Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Duchon
R. Robert

Solutions globales avec nappe de tourbillon pour les équations d'Euler dans le plan

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 7, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

SOLUTIONS GLOBALES AVEC NAPPE DE TOURBILLON POUR LES EQUATIONS D'EULER DANS LE PLAN

par J. DUCHON et R. ROBERT

Exposé n°VII

17 Décembre 1985

Résumé. Nous montrons que pour toute courbe assez proche d'une droite, il existe une solution globale des équations d'Euler ayant pour tout $t \geqslant 0$ une nappe de tourbillon et admettant la courbe donnée comme nappe de tourbillon initiale.

§ 1. INTRODUCTION.

Nous considérons les équations d'Euler pour un fluide parfait incompressible dans le plan :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(u_i u) = - \nabla q \, , \\ \\ \operatorname{div} u = 0 \, , \end{cases}$$

où $u = (u_1(t,x_1,x_2),\ u_2(t,x_1,x_2))$ est la vitesse à l'instant t au point de coordonnées (x_1,x_2) et q est la pression.

Nous nous intéressons à des solutions singulières, dont le tourbillon, c'est-à-dire le rotationnel du champ de vitesse, $\operatorname{rot} u = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$, est une mesure portée par une courbe Γ_t d'équation $x_2 = y(t,x_1)$. La densité de tourbillon $\Omega(t,x_1)$ est alors définie par $< \operatorname{rot} u, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} \Omega(t,x_1)\varphi(x_1,y(t,x_1))dx_1$, pour toute fonction test φ C^∞ à support compact.

Un exemple est l'écoulement stationnaire donné par

$$u_1 = \frac{\Omega_o}{2} \text{ et } u_2 = 0 \text{ pour } x_2 < 0 \, , \ u_1 = -\frac{\Omega_o}{2} \text{ et } u_2 = 0 \text{ pour } x_2 > 0 \, .$$

Dans ce cas le tourbillon est la mesure de densité constante Ω_o sur la droite $x_2 = 0$. Cet écoulement est instable (instabilité de Kelvin-Helmholtz) parce qu'une perturbation initiale δy_o de la courbe, ou $\delta\Omega_o$ de la densité de tourbillon, de fréquence k, est amplifiée par un facteur e^{ckt} [2,4].

Il en résulte que c'est en général seulement pour des données initiales (courbe et densité de tourbillon) analytiques que l'on obtient l'existence, localement en temps, de la courbe Γ_t et de la densité de tourbillon $\Omega(t,x_1)$, par un théorème du type de Cauchy-Kowalewski (nous renvoyons au travail de C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos et U. Frisch [4]).

Notre but dans cet article est de montrer que pour une densité initiale de tourbillon non pas quelconque mais choisie en fonction de la courbe $\Gamma_o = \{(x,y_o(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, la courbe Γ_t existe pour tout $t > 0$. Nous supposerons seulement que $\frac{dy_o}{dx}$ est la transformée de Fourier d'une mesure de masse totale assez petite.

Nous montrerons en outre que Γ_t et $\Omega(t)$ deviennent analytiques pour $t > 0$, dans une bande de largeur proportionnelle à t , et tendent vers une droite et vers une constante, respectivement, pour t infini.

§ 2. EQUATIONS ET NOTATIONS.

Les équations régissant l'évolution de la nappe de tourbillon ont été établies dans [2], elles s'écrivent :

$$\begin{cases} y_t = - y_x V_1 + V_2 , \\ \Omega_t + (\Omega V_1)_x = 0 , \end{cases}$$

où les indices t,x indiquent la dérivation par rapport à t,x,

$$V_1(t,x) = - \frac{1}{2\pi} ⨍ \frac{y(t,x)-y(t,x')}{(x-x')^2+(y(t,x)-y(t,x'))^2} \Omega(t,x')dx'$$

et

$$V_2(t,x) = \frac{1}{2\pi} ⨍ \frac{x-x'}{(x-x')^2+(y(t,x)-y(t,x'))^2} \Omega(t,x')dx'$$

sont les composantes de la moyenne des deux vecteurs vitesses du fluide au point $(x,y(t,x))$, de part et d'autre de Γ_t . Le signe ⨍ indique que l'intégrale est une valeur principale de Cauchy. Nous écrivons Ω sous la forme $\Omega = \Omega_o(1+\omega)$, où Ω_o est une constante que, sans perdre de généralité, nous supposerons égale à 2 (faire un changement de l'échelle des temps).

En prenant pour inconnues y_x et ω , les équations deviennent :

$$(E) \begin{cases} y_{xt} - \Lambda\omega = F(y_x,\omega)_x , \\ \omega_t - \Lambda y_x = G(y_x,\omega)_x , \end{cases}$$

où Λ est l'opérateur défini par $\Lambda u(x) = \frac{1}{\pi} ⨍ \frac{u(x)-u(x')}{(x-x')^2} dx'$;

(si on note $\hat{u}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\xi} u(x)dx$ la transformée de Fourier, on a

$$(\widehat{\Lambda u})\ (\xi) = 2\pi|\xi|\hat{u}(\xi))\ ;$$

$$\text{et}\quad F = \frac{1}{\pi} ⨍ (\frac{1}{1+p^2} - 1)\ \frac{1+\omega(x')}{x-x'}\ dx' + \frac{1}{\pi}\ y_x ⨍ \frac{p}{1+p^2}\ \frac{1+\omega(x')}{x-x'}\ dx'\ ,$$

$$G = \frac{1}{\pi} ⨍ (\frac{p}{1+p^2} - p)\ \frac{dx'}{x-x'} + \frac{1}{\pi}\ \omega(x) ⨍ \frac{P}{1+p^2}\ \frac{1+\omega(x')}{x-x'}\ dx' + \frac{1}{\pi} ⨍ \frac{P}{1+p^2}\ \frac{\omega(x')dx'}{x-x'}\ ,$$

où on a posé $p = p(x,x') = \dfrac{y(x)-y(x')}{x-x'}$ (en oubliant la variable t).

Nous traiterons le système (E), en y ajoutant la condition initiale $y_x(o,x) = y_{ox}$, comme un problème de point fixe

$$(y_x,\omega) = \mathcal{T}(y_x,\omega)\ ,$$

pour une application $\mathcal{T}$ définie sur $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\alpha$ un espace de (couples de) fonctions des variables $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, défini plus loin.

<u>Définition</u> 1. On note B_o l'espace de Banach des fonctions d'une variable $x \in \mathbb{R}$ qui sont transformée de Fourier d'une mesure de Radon bornée, avec la norme correspondante $\|u\| = \int_{\mathbb{R}} d|\hat{u}|$. Et pour $\rho \geqslant 0$, B_ρ désignera

l'espace des $u \in B_o$ telles que la mesure $|u|_\rho = |e^{\rho r}\hat{u}(\xi)|$ soit bornée ($r = 2\pi|\xi|$) ; sa norme est $\|u\|_\rho = \int d|u|_\rho$. Il est clair que B_ρ est formé de fonctions qui sont analytiques dans la bande $\{x+iy : |y| < \rho\}$ et que c'est une algèbre pour la multiplication ; plus précisément, on a $|uv|_\rho \leqslant |u|_\rho * |v|_\rho$ (où * désigne la convolution des mesures bornées).

Pour $u \in B_o$, on utilisera aussi la notation $|u|_{-\rho} = |e^{-\rho r}\hat{u}|$.

<u>Définition</u> 2. Pour $\alpha \geqslant 0$, $\mathcal{B}_\alpha$ est l'espace formé des fonctions u continues de $t \geqslant 0$ à valeurs dans B_o , telles qu'il existe une mesure de Radon μ positive et bornée qui majore $|e^{\alpha t r}\widehat{u(t)}|$ pour $t \geqslant 0$. On note $|u|_\alpha$ l'inf des μ ayant cette propriété, et $\mathcal{B}_\alpha$ est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_\alpha = \int d|u|_\alpha$.

Nous allons maintenant décrire l'opérateur $\mathcal{T}$, c'est à dire exprimer la solution du système linéaire

$$(EL) \quad \begin{cases} v_t - \Lambda w = F_x , \\ w_t - \Lambda v = G_x , \\ v(o) = v_o \end{cases}$$

pour F , G données dans $\mathcal{B}_o$ et v_o dans B_o .

Pour ce faire, nous introduisons les opérateurs S , I_o , I^+, I^- ci-dessous.

Définition 3. Soit $S : B_o \to \mathcal{B}_o$ l'opérateur défini par $Sv_o(t) = e^{-t\Lambda} v_o$. On a $|Sv_o|_1 = |\hat{v}_o|$, on dira que S est contractant en "mesure-norme" de B_o dans $\mathcal{B}_1$.

L'opérateur S permet de résoudre (EL) pour $F = G = 0$, puisque $v = Sv_o$, $w = - v$ sont solution (au sens des distributions).

Définition 4. Pour $h \in \mathcal{B}_o$ et $t \geqslant 0$, on pose : $I^+h(t) = \int_0^t S(t-\tau)h(\tau)_x d\tau$. On vérifie que $I^+h(t)$ est une fonction continue de $t \geqslant 0$ à valeurs dans B_o et que si $|h(\tau)\hat{}|\leqslant \mu$ on a $|I^+h(t)\hat{}| \leqslant \mu \ \forall t$. Cela définit I^+ comme un opérateur contractant en mesure-norme sur $\mathcal{B}_o$. Pour $0 \leqslant \alpha < 1$, I^+ opère sur $\mathcal{B}_\alpha$ avec $|I^+h|_\alpha \leqslant \frac{1}{1-\alpha} |h|_\alpha$.

L'opérateur I^+ donne la solution nulle en $t = 0$ de l'équation $u_t + \Lambda u = h_x$, par $u = I^+h$, pour $h \in \mathcal{B}_o$.

On obtiendra de même la solution "nulle à l'infini" de l'équation $u_t - \Lambda u = h_x$, par $u = - I^-h$, où I^- est un autre opérateur contractant sur $\mathcal{B}_o$.

Définition 5. Pour $h \in \mathcal{B}_o$ et $t \geqslant 0$, on pose :

$I^-h(t) = \int_t^\infty S(\tau-t)h(\tau)_x d\tau$. On vérifie également que $I^-h(t)$ est une fonction continue de $t \geqslant 0$ à valeurs dans B_o et que $|h(\tau)\hat{}|\leqslant\mu$ implique $|I^-h(t)\hat{}| \leqslant \mu \ \forall t$. Pour tout $\alpha \geqslant 0$, I^- opère sur $\mathcal{B}_\alpha$ avec $|I^-h|_\alpha \leqslant \frac{1}{1+\alpha}|h|_\alpha$.

Enfin l'opérateur $I_o : \mathcal{B}_o \to B_o$ est défini par $I_o h = I^-h(o)$.

Munis de ces notations, nous pouvons résoudre le système (EL) par les formules :

$$\begin{cases} v = Sv_o + \frac{1}{2} \ SI_o(F+G) + \frac{1}{2} I^+(F-G) - \frac{1}{2} I^-(F+G) , \\ - w = Sv_o + \frac{1}{2} \ SI_o(F+G) + \frac{1}{2} I^+(F-G) + \frac{1}{2} I^-(F+G) . \end{cases}$$

En effet, d'une part on vérifie facilement que si F et G sont données dans $\mathcal{B}_o$ ces expressions donnent bien une solution au sens des distributions du système (EL) ; d'autre part une telle solution est unique dans $\mathcal{B}_o \times \mathcal{B}_o$ à une constante additive près pour w . Cette solution est donc la seule qui vérifie $\hat{w}(\{0\}) = - \hat{v}(\{0\})$.

Si nous résumons les formules ci-dessus par la notation $(v,w) = \mathcal{S}(F,G,v_o)$, nous obtenons la formulation de (E) comme problème de point fixe :

$$(y_x,\omega) = \mathcal{T}(y_x,\omega) = \mathcal{S}(F(y_x,\omega),\ G(y_x,\omega),\ y_{ox}) \ .$$

La suite de cet article consiste à montrer que pour $y_{ox} \in B_o$ de norme assez petite, l'opérateur $\mathcal{T}$ est contractant sur une boule de $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\alpha$ muni de la norme $\|(v,w)\|_\alpha = \sup(\|v\|_\alpha, \|w\|_\alpha)$.

Cela résultera d'une estimation ponctuelle sur la transformée de Fourier de $F(y_x,\omega)$ et $G(y_x,\omega)$ qui sera l'objet des paragraphes qui suivent.

§ 3. DECOMPOSITION DE F ET G .

Nous allons décomposer $F(y_x,\omega)$ et $G(y_x,\omega)$ en série d'opérateurs intégraux singuliers appliqués à 1 et à ω . Chaque opérateur sera ensuite décomposé en une partie singulière triviale (transformation de Hilbert) et une somme d'opérateurs à noyaux réguliers.

Pour y_x donné dans B_o , et $j = 0,1,\dots,$ notons $T_j(y_x)$ l'opérateur intégral singulier de noyau $\frac{1}{\pi}\frac{P^j}{x-x'}$, , c'est à dire défini par :

$$T_j(y_x)\ \Omega(x) = \frac{1}{\pi} \ \fint \left(\frac{y(x)-y(x')}{x-x'}\right)^j \frac{\Omega(x')}{x-x'}\ dx' \ .$$

Remarquons que $T_o(y_x)$ est simplement la transformation de Hilbert :

$$H\Omega(x) = \frac{1}{\pi} \fint \frac{\Omega(x')}{x-x'}\, dx' \ ,$$

on sait que $H\Omega\hat{}(\xi) = - i\,\mathrm{sgn}\xi\,\hat{\Omega}(\xi)$ (sgnξ est le signe de ξ) et en convenant que sgn 0 = 0 , il vient H1 = 0 .

On a alors (formellement) les décompositions en série

$$F(y_x,\omega) = \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon_j\ T_j(y_x)\ (1+\omega) + y_x \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon'_j\ T_j(y_x)(1+\omega) \ ,$$

$$G(y_x,\omega) = \omega H y_x + (1+\omega)\ T_1(y_x)\omega + (1+\omega) \sum_{j=3}^{\infty} \varepsilon''_j\ T_j(y_x)(1+\omega) \ ,$$

où ε_j , ε'_j , ε''_j valent -1, 0 ou 1 .

Décomposons maintenant chaque $T_j(y_x)$ $(j = 1,2,\ldots)$:

$$T_j(y_x)\,\Omega = y_x^j\, H\Omega - \sum_{k=1}^{j} y_x^{j-k}\, R_k(y_x)\Omega \quad ,$$

où
$$R_k(y_x)\Omega\ (x) = \frac{1}{\pi} \int (\frac{1}{k}\, P^k)_x\ \Omega(x')dx' \ .$$

En effet $\dfrac{P^j - y_x(x)^j}{x-x'} = \dfrac{P-y_x(x)}{x-x'} \displaystyle\sum_{k=1}^{j} y_x(x)^{j-k}\, P^{k-1}$,

et $\dfrac{P-y_x(x)}{x-x'} = -\, p_x$, $P^{k-1} p_x = (\frac{1}{k}\, P^k)_x$.

Remarque. On verra au paragraphe suivant que pour $y_x \in B_o$ les $T_j(y_x)$ définissent des opérateurs continus sur B_o avec $\sum_{j=1}^{\infty} \| T_j(y_x)\|_{\mathcal{L}(B_o)} < +\infty$ lorsque $\|y_x\| < 1$. Il s'ensuit que pour $\|y_x\| < 1$ et $\omega \in B_o$ les séries définissant F et G convergent normalement dans B_o .

§ 4. L'INEGALITE DE BASE.

Le point fixe contractant repose sur une majoration de $|F(y_{1x},\omega_1) - F(y_{2x},\omega_2)|_\rho$ donnée par le lemme suivant.

Lemme. Soient y_{1x} , y_{2x} , ω_1 , ω_2 des élements de $\mathcal{B}_\rho$. On suppose $|y_{ix}|_\rho$, $|\omega_i|_\rho \leqslant \mu$ $(i = 1,2)$, ainsi que $|y_{1x}-y_{2x}|_\rho$, $|\omega_1-\omega_2|_\rho \leqslant \nu$,

où μ et ν sont deux mesures positives bornées, μ de norme < 1 . On a alors :

$$|F(y_{1x},\omega_1) - F(y_{2x},\omega_2)|_\rho \leqslant A(\mu) * \nu \quad ,$$

où A est une application continue de la boule ouverte de rayon 1 de $\mathcal{M}_+$ (ensemble des mesures positives bornées) dans $\mathcal{M}_+$ telle que $A(0) = 0$. On a la même inégalité pour G .

Avant de démontrer ce lemme, introduisons les opérateurs $R_k(y_{1x},\ldots,y_{kx})$ définis formellement par :

$$R_k(y_{1x},\ldots,y_{kx})\ \Omega(x) = \frac{1}{\pi} \int (\frac{1}{k}\, p_1 \cdots p_k)_x\ \Omega(x')dx' \ ,$$

où $P_i(x,x') = \dfrac{y_i(x)-y_i(x')}{x-x'}$.

On a alors :

<u>Proposition</u>. Si les y_{ix} , $i = 1,\dots k$, sont des éléments de B_ρ $R_k(y_{1x},\dots y_{kx})$ est un opérateur borné de B_o dans B_ρ , et on a :

$$|R_k(y_{1x},\dots y_{kx})\Omega|_\rho \leq 2|y_{1x}|_\rho * \dots * |y_{kx}|_\rho * |\Omega|_{-\rho} \quad .$$

<u>Démonstration de la Proposition</u>.

L'opérateur $R_k(y_{1x},\dots y_{kx})$ se définit commodément via la transformation de Fourier.

La transformée de Fourier du noyau est en effet

$$\frac{2i\xi}{k}(\hat{p}_1 * \dots * \hat{p}_k) \ ,$$

or on calcule facilement, en notant $\widehat{y_{ix}} = \mu_i$:

$$\hat{p}_i = \int I_\lambda d\mu_i(\lambda) \ ,$$

où I_λ est la mesure de masse 1 uniformément répartie sur le segment $\{(\xi,\xi') : \xi + \xi' = \lambda \ , |\xi| + |\xi'| \leq |\lambda|\}$.

La transformée de Fourier du noyau est donc la mesure

$$M_k = \frac{2i\xi}{k} \int\dots\int I_{\lambda_1} * \dots * I_{\lambda_k} \, d\mu_1(\lambda_1)\dots d\mu_k(\lambda_k) \ .$$

$I_{\lambda_1} * \dots * I_{\lambda_k}$ est une mesure positive de masse 1 portée par la droite $\xi + \xi' = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ dont la densité (en ξ) sera notée $\sigma_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(\xi)$.

On vérifie que $\sigma_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(\xi) \leq \dfrac{1}{\max_i |\lambda_i|}$ et que cette fonction est nulle pour $|\xi| + |\Sigma\lambda_i - \xi| > \Sigma\,|\lambda_i|$.

Ce noyau mesure M_k permet de définir un opérateur continu $\mathcal{M}_k$ sur les mesures bornées par la formule :

$$\langle \mathcal{M}_k \nu, \varphi \rangle = \frac{2i}{k} \int \dots \int (\Sigma\lambda_i + a)\sigma_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(\Sigma\lambda_i + a)\varphi(\Sigma\lambda_i + a) d\mu_1(\lambda_1)\dots d\mu_k(\lambda_k) d\nu(a) \ ,$$

où φ désigne une fonction test continue à support compact.

En effet, de l'inégalité $|\xi\,\sigma_{\lambda_1\dots\lambda_k}(\xi)| \leqslant k$, on déduit

$$|M_k\nu| \leqslant 2|\mu_1|*\dots*|\mu_k|*|\nu| \quad .$$

L'opérateur R_k sur B_o se définit par $\widehat{R_k\Omega} = M_k\hat{\Omega}$. Ecrivons donc $|R_k(y_{1x},\dots,y_{kx})\Omega|_\rho = |e^{\rho r}M_k\hat{\Omega}|$, or on a pour une fonction test positive φ

$$<|e^{\rho r}M_k\hat{\Omega}|,\varphi> \leqslant \frac{2}{k}\int\dots\int|\Sigma\lambda_i+a|\sigma_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(\Sigma\lambda_i+a)\varphi(\Sigma\lambda_i+a)e^{\rho 2\pi|\Sigma\lambda_i+a|}d|\mu_1|(\lambda_1)\dots d|\hat{\Omega}|(a) \; ;$$

mais puisque $\sigma_{\lambda_1,\dots\lambda_k}(\xi)$ est nul pour $|\xi| + |\Sigma\lambda_i - \xi| > \Sigma\,|\lambda_i|$,

on peut majorer dans l'intégrale $|\Sigma\lambda_i+a|$ par $\Sigma|\lambda_i| - |a|$,
d'où il vient :

$$|e^{\rho r}M_k\hat{\Omega}| \leqslant 2\,e^{\rho r}|\mu_1| * e^{\rho r}|\mu_2|*\dots*e^{-\rho r}|\hat{\Omega}| \; ,$$

d'où le résultat. ∎

Montrons maintenant le Lemme.

De la proposition on déduit immédiatement l'inégalité

$\|T_j(y_x)\Omega\| \leqslant (1+2j)\|y_x\|^j\|\Omega\|$, et donc les séries définissant F et G convergent dans B_o .

$$\text{On a } F(y_{1x},\omega_1) - F(y_{2x},\omega_2) = \sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon_j[T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2x})\Omega_2] \; +$$

$$+ (y_{1x} - y_{2x})\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j'\,T_j(y_{1x})\Omega_1 + y_{2x}\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j'\,[T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2\,x})\Omega_2] \; ,$$

où on a noté $\Omega_i = 1 + \omega_i$.
Ce qui donne, en mesure norme $|.|_\rho$:

$$|F(y_{1x},\omega_1) - F(y_{2x},\omega_2)|_\rho \leqslant \sum_{j=2}^{\infty}|T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2x})\Omega_2|_\rho \; +$$

$$+ |y_{1x} - y_{2x}|_\rho * \sum_{j=1}^{\infty}|T_j(y_{1x})\Omega_1|_\rho + |y_{2x}|_\rho * \sum_{j=1}^{\infty}|T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2x})\Omega_2|_\rho \; .$$

En utilisant la décomposition de T_j et la proposition, on obtient :

$$|T_j(y_x)\Omega|_\rho \leqslant (1+2j)\;|y_x|_\rho^{*j} * |\Omega|_\rho \quad ,$$

où on note

$$\mu^{*j} = \mu * \ldots * \mu \quad (j \text{ fois}).$$

Majorons $|T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2x})\Omega_2|_\rho$, on a :

$$T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2x})\Omega_2 = (y_{1x}^j - y_{2x}^j)H\Omega_1 + y_{2x}^j H(\Omega_1 - \Omega_2) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j} (y_{2x}^{j-k} - y_{1x}^{j-k})R_k(y_{2x})\Omega_2 + y_{1x}^{j-k} [R_k(y_{2x})\Omega_2 - R_k(y_{1x})\Omega_1] .$$

En écrivant $y_{1x}^i - y_{2x}^i = (y_{1x} - y_{2x}) \left(\sum_{k=1}^{i} y_{1x}^{i-k} y_{2x}^{k-1} \right)$, il vient

$|y_{1x}^i - y_{2x}^i|_\rho \leqslant i\, \mu^{*(i-1)} * \nu$.

De même en utilisant $p_2^k - p_1^k = (p_2 - p_1) \left(\sum_{i=1}^{k} p_2^{k-i} p_1^{i-1} \right)$ et la proposition, on obtient

$$|R_k(y_{2x})\Omega_2 - R_k(y_{1x})\Omega_1|_\rho \leqslant 2k\, \mu^{*(k-1)} * \nu + 2(k+1)\mu^{*k} * \nu ,$$

ceci en remarquant que $|\Omega_i|_\rho \leqslant \delta + \mu$ (où δ est la masse de Dirac à l'origine).

Un calcul direct donne alors

$$|T_j(y_{1x})\Omega_1 - T_j(y_{2x})\Omega_2|_\rho \leqslant C(j)\, (\mu^{*(j-1)} + \mu^{*j}) * \nu \quad ,$$

où $C(j) = 2j^2 + 3j + 1$.

On en déduit $|F(y_{1x},\omega_1) - F(y_{2x},\omega_2)| \leqslant A(\mu) * \nu$,

où $A(\mu) = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)\, \mu^{*j}$, avec

$$a(1) = 24 \ , \ a(j) = 8(j+1)^2 \quad \text{pour } j = 2,3\ldots$$

$A(\mu)$ est définie pour toute mesure bornée μ de norme < 1 ; c'est une application continue nulle en 0 .

Le calcul est analogue pour G .■

§ 5. LE RESULTAT

<u>Théorème</u>. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $y_{ox} \in B_o$ de moyenne nulle (i.e. $\widehat{y_{ox}}(\{0\}) = 0$) et de norme $\leqslant \varepsilon$, il existe $\alpha > 0$ et (y_x, ω) dans $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\alpha$ solution (au sens des distributions) du système :

$$\begin{cases} y_{xt} - \Lambda\omega = F(y_x,\omega)_x \ , \\ \omega_t - \Lambda y_x = G(y_x,\omega)_x \ , \\ y_x(0) = y_{ox} \ , \quad \omega(0) \text{ de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Une telle solution est unique dans une boule convenable de l'espace $\mathcal{B}_o \times \mathcal{B}_o$. Et $y_x(t),\omega(t)$ tendent vers 0 uniformément lorsque t tend vers l'infini.

Démonstration. Grâce à l'estimation du paragraphe précédent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\| y_{ox} \| \leqslant \varepsilon$ il existe $\alpha > 0$ et une boule de $\mathcal{B}_\alpha \times \mathcal{B}_\alpha$ que $\mathcal{T}$ envoie dans elle même de façon contractante. Le point fixe de $\mathcal{T}$ dans cette boule est solution du sytème avec $y_x(o) = y_{ox}$, et $\omega(0) = -y_{ox} + I_o(F+G)$ est de moyenne nulle si y_{ox} est de moyenne nulle.
Puisque $y_x \in \mathcal{B}_\alpha$, on a $|\hat{y}_x(t)| \leqslant {}^{-\alpha t 2\pi |\xi|}\mu$, où μ est une mesure positive bornée qu'on peut supposer sans masse en 0 ; on a alors

$$\| y_x(t) \| \leqslant \int e^{-\alpha t 2\pi|\xi|} d\mu(\xi) \ ,$$

et cette dernière intégrale tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Même chose pour ω .
L'unicité est évidente du fait de la contraction. ■

Remarque. L'idée d'estimer les opérateurs intégraux par des majorations ponctuelles sur la transformée de Fourier, qui joue ici un rôle essentiel, n'est pas nouvelle. A quelques variantes de présentation près, on la trouvera dans Coifman et Meyer [3] .

Nous remercions tout particulièrement Michelle Schatzman d'avoir attiré notre attention sur cette question. Nous remercions également Yves Meyer et Claude Bardos pour de fructueuses et stimulantes conversations.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] K.I. Babenko, V.H. Petrovich, Dolk. Akad. Nauk. SSSR 245, 1979, 551-554.

[2] G. Birkhoff, Helmholtz and Taylor instability, in Proc. Symp. Appl. Math. Vol 13, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1962.

[3] R.R. Coifman, Y. Meyer, On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. Trans. Amer. Math. Soc 212, 1975, 315-331.

[4] C. Sulem, P.L. Sulem, C. Bardos, U. Frisch, Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability. Comm. Math. Phys. 80, 1981, 485-516.

*
* *
*