

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. DERRIDJ

## Sur le prolongement d'applications holomorphes

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1985-1986), exp. n° 16,  
p. 1-10

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1985-1986\\_\\_\\_A16\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986___A16_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

---

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

SUR LE PROLONGEMENT D'APPLICATIONS HOLOMORPHES.

par M. DERRIDJ



## 1. INTRODUCTION.

Notre but ici est de donner une idée de la façon dont on peut obtenir des résultats d'extension (en applications holomorphes) d'applications holomorphes propres entre domaines pseudoconvèxes à frontière analytique réelle.

Ce n'est que récemment que cette question a été relancée pour les points où la frontière de Levi est dégénérée, le cas non dégénéré ayant été étudié en particulier par S. Pincůk et H. Lewy ([9] , [11]). Nous avons donné dans ([4] [5]) des classes de domaines images pour lesquels on avait extension sous une hypothèse d'égalité de type. Baouendi, Jacobowitz et Trèves ont considéré le cas d'un difféomorphisme C.R. entre variétés C.R. dans  $\mathbb{C}^n$  et ont donné des conditions suffisantes pour avoir l'analyticité de ce difféomorphisme.

Ainsi, partant d'une application holomorphe propre, il est intéressant de savoir sous quelle condition, sa restriction au bord est un difféomorphisme C.R. Signalons que tout récemment Maringot, reprenant notre méthode, a montré que notre classe de domaine de [5] , satisfaite à l'extension sans hypothèse d'égalité de type. Nous allons essayer ici de passer en revue ces récents progrès.

## 2. LE PROBLEME DE L'EXTENSION.

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux hypersurfaces analytiques réelles (contenant 0) dans  $\mathbb{C}^n$  , définies par les équations  $\{r=0\}$  ,  $\{\rho=0\}$  .

Soit  $U$  et  $V$  deux voisinages de 0 .

On considère une application holomorphe, propre,  $u$  , de  $U^+ = U \cap \{\rho < 0\}$  , dans  $V^+ = V \cap \{\rho < 0\}$  . On suppose que  $U^+$  et  $V^+$  sont pseudoconvexes. De plus, on supposera que  $u \in C^\infty(\overline{U^+})$  et  $u(0) = 0$  .

Problème. Existe-t-il un voisinage  $W$  de 0 , tel que  $u$  se prolonge en application holomorphe, définie sur  $W$  ?

On peut généraliser cette situation de la façon suivante : soit  $L_1, \dots, L_n$  un système libre de champs de vecteurs analytiques réels dans  $U$ ,  $L_n(r) \neq 0$   $L_j(r) = 0$  sur  $S_1$  ,  $j \leq n-1$ ; soit  $u : U^+ \rightarrow V^+$  telle que si  $L = (L_1, \dots, L_n)$

$$(2.1) \quad \begin{cases} Lu = 0 \text{ dans } U^+ \\ u \in C^\infty(\bar{U}^+) \\ u(S_1) \subset S_2 \end{cases} .$$

Existe-t-il un voisinage  $W$  de  $0$  et  $\tilde{u}$  telle que

$$(2.2) \quad \begin{cases} \tilde{u}|_{W^+} = u \\ L\tilde{u} = 0 \text{ dans } W^+ \end{cases}$$

Proposition 2.1. Il existe au voisinage de  $0$  des champs  $L'_1, \dots, L'_{n-1}$  combinaison à coefficients analytiques de  $L_1, \dots, L_{n-1}$ , tels que

$$(2.3) \quad \begin{cases} [L_n, L'_j] \equiv 0 \text{ (modulo } L_n) \\ L'_j|_{S_1} = L_j \end{cases} .$$

On considère dorénavant des champs vérifiant (2.3). Pour cela, on utilise essentiellement Cauchy-Kovalevski. Soit maintenant  $(\rho, t, x)$  des variables où  $(t, x)$  sont tangentes.

Proposition 2.2. Supposons que  $L_n = \partial_\rho + \alpha \partial_t$ ,  $\text{Im} \alpha(0) \neq 0$ . Soit  $u$  fonction  $C^\infty$  dans  $\bar{U}^+$ ,  $L_n u = 0$  dans  $U^+$ . Il existe une application analytique réelle  $\phi : \bar{U}^- \rightarrow \bar{U}^+$  telle que si  $v = \bar{u} \circ \phi$  alors

$$(2.4) \quad \begin{cases} L_n v = 0 \text{ dans } U^- \\ \phi|_{S_1} = I_d \end{cases} .$$

Revenons maintenant au problème ; nous allons systématiser une situation considérée par Pincúk.

Nous avons, en notant  $\rho = \rho(Z, \bar{Z})$ .

$$\rho(u, \bar{u}) = 0 \text{ sur } S_1 .$$

Comme les  $L_j$  sont tangents on a aussi

$$L_j(\rho(u, \bar{u})) = 0 \text{ sur } S_1, \quad j = 1 \dots n-1$$

on a ainsi des équations, qui peuvent se révéler insuffisantes. Soit  $I$  un

multi-indice  $I = (i_j, \dots, i_k)$ ,  $i_j \in \{1, \dots, n-1\}$  alors on a aussi

$$L_I(\rho(u, \bar{u})) = 0 \text{ sur } S_1 .$$

On peut obtenir ainsi beaucoup d'équations vérifiées par  $u$  sur  $S_1$ . Le problème est de chercher une extension naturelle de  $u$  dans  $U^-$ . Pour cela, on considère le système

$$(2.5) \quad L_I(\rho(\tilde{u}, v)) = 0 \text{ dans } U^-, I \in \mathcal{I} ,$$

où  $v = \bar{u} \circ \phi$ , et  $(\mathcal{I})$  système convenable.

Le système (2.4), considéré en  $Z$ , voisin de  $0$  dans  $U^-$  peut s'écrire

$$\begin{cases} \tilde{u} \rightarrow \phi(\tilde{u}) = \{L_I(\rho(\tilde{u}, v))\}_{I \in \mathcal{I}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \\ \phi(\tilde{u}) = 0 \end{cases}$$

si on montre que  $d\phi(0)$  est inversible, on obtiendra  $\tilde{u}$ , en tout point  $Z$  assez voisin de  $0$  dans  $U^-$ ; Alors  $\tilde{u}$  est trivialement continue dans  $U^-$ . On montre la proposition :

Proposition 2.3. Soit  $\tilde{u}$  comme ci-dessus

Alors

$$(2.6) \quad \begin{cases} L\tilde{u} = 0 \text{ dans } U^- \\ \tilde{u}|_S = u \end{cases}$$

Ainsi  $u$  est prolongée en solution de  $L$  dans un voisinage de  $0$ .

La proposition précédente se démontre grâce au théorème d'Holmgren et en utilisant (2.3).

### 3. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER.

Commençons par rappeler la notion de type dans  $\mathbb{C}^2$  ([8]) soit  $S$  une hypersurface de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{C}^2$ ,  $0 \in S$ . Soit  $L_1$  un champ holomorphe tangent à  $S$ . Soit  $T$  un champ (réel) tangent à  $S$ . Alors  $(L_1, \bar{L}_1, T)$  est une base de champs complexes tangents à  $S$ . (Si  $S$  est donnée par  $\{r = 0\}$ , on peut prendre

$$L_1 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial Z_2} \frac{\partial}{\partial Z_1} - \frac{\partial \rho}{\partial Z_1} \frac{\partial}{\partial Z_2} \right) .$$

Alors

$$[L_1, \bar{L}_1] = c T \pmod{L_1, \bar{L}_1} .$$

Si  $c(0) \neq 0$ ,  $0$  est un point non dégénéré (cas qui ne nous intéresse pas ici).  
(On prendra  $L_2 = \partial_{Z_2}$  (si  $\frac{\partial r}{\partial Z_2}(0) \neq 0$ ).

Soit  $p$  la longueur minimum d'un opérateur

$$L_I = L_{i_1} \dots L_{i_p} \quad (\text{où } L_{i_j} = L_1 \text{ ou } \bar{L}_1) \text{ tel que}$$

$$L_I c(0) \neq 0$$

on dit que  $p + 2$  est le type de  $0$ . C'est un invariant.  
Nous allons maintenant prendre  $S_2$  dans  $\mathbb{C}^2$ , donnée par

$$\rho(Z_1, Z_2) = \operatorname{Re} Z_2 + |Z_1|^4$$

Alors on voit que  $0$  est de type 4, sur  $S_2$ . Alors on a

Théorème 3.1. Si  $0 \in S_1$  est de type 4, alors  $u$  se prolonge en application holomorphe dans un voisinage de  $0$ .

Ce théorème découle des observations suivantes ;

Nous allons considérer le système

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_2 + \bar{u}_2 + u_1^2 \bar{u}_1^{-2} = 0 & \text{sur } S_1 . \\ \bar{L}_1^{-2} \bar{u}_2 + u_1^2 \bar{L}_1^{-2} \bar{u}_1^{-2} = 0 & \text{sur } S_1 . \end{cases}$$

qui donne alors naissance au système

$$(3.2) \quad \begin{cases} \tilde{u}_2 + v_2 + \tilde{u}_1^2 v_1^{-2} = 0 & \text{dans } U^- \\ + \bar{L}_1^{-2} v_2 + \tilde{u}_1^2 \bar{L}_1^{-2} v_1^{-2} = 0 & \text{dans } U^- \end{cases}$$

ici, ceci apparaît comme un système linéaire, en  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  dont le déterminant en  $0$  est donné par (puisque  $v|_{S_1} = \bar{u}$ )

$$\begin{vmatrix} 1 & v_1^2 \\ 0 & \bar{L}_1^{-2} v_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{u}_1^{-2} \\ 0 & \bar{L}_1^{-2} \bar{u}_1^{-2} \end{vmatrix}$$

il apparaît alors que ce déterminant est non nul (au voisinage de  $0$ ) si  $(\bar{L}_1 \bar{u}_1)(0) \neq 0$ .

Proposition 3.2. Si  $0 \in S_1$  a même type que  $0 \in S_2$ , alors  $L_1 u_1(0) \neq 0$

Remarque 3.3. Remarquons que  $L_1 u_1(0) \neq 0 \Rightarrow u : S_1 \rightarrow S_2$  est un difféomorphisme C.R.

Maintenant les considérations précédentes entraînent que  $u_2$  et  $u_1^2$  se prolongent en fonctions holomorphes.

Dans une deuxième étape, on montre que  $u_1$  se prolonge en fonction holomorphe.

En fait on a la

Proposition 3.4. Supposons que  $h$  est un germe de fonction holomorphe en  $0$

dans  $\mathbb{C}^2$  tel que  $\frac{\partial^k h}{\partial Z_1^k}(0) \neq 0$ .

Supposons que  $u_2$  et  $h(u_1, u_2)$  se prolongent en fonctions holomorphes dans un voisinage de  $0$ , alors  $u_1$  se prolonge en fonction holomorphe dans un voisinage de  $0$ .

Démonstration. Soit  $f(Z)$  la fonction qui prolonge  $h(u_1, u_2)$ .

Considérons l'application

$$F : 0 \in \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, Z) \longrightarrow F(\lambda, Z)$$

où  $F(\lambda, Z) = h(\lambda, u_2(Z)) - f(Z_1, Z_2)$ .

Alors on a bien  $F(u_1, Z) \equiv 0$  dans  $U^+$ .

Ainsi si  $\tilde{u}_1$  est la série de Taylor de  $u_1$  en  $0$  on a que  $\tilde{u}_1$  est une solution formelle de  $F(\tilde{u}_1, Z) = 0$ ; soit  $X$  l'ensemble des zéros de  $F$ , au voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{C}^3$ :  $X = X_1 \cup \dots \cup X_j$ , où les  $X_j$  sont les composantes irréductibles de  $X$ .

Pour tout  $v$ , soit  $f_v$  une fonction holomorphe dans un voisinage  $V_v$  de  $0$ , solution de  $F(h_v(Z), Z) = 0$  dans  $V_v$  telle que  $U_v = \tilde{u}_1(v)$  (Théorème de M. Artin [1]).

Alors  $\exists j_0$  et un nombre infini de  $v$  tels que  $\text{gr}(h_v) = X_{j_0}$ .

Donc ces  $U_v$  définissent une fonction holomorphe  $V$ , holomorphe dans un voisinage de  $0$  t.q.

$$V = \tilde{u}_1(\infty)$$

Ainsi  $v$  est le prolongement cherché.



Dans un cadre plus général, Baouendi-Jacobowitz-Trèves ont étudié les applications, qui sont des difféomorphismes C.R. entre variétés C.R. [2].

Dans notre classe précédente, on remarque qu'on a obtenu que notre application holomorphe donne, au bord, un difféomorphisme C.R.

La question se pose donc de savoir si des conditions géométriques sur  $S_1$  et  $S_2$  entraînent qu'une application holomorphe propre, régulière jusqu'au bord, a sa restriction au bord qui est un difféomorphisme C.R.

#### 4. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UNE APPLICATION HOLOMORPHE PROPRE AIT UNE RESTRICTION AU BORD DIFFEOMORPHISME C.R.

4.1. La notion de multitype. Dans [3], D. Catlin a introduit la notion de multitype que nous allons décrire dans  $\mathbb{C}^3$  (la différence de structure résidant entre  $\mathbb{C}^2$  et  $\mathbb{C}^3$ ).

Le multitype d'un point de  $S$  dans  $\mathbb{C}^3$  sera un triplet dont le premier terme est 1, noté  $(1,p,q)$ .

Définition de  $p$  et  $q$  : Si la forme de Levi est de rang 1, il existe un champ holomorphe tangent que nous noterons  $L_1$  tel que si  $[L_1, \bar{L}_1] = c_{11} T$  (mod  $L_j, \bar{L}_j, j = 1,2$ ) alors  $c_{11}(0) \neq 0$ . Alors  $p = 2$ .

On peut alors trouver un champ holomorphe tangent  $L_2$  tel que

$$c_{21} \equiv 0 \text{ dans } U .$$

On considère alors toutes les listes  $\mathcal{L}$  formées de  $\{L_1, L_2, \bar{L}_1, \bar{L}_2\}$  tel que,  $\mathcal{L}$  contient  $\alpha$  champs  $L_1$  ou  $\bar{L}_1$ ,  $\beta$  champs  $L_2$  ou  $\bar{L}_2$

$$\mathcal{L}(\partial r)(0) \neq 0$$

$\mathcal{L}$  contenant au moins un champ  $L_2$  ou  $\bar{L}_2$

on pose  $q(\mathcal{L})$  défini par  $\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{\mathcal{L}(q)} = 1$ .

Et  $q = \inf\{q(\mathcal{L}), \mathcal{L} \text{ comme ci-dessus}\}$ .

De manière générale, parmi tous les champs holomorphes  $L$  tangents, on considère une liste  $\mathcal{L}$  formée de  $L$  ou  $\bar{L}$ , de longueur  $\ell$

on note  $p = \inf\{\ell | \mathcal{L}(\partial r)(0) \neq 0\}$ .

Soit  $L_1$  un tel  $L$  tel que

$$\begin{aligned} L_{i_1} \dots L_{i_p}(\partial r)(0) &\neq 0 . \\ L_{i_2} \dots L_{i_p}(\partial r)(0) &= 0 . \end{aligned}$$

Si  $L_{i_1} = X + iY$  et  $h = L_{i_2} \dots L_{i_p} (\partial r) = f + ig$  alors soit  $X(f)(0) \neq 0$  soit  $Y(f)(0) \neq 0$ , soit  $X(g)(0) \neq 0$  soit  $Y(g)(0) \neq 0$ . On suppose  $X(f)(0) \neq 0$ . Alors on considère  $L_2$  tel que  $L_2(f) \equiv 0$  dans  $U$ .

De nouveau on considère toutes les listes  $\mathcal{L}$  formées de  $\{L_1, \bar{L}_1, L_2, \bar{L}_2\}$ , contenant  $L_2$  ou  $\bar{L}_2$  au moins une fois telles que :

$\mathcal{L}(\partial r)(0) \neq 0$ . Si  $\mathcal{L}$  contient  $\alpha \{L_1 \text{ ou } \bar{L}_1\}$  et  $\beta \{L_2 \text{ ou } \bar{L}_2\}$   $q(\mathcal{L})$  sera défini par

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q(\mathcal{L})} = 1$$

on pose  $q = \inf \{q(\mathcal{L})\}$ .

4.2. Ecriture en coordonnées locales. Si  $(l, p, q)$  est le multitype de  $0 \in S$ , alors  $S$  admet une équation du type

$$\rho = 2 \operatorname{Re} Z_1 + \rho(Z_1, Z_2, Z_3) \quad \rho(0) = d\rho(0) = 0$$

$$\frac{\partial^\beta \rho}{\partial Z^\alpha \partial \bar{Z}^\beta}(0) = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i + \beta_i}{\lambda_i} < 1 \quad ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (l, p, q))$$

$$\} (\alpha_0, \beta_0) \text{ t.q. } \alpha_0 + \beta_0 = p \cdot \frac{\partial^p \rho}{\partial Z_2^{\alpha_0} \partial \bar{Z}_2^{\beta_0}}(0) \neq 0.$$

Théorème 4.1. Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux hypersurfaces de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Soit  $u$  une application holomorphe propre de  $U^+$  dans  $V^+$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\bar{U}^+$ . On suppose que  $U^+$  et  $V^+$  sont pseudoconvexes. Une condition nécessaire et suffisante pour que  $u|_{S_1}$  soit un difféomorphisme C.R. :  $S_1 \rightarrow S_2$ , est que le multitype de  $0 \in S_1$  et le multitype de  $0 \in S_2$  (supposés finis) soient égaux.

Plan de la démonstration (voir détail dans [6]). Un difféomorphisme C.R., conservant le multitype, il suffit de montrer que si les multitypes sont égaux alors  $u|_{S_1}$  est un difféomorphisme C.R.

Voici une identité importante.

Notons  $\rho$  une équation de  $S_2$ , au voisinage de  $0$  et  $A$  la matrice Hessienne complexe de  $\rho$ . Notons aussi  $V_j = L_j u$ ,  $j = 1, 2$  et  $(c_{ij})$  la matrice de Levi de  $S_1$  dans la base  $(L_1, L_2)$ .

Proposition 4.2. Il existe une fonction  $d$ ,  $C^\infty$  sur  $S_1$  telle que

$$\begin{cases} A(V_i, \bar{V}_j) = dc_{ij} & i, j = \{1, 2\} \text{ sur } S_1 \\ d(0) \neq 0 \end{cases}$$

voici une démonstration dans le cas particulier où  $\rho$  est plurisousharmonique (remarquons que ceci n'est pas toujours vrai).

On considère la fonction  $\rho \circ u$ ; comme  $u$  est holomorphe dans  $U^+$  et propre nous avons

- a)  $\rho \circ u < 0$  dans  $U^+$
- b)  $\rho \circ u$  est sous harmonique dans  $U^+$

d'après un principe du maximum (lemme de Hopf),  $\frac{\partial}{\partial v} (\rho \circ u)(0) \neq 0$  (on peut même préciser le signe).

Maintenant, prenons comme champ  $T = L_3 - \bar{L}_3$ , où  $L_3$  est un champ holomorphe transverse.

Comme  $\rho \circ u = 0$  sur  $S_1$  on a

$$\begin{aligned} \bar{L}_j(\rho \circ u) &= \sum_{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_\ell} \overline{L_j u_\ell} \\ L_i \bar{L}_j(\rho \circ u) &= \sum_{k, \ell} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Z_k \partial \bar{Z}_\ell} L_i u_k \circ \overline{L_j u_\ell} + \sum_{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_\ell} L_i \overline{L_j u_\ell} \end{aligned}$$

Comme  $L_j \bar{u}_\ell = 0$  sur  $S_1$ , nous obtenons

$$L_i \bar{L}_j(\rho \circ u) = A(V_i, \bar{V}_j) + \sum_{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_\ell} (c_{ij} \bar{T} u_\ell + \sum_{k=1}^2 a_k \overline{L_k u_\ell})$$

mais :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_\ell} \overline{L_\alpha u_\ell} &= \bar{L}_\alpha(\rho \circ u) = 0 \text{ sur } S_1 \\ \sum_{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_\ell} (c_{ij}) \bar{T} u_\ell &= \sum_{\ell} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{Z}_\ell} (c_{ij}) \overline{L_3 u_\ell} = c_{ij} L_3(\rho \circ u) \end{aligned}$$

comme  $L_3$  est holomorphe transverse, on a

$$\frac{\partial}{\partial v} (\rho \circ u)(0) \neq 0 \Rightarrow L_3(\rho \circ u)(0) \neq 0 .$$

Il suffit alors de poser  $d = L_3(\rho \circ u)$ , pour avoir notre assertion. Dans le cas général on utilise un théorème de Diederich-Fornaess [7]. Notre théorème

découlera du théorème suivant :

Théorème. Sous les hypothèses du théorème précédent, les champs de vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  sont indépendants en 0 .

Voici une indication sur la preuve ;

Définissons les formes multilinéaires  $\partial A$  et  $\bar{\partial} A$  par

$$\partial A(V_i, V_j, \bar{V}_k) = \sum_{\ell, m, n} \frac{\partial^3}{\partial Z_\ell \partial Z_m \partial \bar{Z}_n} (V_i)_\ell (V_j)_m (\bar{V}_k)_n$$

$$\bar{\partial} A(V_i, \bar{V}_j, \bar{V}_k) = \sum_{\ell, m, n} \frac{\partial^3}{\partial Z_\ell \partial \bar{Z}_m \partial \bar{Z}_n} (V_i)_\ell (\bar{V}_j)_m (\bar{V}_k)_n$$

de façon similaire, nous définissons les formes multilinéaires  $\partial^{\ell-k} \bar{\partial} A$ . Soit alors  $\mathcal{L}$  une liste de longueur  $p$ , contenant  $p_1$  fois  $L_1$  et  $p_2$  fois  $\bar{L}_1$ ,  $p = p_1 + p_2$ , telle que  $\mathcal{L}(\partial r)(0) \neq 0$ . Alors

Lemme 1. Nous avons

$$\partial^{p_1-1} \bar{\partial}^{p_2-1} A(\underbrace{V_1, \dots, V_1}_{p_1}, \underbrace{\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_1}_{p_2})(0) \neq 0$$

ce qui entraîne que  $V_1(0) \neq 0$ .

Lemme 2. Sous les mêmes conditions

$$\partial^{p_1-1} \bar{\partial}^{p_2} A(V_2, V_1, \dots, V_1, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_1)(0) = 0$$

$p_2$

du lemme 2, il découle que si  $V_2(0) \neq 0$ , alors  $V_1$  et  $V_2$  sont nécessairement indépendants en 0 .

Le fait que  $V_2(0) \neq 0$ , va découler du

Lemme 3 : Soit  $\mathcal{L}$  une liste telle que  $q(\mathcal{L}) = q$ , contenant  $\alpha_1$  fois  $L_1$ ,  $\alpha_2$  fois  $\bar{L}_1$ ,  $\beta_1$  fois  $L_2$ ,  $\beta_2$  fois  $\bar{L}_2$  et telle que  $\mathcal{L}(\partial r)(0) \neq 0$   
 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{i_1} \dots \mathcal{L}_{i_\theta}$ ,  $\beta_1 + \beta_2 > 0$ . Alors

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\partial} \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\partial} A(V_{i_1}, \dots, V_{i_\theta})(0) \neq 0, \text{ donc } V_2(0) \neq 0 .$$

Remarque. S. Maingot [9] a montré, en considérant la classe de domaines que nous avons donné dans ([4], [5]), qu'on peut avoir des résultats d'extension, sans hypothèse d'égalité de type, donc sans que la restriction au bord soit un difféomorphisme.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] M. Artin
- [2] M.S. Baouendi, H. Jacobowitz, F. Trèves, On the analyticity of C.R. mappings. Ann. of Math. 122 (1985) 365-400.
- [3] D. Catlin, Boundary invariants of pseudoconvex domains Ann. of Math 120 (1984) 529-586.
- [4] M. Derridj, Le principe de réflexion en des points de faible pseudoconvexité pour des applications holomorphes propres Inv. Math. 79 (1985) 197-215.
- [5] M. Derridj, prolongement local d'application holomorphes propres ; prépublications d'Orsay (1985) 84 T 45.
- [6] M. Derridj, Multitype et prolongement d'application holomorphes propres ; prépublications d'Orsay 85 T 50 .
- [7] M. Diederich J.E. Fornaess, Pseudoconvex domains, bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions ; Inv. Math 39, 129-141.
- [8] J.J. Kohn, Boundary behavior of on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two. J. of Diff. Geometry G (1972) 523-542.
- [9] H. Leroy, On the boundary behavior of holomorphic mappings Acad. Naz. Lincei 35 (1977).
- [10] S. Maingot , Sur le prolongement d'applications holomorphes. A paraître.
- [11] S. Pincuk, On the Analytic continuation of holomorphic mappings Mat. Sb. 98 (140) (1975) ; Math USSR Sb.27 (1975).