \in H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (pourvu que $s > n/2$), $Pu = 0$ et $\text{supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \geq 0\}$. Il est alors très facile avec l'hypothèse (Sj) de montrer que $\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$.

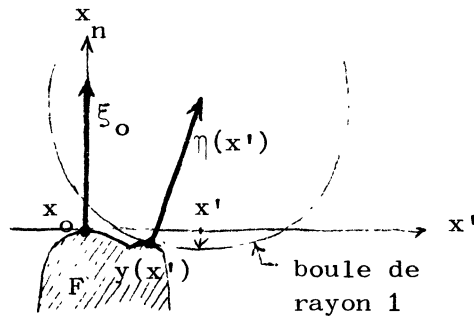
Th.5 : comme N^*F est conique, pour démontrer que $\dim_{(x_0, \xi_0)} N^*F \geq n$, il suffit de démontrer que $\dim_{(x_0, \xi_0)} \{(x, \xi) \in N^*F / |\xi| = 1\} \geq n-1$. Pour cela nous utiliserons le

Lemme : soient E et F deux parties de \mathbb{R}^d ; supposons qu'il existe une application $f : E \rightarrow F$ qui vérifie $|f(x) - f(y)| > \varepsilon |x - y|$ pour un $\varepsilon > 0$

(les valeurs absolues désignent la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d). Alors $\dim F \geq \dim E$.

Ce lemme se démontre facilement à l'aide de la définition de la dimension de Hausdorff.

Soit alors ψ telle que $\xi_0 = -d\psi(x_0)$ et $x_0 \in F \subset \{x \in \mathbb{R}^n / \psi(x) \geq \psi(x_0)\}$. Prenons $x_n = \psi(x_0) - \psi(x)$ et complétons le système de coordonnées par $(x_1, \dots, x_{n-1}) = x'$. Définissons $f : B(x_0, \frac{1}{2}) \cap \{x_n = 0\} \rightarrow N^*F \cap \{|\xi| = 1\}$ par $f(x') = (y(x'), \eta(x'))$ comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



Alors :

1. f est continue en x_0 et $f(x_0) = (x_0, \xi_0)$, si bien que pour tout voisinage Ω de (x_0, ξ_0) il existe un voisinage ω de x_0 dans \mathbb{R}^{n-1} tel que $f(\omega) \subset (\Omega \cap N^*F \cap \{|\xi| = 1\})$.

2. $|f(x'_1) - f(x'_2)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |x'_1 - x'_2|$ et donc on peut appliquer le lemme : pour tout voisinage Ω de (x_0, ξ_0) , $\dim(\Omega \cap N^*F \cap \{|\xi| = 1\}) \geq \dim \omega = n-1$, d'où finalement $\dim_{(x_0, \xi_0)} N^*F \geq n$. L'inégalité se montre de la façon suivante : notons $y(x') = (y'(x'), y_n(x'))$ et $\eta(x') = (x' - y'(x'), \eta_n(x'))$; alors

$$\begin{aligned} |f(x'_1) - f(x'_2)|^2 &\geq |y'(x'_1) - y'(x'_2)|^2 + |x'_1 - y'(x'_1) - x'_2 + y'(x'_2)|^2 = \\ &= \sqrt{2} |y'(x'_1) - y'(x'_2)| - \frac{1}{\sqrt{2}} |x'_1 - x'_2|^2 + \frac{1}{2} |x'_1 - x'_2|^2 \geq \frac{1}{2} |x'_1 - x'_2|^2 \end{aligned}$$

Enfin, l'autre inégalité $\dim_{(x_0, \xi_0)} N^*F \leq n$ se montre de la même façon en construisant des applications $f : N^*F \rightarrow \mathbb{R}^n$ du type considéré dans le lemme.

Références :

- [1] Baouendi M.S., Trèves F. et Zachmanoglou E.C. : Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients. Duke math. J. 46, 409-440 (1979).
- [2] Saint-Raymond X. : Non unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux, à paraître dans Indiana Univ. Math.J. (1984).
- [3] Sjöstrand J. : Singularités analytiques microlocales. Astérisque n°95 (1982).
- [4] Strauss M. et Trèves F. : First order linear pde's and uniqueness in the Cauchy problem. J. of diff. equ.15, 195-209 (1974) (voir aussi Cardoso F. et Hounie J. : même titre. J. of diff. equ.33, 239-248 (1979)).
- [5] Zachmanoglou E.C. : Non-uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients. Arch. Rat. Mech. Anal. 27, 373-384 (1968).
- [6] Zachmanoglou E.C. : Propagation of zeroes and uniqueness in the Cauchy problem for first order partial differential equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 38, 178-188 (1970).