Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Robert

Approximation semi-classique de la phase de diffusion pour un potentiel (d'après un travail de D. Robert et H. Tamura)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 5, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 3 - 1 9 8 4

APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION POUR UN POTENTIEL

(d'après un travail de D. Robert et H. Tamura [15])

par D. ROBERT

Exposé n° V

13 Décembre 1983

AVERTISSEMENT :

Cet exposé présente les résultats obtenus dans [15] en collaboration avec H. Tamura (Université de Nagoya).

Ici nous donnerons seulement une esquisse des démonstrations des principaux résultats. Pour les démonstrations complètes, nous renvoyons le lecteur à l'article détaillé, [15], à paraître.

§ 1. INTRODUCTION - PRELIMINAIRES

Soient les hamiltoniens quantiques : $H_o(h) = h^2/2 \,.\, \Delta$ et $H(h) = H_o(h) + V$ où Δ est le laplacien sur $\mathbb{R}^3$, V est un potentiel que l'on suppose indéfiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^3$. En mécanique quantique on a $h = \frac{\hbar}{\sqrt{m}}$ où $\hbar$ est la constante de Planck et m la masse de la particule soumise au potentiel V. Dans la suite de cet exposé l'expression "h tend vers 0" signifiera donc que la masse de la particule devient très grande devant la constante de Planck : $\hbar = 6{,}625.10^{-34}$ Joule/seconde.

Les opérateurs $H(h)$ et $H_o(h)$ sont autoadjoints pour tout $h > 0$ et on a : $\mathrm{Dom}\, H(h) = \mathrm{Dom}\, H_o(h) = H^2(\mathbb{R}^3)$. La dynamique de la particule libre (resp. liée) est décrite par le groupe unitaire :

$U_o(t,h) = \exp(-ith^{-1}.H_o(h))$ (resp. $U(t,h) = \exp(-ith^{-1}.H(h))$.

Pour étudier la diffusion, on introduit les opérateurs d'onde :

$$(1) \qquad \Omega_{\pm}(h) = \lim_{t \to \pm\infty} [U(-t,h)\,.\,U_o(t,h)]$$

L'hypothèse $V \in C_o(\mathbb{R}^3)$ assure que (1) définit des opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}^3)$ sur le sous-espace absolument continu $\mathcal{H}_{ac}(h)$ de $H(h)$. On peut alors définir l'opérateur de diffusion :

$$(2) \qquad S(h) = \Omega_+^*(h)\,.\,\Omega_-(h)\,. \quad \text{(voir [13])}\,.$$

Interprétation de $\Omega_+(h)$, $\Omega_-(h)$ et $S(h)$:

Soit $f \in \mathcal{H}_{ac}(h)$. Il existe $f_\pm \in L^2(\mathbb{R}^3)$ telles que $\Omega_\pm(h)f_\pm = f$.

On a la relation :

(3) $$U(t,h).\Omega_\pm(h) = \Omega_\pm(h).U_o(t,h) \ .$$

Il résulte de la définition que l'on a :

(4) $$U(t,h)\Omega_\pm(h)g \sim U_o(t,h)g \ , \ t \to \pm\infty .$$

On a d'autre part :

(5) $$S(h).f_- = f_+ \ .$$

Autrement dit, $S(h)$ transforme un état asymptotique libre, lorsque $t \to -\infty$, en un état asymptotique libre lorsque $t \to +\infty$. $S(h)$ vérifie de plus :

(6) $$S(h).U_o(t,h) = U_o(t,h).S(h) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

On déduit de (6) que $S(h)$ commute à $f(H_o(h)$ pour toute fonction f borélienne et bornée sur $\mathbb{R}$.
Via la transformation de Fourier, on peut réaliser l'opérateur $H_o(h)$ comme étant l'opérateur de multiplication par la variable $\lambda > 0$ dans l'espace de Hilbert : $L^2(]0,+\infty[, L^2(S^2))$, où S^2 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.
D'après un théorème de Kuroda [7], dans cette réalisation, $S(h)$ opère de la manière suivante :

$$S(h)\ f(\lambda,\omega) = [S(\lambda,h).f(\lambda,.)](\omega)$$
$$\lambda > 0 \ , \ \omega \in S^2$$

où pour tout $\lambda > 0$, $S(\lambda,h)$ est un opérateur unitaire de $L^2(S^2)$. <u>$S(\lambda,h)$ est la matrice de diffusion à l'énergie λ</u>.

On peut exprimer la matrice de diffusion à l'aide des fonctions propres généralisées; posons : $\phi_o(x,\lambda,\omega;h) = \exp(ih^{-1}\sqrt{2\lambda} < x,\omega >) \quad h > 0 \ , \lambda > 0 \ , \omega \in S^2 \ , x \in \mathbb{R}^3$.

On a bien sûr : $$(H_o(h)-\lambda)\phi_o = 0 \ .$$

D'après le principe d'absorption-limite [7], on peut définir, pour $\lambda > 0$, les opérateurs : $R(\lambda\pm io;h) = \lim\limits_{\substack{z\to\lambda \\ \mathrm{Im}\, z \gtrless 0}} (H(h)-z)^{-1}$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^3, e^{+|x|}.dx), L^2(\mathbb{R}^3, e^{-|x|}.dx))$

(Ce résultat suffit ici).

On définit les fonctions propres généralisées de H(h) : $\phi_{\pm} = \phi_o - R(\lambda \pm io;h)V.\phi_o$
ϕ_+ (resp. ϕ_-) est la fonction propre sortante (resp. rentrante).

On montre alors que l'on a :

(7) $S(\lambda;h) = Id + T(\lambda;h)$ où $T(\lambda,h)$ est un opérateur intégral de noyau :

(8) $\mathcal{T}(\lambda,\theta,\omega;h) = C_o(\lambda)h^{-3}.\int \Phi_o(x,\lambda,\theta;)V(x)\phi_+(x,\lambda,\omega;)dx$ où $C_o(\lambda) = -i2^{-3/2}\pi^{-2}.\lambda^{1/2}$.

On déduit de (8) que $T(\lambda;h)$ est de classe trace et donc que det $S(\lambda;h)$ est bien défini.
La phase de diffusion $\theta(\lambda;h)$ vérifie :

(9) $$\det S(\lambda,h) = e^{2i\theta(\lambda,h)} .$$

La fonction $\theta(.,h)$ n'est pas bien définie par (9).
La théorie de Birman-Krein ([2],[3],[4]) permet de faire un choix canonique :

pour tout $h > 0$, il existe une fonction $\lambda \to s(\lambda;h)$, analytique réelle dans $]0,+\infty[$ possédant les propriétés suivantes :

(10) Pour $\lambda > 0$, on a : $\det S(\lambda;h) = e^{2i\pi s(\lambda,h)}$

(11) Pour $\lambda < 0$, $s(\lambda;h)$ est égal au nombre d'états bornés de H(h) dans $]-\infty,\lambda[$

(12) Pour toute $f \in C_o(\mathbb{R}^3)$, $f(h(h)-f(H_o(h))$ est de classe trace et on a :

$$\mathrm{tr}[f(H(h))-f(H_o(h))] = \int f(\lambda)s'(\lambda;h)d\lambda = -\int f'(\lambda)s(\lambda;h)d\lambda .$$

Dans la suite, nous appellerons phase de diffusion, la fonction $s(\lambda;h)$ vérifiant (10), (11), (12).

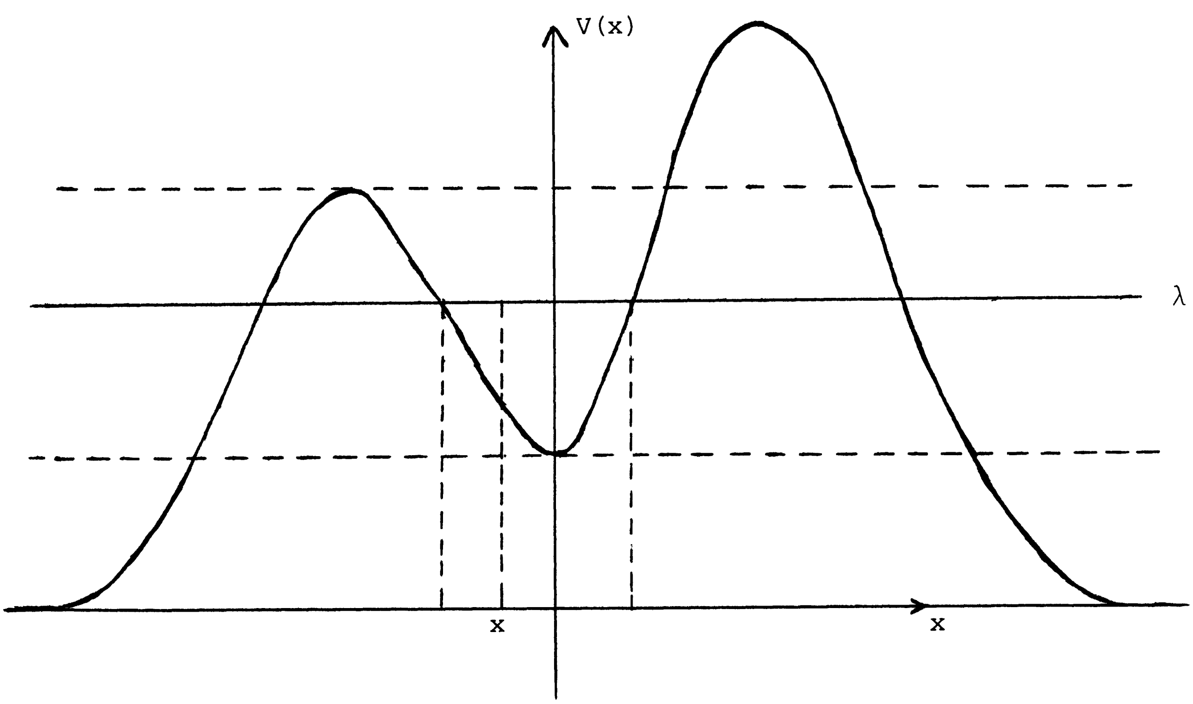
Cette fonction apparaît comme un prolongement naturel à $]0,+\infty[$ de la fonction de comptage des valeurs propres de H(h) définie dans $]-\infty,0[$.

Pour h fixé, $h = 1$, Colin de Verdière [3] a donné un développement asymptotique de $s(\lambda,1)$, $\lambda \to +\infty$.
Ce résultat a été généralisé en dimension quelconque par Guillopé [4](n impair) puis par Popov [12] (n quelconque).
Antérieurement, le cas de la diffusion par un obstacle a été traité par Majda-Ralston [8], Petkov-Popov [10] et Bardos-Guillot-Ralston [1] .

Dans ce travail nous fixons λ et nous déterminons le comportement de $s(\lambda;h)$ lorsque $h \to 0$.
Contrairement à une idée souvent répandue en physique, faire tendre h vers 0 n'est en général pas équivalent à faire tendre l'énergie λ vers $+\infty$.
Certes les deux situations présentent beaucoup d'analogies formelles mais les conditions de validité des résultats sont différentes (voir par exemple les travaux de Helffer-Robert [5],[6] sur le spectre discret).

On peut immédiatement se faire une idée sur cette différence de comportement en examinant la dynamique classique associée à l'hamiltonien quantique $H(h)$: cette dynamique est décrite par les courbes intégrales du champ hamiltonien : $\mathcal{H}_p = (\nabla_\xi p, - \nabla_x p)$ où $p(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$.

Désignons par $(x(t,y,\eta),\xi(t,y,\eta))$ la trajectoire de $\mathcal{H}_p$ de données initiales (y,η). Soit $\lambda > 0$ l'énergie de la particule. Si $\lambda > \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^3} V(x)$ on voit alors facilement que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t,y,\eta) = +\infty$.
Par contre, si $\lambda \in [\,\mathrm{Min}\, V(x), \mathrm{Max}\, V(x)]$ la particule peut être piégée par des barrières de potentiel.



Cette remarque naïve donne, à notre avis, une idée sur la différence qu'il y a entre les situations "$h \to 0$" et "$\lambda \to +\infty$".

Soit $J_o = [E_1, E_2] \subseteq]0,+\infty[$ un intervalle fixé.

On introduit l'hypothèse suivante :

$(N\text{-}P)_{J_o}$: Pour tout $R > 0$, il existe $T(R) > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t| > (R)$ et tout $(y,\eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $|y| < R$, $P(y,\eta) \in J_o$ on a : $|x(t,y,\eta)| > R$.

Ce type de condition intervient également dans l'étude de la phase de diffusion par un obstacle ("non-trapping condition" dans Majda - Ralston [8] et Petkov-Popov [10]).

§ 2. RESULTATS ET PREMIERS ARGUMENTS

Dans un premier temps on obtient un développement de $s'(\lambda;h)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus 0)$:

Théorème 1 : $s'(\lambda;h) \sim \sum\limits_{j \geqslant 0} h^{2j-3} \cdot T_{2j}(\lambda)$, $h \to 0$;

où $T_{2j}(\lambda) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus (0))$.

Les distributions T_{2j} ont la structure suivante :

$$< T_o, f > = (2\pi)^{-3} \quad \{f(x,\xi)) - f(p_o(\xi))\} \, d\xi dx \qquad (p_o(\xi) = |\xi|^2/2)$$

$$< T_{2j}, f > = (2\pi)^{-3} \sum_{k=2}^{3j} \iint P_{2j,k}(p^{(\alpha)}_{(\beta)}) \, f^{(k)}(p(x,\xi)) d\xi dx \quad , \quad j \geqslant 1$$

où $p^{(\alpha)}_{(\beta)} = \partial^\alpha_\beta \partial^\beta_\alpha p$ et $P_{2j,k}(p^{(\alpha)}_{(\beta)})$ est un polynôme universel des $p^{(\alpha)}_{(\beta)}$.

En particulier si $\lambda \neq 0$ et si λ n'est pas valeur critique de V, T_{2j} est C^∞ au voisinage de λ et on a :

$$T_o(\lambda) = 2^{3/2} \cdot (6.\pi^2)^{-1} \frac{d}{d\lambda} \left(\int \{(\lambda - V)_+^{3/2} - \lambda_+^{3/2}\} dx \right)$$

$$T_2(\lambda) = -2^{3/2} \cdot (12\pi)^{-2} \cdot \frac{d}{d\lambda^3} \left(\int (\lambda - V)_+^{3/2} \, \Delta V \, dx \right) ,$$

Esquisse de la preuve :

D'après la formule de trace de Birman-Krein [2] , on a :

(13) $$\int s'(\lambda,h)\, f(\lambda)\, d = tr(f(H(h) - f(H_o(h)) .$$

Si $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ est un symbole (i.e. vérifiant des conditions convenables lorsque $|x|+|\xi| \to +\infty$).

On pose :

(14) $$Op^w_h a)\,\psi(x) = (2\pi h)^{-n} . \iint e^{ih^{-1}<x-y,\xi>} . a(\frac{x+y}{2},\xi)\,\psi(y)dyd\xi .$$

En adaptant un résultat de Helffer-Robert [6] on montre qu'il existe une série formelle de symboles :

$$p_f(h) = \sum_{j\geqslant 0} h^j . p_{f,j} \quad \text{telle que :}$$

(15) $$\| f(H(h) - \sum_{j=0}^{N} h^j . Op^w_h(p_{f,j})\|_{tr} = O(h^{N+1-n}) \qquad \text{pour } N \geqslant N_o$$

(N_o étant choisi assez grand).

On a également :

(16) $$p_{f,o} = f \circ p$$

(17) $$p_{f,2j+1} = 0 \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}$$

(18) $$p_{f,2j} = \sum_{k=2}^{3j} p_{2j,k}(p^{(\alpha)}_{(\beta)}) f^{(k)} \circ p$$

avec :

(19) $$p_{2j,k}(p^{(\alpha)}_{(\beta)}) = \sum_{\theta\in I_{jk}} C(\theta) . \prod_{\ell=1}^{k} . p^{(\beta^\ell)}_{(\alpha^\ell)}$$

$I_{jk} = \{ \theta = (\tilde\alpha,\tilde\beta) , \tilde\alpha = (\alpha^1,\dots,\alpha^k) , \tilde\beta = (\beta^1,\dots,\beta^\ell)$,

$|\theta| = 4j$, $|\tilde\alpha| \geqslant 1$, $|\tilde\beta| \geqslant 1$, $|\alpha^\ell|+|\beta^\ell| \geqslant 1$

pour $1 \leqslant \ell \leqslant k \}$.

On en déduit la preuve du théorème 1 ■

On peut alors se demander s'il est possible de transformer le théorème 1 en un développement asymptotique ponctuel (ou local) pour $s(\lambda;h)$.
On a le résultat suivant :

Théorème 2 : *Soit* $J_o \subset]0,+\infty[$ *vérifiant* $(N-P)_{J_o}$.
On a alors :

$$s(\lambda;h) \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} C_{2j}(\lambda) \, . \, h^{3-2j} \qquad , \qquad h\to 0$$

uniformément par rapport λ , $\lambda \in J_o$.
Les coefficients C_{2j} *sont théoriquement calculables*.
En particulier $C_{2j} \in C^\infty(J_o)$ *et* :

$$C_o(\lambda) = 2^{3/2} \, . \, (6.\pi^2)^{-1} \, . \int_{\mathbb{R}^3} \left[(\lambda - V)_+^{3/2} - \lambda^{3/2} \right] dx$$

$$C_2(\lambda) = -2^{3/2} \, . \, (12\pi)^{-1} \, . \, \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[\int_{\mathbb{R}^3} (\lambda - V)_+^{3/2} \, . \, \Delta V \right] dx \, .$$

Début de la preuve :

On peut tenter la même approche que celle utilisée dans [5] et [11] pour l'étude de $s_h(\lambda)$, $\lambda < 0$, grâce à la formule de trace de Birman-Krein :
Soit $\varepsilon_o > 0$, ε_o assez petit pour que la condition (N-P) soit vérifiée pour $[E_1 - 2\varepsilon_o \, , \, E_2 + 2\varepsilon_o]$.
Soient $g, \tilde{g} \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $\qquad 0 \leqslant g, \tilde{g} \leqslant 1$

$\operatorname{supp} g \subseteq]E_1 - 2\varepsilon_o \, , \, E_2 + 2\varepsilon_o[$, $\qquad g \equiv 1$ sur $[E_1 - \varepsilon_o \, , \, E_2 + \varepsilon_o]$
$\operatorname{supp} \tilde{g} \subseteq [\operatorname{Inf} V - \varepsilon, E_1 - \varepsilon_o]$, $\qquad g + \tilde{g} \equiv 1$ sur $[\operatorname{Inf} V - \varepsilon_o \, , \, E_2 + \varepsilon_o]$.

On a alors :

$$(20) \qquad s(\lambda;h) = \operatorname{tr}[\tilde{g}(H(h))] + \int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu) \, s'(\mu;h) \, d\mu$$

pour $\lambda \in J_o$ et $h \in]0,h_o[$, $h_o > 0$ assez petit.

Grâce au théorème 1, on est ramené à étudier :

$$\sigma(\lambda;h) = \int_{-\infty}^{\lambda} g(\mu)\, s'(\mu;h)\, d\mu \quad , \qquad \lambda \in J_o .$$

Soit $\rho \in C_o^\infty(\mathbb{R})$,

on pose : $$\theta_\rho(\lambda;h) = \frac{1}{2\pi h} \cdot \hat{\rho}\,(-h^{-1}\cdot\lambda)$$

Soit enfin :

$$G(t;h) = U(t,h).g(H(h)) - U_o(t,h).g(H_o(h))$$

et $$J_\rho(\lambda;h) = (2\pi h)^{-1} \cdot \mathrm{tr}\left[\int e^{ih^{-1}t\lambda}.\rho(t) \cdot G(t;h)dt\right]$$

La formule de trace de Birman-Krein donne :

(21) $$J_\rho(\lambda;h) = \int \theta_\rho(\lambda-\mu;h)\sigma'(\mu;h)d\mu$$

Si $\mu \to \sigma(\mu;h)$ était monotone un argument taubérien (*) du type de celui utilisé dans [5] (§ 5 - 2) permettrait de déduire le comportement de $\sigma(\lambda;h)$ de celui de $J_\rho(\lambda;h)$.
Dans notre cas $\lambda \to s(\lambda;h)$ n'est, a priori, pas monotone. On remplace cette propriété par le :

<u>Théorème 3</u> : <u>Sous l'hypothèse</u> $(N\text{-}P)_{J_o}$ <u>on a</u> :

$$\frac{d}{d\lambda}\, s(\lambda;h) = O(h^{-3}) \quad , \quad h \to 0 \ ,$$ <u>uniformément par rapport à</u> λ, $\lambda \in J_o$.

Nous indiquerons dans le § 3 le schéma de la preuve du théorème 3. Poursuivons ici l'esquisse de la preuve du théorème 2. La première étape consiste à étudier $J_\rho(\lambda;h)$.

<u>Proposition 4</u> :

(i) <u>Si</u> $0 \notin \mathrm{Supp}\,\rho$ <u>alors</u> $J_\rho(\lambda;h) = O(h^\infty)$, <u>uniformément par rapport à</u> λ, $\lambda \in [E_1-\varepsilon_o\,,\,E_2+\varepsilon_o]$

(*) Cet argument a été développé par L. Hörmander dans son célèbre article : The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. 121 (1968) 193-218

(ii) <u>Si</u> $0 \in \operatorname{Supp} \rho$ <u>on a alors</u> :

$$J_\rho(\lambda;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} C_{j\rho}(\lambda)h^{j-3}$$, <u>uniformément par rapport à</u>

$\lambda \in [E_1-\varepsilon_o, E_2+\varepsilon_o]$. <u>De plus</u> $C_{j\rho} \in C^\infty(J_o)$ <u>et ne dépendent que du germe de</u> ρ <u>en</u> 0.

(iii) <u>Si de plus</u> $\rho \equiv 1$ <u>dans un voisinage de</u> 0 <u>on a alors</u> $C_{j\rho}(\lambda) = 0$ <u>si</u> j <u>est impair et</u> $C_{2j\rho}(\lambda) = T_{2j}(\lambda)$. ($T_{2j}$ <u>a été défini dans le théorème 1</u>).

La preuve de la proposition 4 se fait suivant une schéma classique : représentation de $U(t,h)$ comme un opérateur intégral de Fourier et utilisation de la méthode de la phase stationnaire. (cf. [5],[14],[11]).

Le théorème 3 et la proposition 4 ne permettent d'établir que :

$$s(\lambda;h) = C_o(\lambda).h^{-3} + 0(h^{-2}).$$

Pour obtenir le théorème 2, il faut dilater le support de ρ de façon que $\theta_\rho(.,h)$ devienne une meilleure approximation de la distribution de Dirac en 0. Cela est rendu possible par la :

<u>Proposition 5</u> : <u>Il existe</u> $T_1 > 0$ <u>tel que pour tout entier</u> $k \geqslant 1$ <u>on ait</u> :

$$\operatorname{tr}(G(t;h)) = 0(h^\infty) \qquad , \qquad h \to 0$$

<u>uniformément par rapport à</u> t <u>vérifiant</u> : $T_1 \leqslant |t| \leqslant h^{-k}$.

§ 3. <u>ESTIMATIONS SEMI-CLASSIQUES</u>

Il résulte de (10) que pour $\lambda > 0$ on a :

$$\frac{d}{d\lambda} s(\lambda;h) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{tr}(S(\lambda;h) . \frac{dS^*}{d\lambda}(\lambda;h)) .$$

A l'aide d'un argument de Helton-Ralston [16] on montre que :

(22) $\frac{d}{d\lambda} S^*(\lambda,h)(\theta,\omega) = -\frac{C_0(\lambda)}{2} h^{-3} < \phi_-(.,\lambda,\omega;h) , U(.) \phi_+(.,\lambda,\theta;h) >$

où $U(x) = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma^{-2} . V(x.\sigma^{-1}))|_{\sigma=1}$.

Soit $R_o > 0$, $\mathrm{Supp}\, V \subseteq \{x, |x| < R_o\}$.

Il résulte de (22) que pour établir le théorème 3 il suffit de montrer :

(23) $$\int_{|x|\leq R_o} |\phi_\pm(x,\lambda,\omega;h)|^2 dx = O(1) \quad , \quad h \to 0$$

uniformément pour $\lambda \in J_o$, $\omega \in S^2$.

Pour établir (23) on part de :

$$\phi_+ = \phi_o - R(\lambda + io;h) . V . \phi_o .$$

Formellement on a :

$$R(\lambda + io;h) . V . \phi_o = \int_0^\infty e^{ih^{-1}t\lambda} v(t)\, dt$$

où $v(t)$ est solution du problème :

(24) $$\begin{cases} (ih\partial_t - H(h))\, v(t) = 0 \\ \qquad v(0) = ih^{-1} . V(x)\, \phi_o(x,\lambda,\omega,h). \end{cases}$$

On construit des solutions approchées de (24) par la méthode B.K.W.

$$\tilde{v}(t) = \sum_{j\geq -1} h^j . a_j . e^{ih^{-1}S} .$$

On pose alors :

$$v_+ = \int_0^\infty e^{ih^{-1}t\lambda} \rho(t)\, v(t)\, dt$$

où $\mathrm{Supp}\,\rho \subset]-T_o,T_o[$, $\rho \equiv 1$ sur $[-To/2, To/2]$.

La détermination de S et a_{-1} (voir [9] par exemple) montre que

$$v_+ = O(1) \quad , \quad h \to 0 .$$

Posons : $W_+ = R(\lambda + i0,h)(V.\phi_o) - v_+$.

Or on a :

$$(H(h)-\lambda)\,W_+ = F(x,\lambda,\omega;h) \quad \text{où} \quad \operatorname{Supp} F \subset B(0,R_o) \ \text{et} \ F = 0(h),\ h\to 0 .$$

W_+ satisfaisant à la condition de radiation sortante, on a :

$$W_+ = R(\lambda + io;h).F$$

On est donc ramené à la :

<u>Proposition 6</u> :

$$(25) \qquad \|\Pi(R_o)\,.\,R(\lambda \pm io;h)\,.\,\Pi(R_o)\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^3))} = 0(h^{-1}) ,$$

$h\to 0$ <u>uniformément par rapport à $\lambda, \lambda \in J_o$</u> <u>où</u> $\Pi(R_o)$ <u>désigne l'opérateur de multiplication par</u> $1_{B(0,R_o)}$.

C'est dans la preuve de (25) que la condition $(N-P)_{J_o}$ intervient de manière essentielle.

Soit $R_1 > R_o$ et $\chi \in C_o^\infty(B(0,R_1))$, $\chi \equiv 1$ sur $B(0,R_o)$.

On pose : $\phi_1(x,\xi) = \chi_o(x).g(p(x,\xi))$

$\phi_2(x,\xi) = \chi_o(x).g(p(x,\xi))$.

Soit $\Omega_o = \{z = \lambda + ik \quad , \quad 0 < k < 1 \ , \ \lambda \in J_o\}$

$\tilde{g}$ s'annulant dans un voisinage de J_o on peut facilement construire une paramètrix : $B(h,z)$ telle que :

$$(H(h)-z)\,.\,B(h,z) = \phi_2(x,hD_x) \bmod h^\infty$$

et $\|B(h,z)\| = 0(1)$ uniformément par rapport à $z \in \Omega_o$.

Près de l'intervalle d'énergie J_o, on procède de la manière suivante :

Soit $R_1 > 0$. D'après la condition (N-P) appliquée à $[E_1-\varepsilon_o , E_2+\varepsilon_o]$ il existe T_1 tel que $|x(t,y,\eta)| > R_1$ pour $|t| > T_1$ et $(y,\eta) \in \operatorname{Supp} \phi_2$.

Soit $d_1 \in C_o^\infty]-1,T_1+T_1[$, $0 \leqslant d_1 \leqslant 1$, $d_1 \equiv 1$ sur $[0,T_1]$. Désignons par $U_1(t,s;h)$ le propagateur associé au problème :

$$(ih\partial_t) - H_o(h) - d_1(t) . V)\ U_1(t,s;h) = 0$$
$$U_1(s,s;h) = Id$$

On a le :

<u>Lemme 7</u> :

$$\| \Pi(R_o) . U_1(t,0,h) . \phi_1(x,h.D_x) \| = 0(t^{-3/2} . h^\infty)$$

<u>pour</u> $t > T_1$, $h \in]0,h_o]$ $h_o > 0$.

Admettons pour le moment le lemme 7.

Posons alors :

$$Q(t,h) = ih^{-1} . U_1(t,0;h)\ \phi_1(x,hD_x)$$
$$\hat{Q}(z,h) = \int_0^\infty e^{ih^{-1}tz}\ Q(t,h)dt$$

et $$V_2(t) = (1-d_1(t)) . V .$$

On a donc :

$$(H(h)-z)\ \hat{Q}(z,h) = \phi_2(x,h\,D_x) - \int e^{ith^{-1}tz}(V_2(t)\ Q(t,h)\ dt$$

d'où :

$$(H(h)-z) . \hat{Q}(z,h) = \phi_2(x,h\,D_x) + 0\,(h^\infty),\text{ uniformément par rapport à } z, z \in \Omega_o .$$

On en déduit la proposition 6 :

<u>Indication sur la preuve du lemme 7</u> :

Désignons par $g_t^{(1)}$ le flot hamiltonien associé à $p_1(t,x,\xi) = |\xi|^2/2 + d_1(t).V(x)$.

Posons : $(x_1(t,y,\eta), \xi_1(t,y,\eta)) = g_t^{(1)}(y,\eta)$.

On peut toujours s'arranger pour que :

$$|x_1(t,y,\eta)| > R_o + 1 \quad \text{pour} \quad |t| \geqslant T_1 \quad \text{et } (y,\eta) \in \text{Supp } \phi_1 .$$

En utilisant une version semi-classique d'un théorème d'Egorov (cf.[15] et [17]), on a :

$$U_1(t,0,h)\ .\ \phi_1(x,hD_x) = \psi_t(x,hD_x,h)\ .\ U_1(t,0,h)$$

avec $\quad S\,E[\psi_t(h)] = g_t^{(1)}(S.E[\phi_1])$ (pour la définition de $S\,E\,[.]^{(**)}$ voir [14]).

On en déduit le lemme 7 pour $t \in [T_1, T_2]$ quel que soit T_2 (mais avec un 0 dépendant de T_2!).

Soit $\qquad T_2 \geqslant T_1 + 1 \qquad$ à déterminer.

On a :

$$U_1(t,0;h) = U_1(t,T_1+1;h)\ .\ U(T+1;h)$$

d'où :

(26) $\quad U_1(t,0;h)\ \phi_1(x,hD_x) = U_o(t-T_1-1;h)\ \psi_{T_1+1}(x,hD_x,h)\ U(T_1+1,0;h)$

Or sur $\qquad S\,E\,[\psi_{T_1+1}(h)]$ on a : $E_1 - 2\varepsilon_o \leqslant \frac{|\xi|^2}{2} \leqslant E_2 + 2\varepsilon_o$.

On utilise alors (26), la représentation explicite de U_o, et on choisit T_2 assez grand pour pouvoir établir le lemme 7 pour $t \geqslant T_2$. Nous avons traité le cas sortant (i.e. +). Le cas rentrant (-) se traite évidemment de la même manière.

(**) $S\,E\ [(Ah)]$ désigne le support essentiel de la famille d'opérateurs $A(h)$ dépendant du paramètre h, $h \to 0$ (terminologie de A - Voros). Cette notion est analogue à la notion de front d'onde. (Au C^∞ correspond $O(h^\infty)$),

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bardos, J-C. Guillot, J. Ralston : La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Comm. in P.D.E. 7 (1982), 905-958.

[2] M-S. Birman, M-G. Krein : On the theory of wave operators and scattering operators, Dokl Nauk SSSR 144(1962) 475-478.

[3] Y. Colin de Verdière : Une formule de trace pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^3$. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 14 (1981), 27-39.

[4] L. Guillopé : Asymptotique de la phase de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec potentiel, C.R.A.S. Paris 293 (1981) 601-603 et Thèse de 3ème cycle - Grenoble 1981.

[5] B. Helffer, D. Robert : Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques, Ann. Inst. Fourier Grenoble 31 (1981) 169-233.

[6] B. Helffer, D. Robert : Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles, à paraître dans J. of Funct. Anal.

[7] T. Kuroda : An introduction to scatteting theory, Lecture Notes Series n° 51, Aarhus Univ. Math. (1978).

[8] A. Majda, J. Ralston : An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains I, II and III. Duke Math. J. 45 (1978) 183-196 ; 45 (1978) 513-536 and 46 (1979) 725-731.

[9] V.P. Maslov, M.V. Fedoriuk : Semi-classical approximation in quantum mechanics, Reidel (1981).

[10] V. Petkov, G. Popov : Asymptotic behaviour of the scattering phase for non-trapping obstacles, Ann. Inst. Fourier Grenoble 32 (1982) 111-149.

[11] V. Petkov, D. Robert : Asymptotique semi-classique d'Hamiltoniens quantiques et trajectoires classiques périodiques, C.R.A.S. Paris 296 (1983) 553-556.

[12] G. Popov : Asymptotic behaviour of the scattering phase for non-trapping metrics, Preprint Sofia (1982).

[13] M. Reed, B. Simon : Scattering Theory, Academic Press (1979).

[14] D. Robert : Autour de l'approximation semi-classique, Cours de 3ème cycle 1982/83, Universités de Nantes et de Récife.

[15] D. Robert, H. Tamura : Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotics for scattering phase , à paraître.

[16] J. Helton, J. Ralston : The first variation of the scattering matrix, J. Diff. Eq. 21 (1976) 373-394.

[17] X. Wang : Thèse de 3ème cycle en préparation, Université de Nantes.

* * *

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

ERRATA

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ

Exposé n° V

APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE LA PHASE DE DIFFUSION POUR LE POTENTIEL

(d'après un travail de D. Robert et H. Tamura [15])

par D. ROBERT

	au lieu de	lire
Page V.1 , ligne − 7	$U(t,h) = \exp(-ith^{-1}.H(h))$.	$U(t,h) = \exp(-ith^{-1}.H(h)))$.
Page V.1 , ligne − 4	$V \in C_o(\mathbb{R}^3)$	$V \in C_o^\infty(\mathbb{R}^3)$
Page V.2 , ligne + 16	$\mathbb{R}^3$ ·	$\mathbb{R}^3$.
Page V.3 , ligne + 16	Pour toute $f \in C_o(\mathbb{R}^3)$,$f(h(h)-$	Pour toute $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^3)$,$f(H(h)-$
Page V.5 , ligne + 3	$\|t\| > (R)$	$\|t\| > T(R)$
Page V.5 , ligne − 7	$< T_o, f > = (2\pi)^{-3} \quad \{f(x,\xi))$	$< T_o, f > = (2\pi)^{-3} \int\int \{f(x,\xi))$
Page V.6 , ligne + 3	$\int s'(\lambda;h)\, f(\lambda)\, d = \ldots (h))$.	$\int s'(\lambda;h)\, f(\lambda)\, d\lambda = \ldots (h)))$.
Page V.6 , ligne + 6	$Op_h^w a)\, \psi(x) =$	$(Op_h^w a)\, \psi(x) =$
Page V.6 , ligne + 10	$O(h^{N+1-n})$	$O(h^{N+1-n}))$
Page V.7 , ligne − 4	$\text{supp}\, g \subseteq [\text{Inf}\, V - \varepsilon, E_1 - \varepsilon_o]$,	$\text{supp}\, \tilde{g} \subseteq [\text{Inf}\, V - \varepsilon, E_1 - \varepsilon_o]$,
Page V.9 , ligne + 6	..... se fait suivant une schéma ..	se fait suivant un schéma .
Page V.11 , lignes + 14 et 15	$\phi_1(x,\xi) = \chi_o(x).g(p$ $\phi_2(x,\xi) = \chi_o(x).g(p$	$\left\{\begin{array}{l}\phi_1(x,\xi) = \chi_o(x).g \\ \phi_2(x,\xi) = \chi_o(x).\tilde{g}(p\end{array}\right.$
Page V.11 , ligne − 5	mod h^∞	mod $O(h^\infty)$
Page V.12 , ligne + 1	$, T_1 + T_1$	$, T_1 + 1$
Page V.13 , ligne − 1	(Au C^∞ correspond $O(h^\infty)$).	(Ceci est étudié en détail dans [14]).