E. Leichtnam

Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 9, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS SINGULIERES POUR DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

par E. LEICHTNAM

Exposé n°IX

21 Janvier 1986

§ 0. INTRODUCTION.

Soit P un opérateur quasi-linéaire d'ordre m :

$$u \to Pu = \sum_{|\alpha|=m} P_\alpha(x,u,\ldots,\partial_x^\beta u,\ldots)_{|\beta|\leqslant m-1}\ \partial_x^\alpha u + R(x,\partial^\beta u)$$

où les P_α , R sont holomorphes en leurs arguments pour x près de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\partial_x^\beta u$ près de $u_o^{(\beta)} \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{N}^{n+1}$; $|\beta| \leqslant m-1$. Dans cet article, on construit des solutions locales $u(x)$ de l'équation $Pu = 0$, la fonction $u(x)$ étant holomorphe ramifiée autour d'une hypersurface complexe lisse S passant par $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ d'équation $s(x) = 0$, et de la forme :

$$u(x) = a(x) + \sum_{k=o}^{+\infty} b_k(x)\ s^{\gamma_k}(x) \tag{0}$$

où (γ_k) est une suite de R_+^* strictement croissante et tendant vers $+\infty$, les fonctions a et b_k sont holomorphes dans un voisinage Ω de 0 , et la série de (0) converge sur le revêtement de $\Omega \setminus S$. Nous travaillerons toujours avec l'hypothèse suivante :

L'hypersurface S est simplement caractéristique pour l'équation linéarisée P_{lin} de P en a , c'est-à-dire que le symbole principal p_m de P_{lin} :

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} P_\alpha(x,a(x),\partial_x^\beta a(x))_{|\beta|\leqslant m-1}\,\xi^\alpha$$

vérifie les deux conditions suivantes :

$$p_m(x,ds(x))|_S \equiv 0,\quad \partial_\xi p_m(0,ds(0)) \neq 0 .$$

On supposera toujours connues les données $\partial_t^p a|_{t=o} (p \leqslant m-1)$, $b_k|_{t=o} (k \geqslant 0)$, $s|_{t=o}$ où $t = 0$ est l'équation d'une hypersurface complexe lisse T transverse au champ de vecteurs $\partial_\xi p_m(x,ds(x))$. On utilisera le développement linéarisé de P près de $a(x)$:

$$P(a+r) = P(a)+P_\ell . r - H(x,\partial^{\alpha'} r)$$

$$P_{lin} r = \sum_{\alpha'} \frac{\partial P}{\partial u_{\alpha'}} (x,\partial^{\beta'} a).\partial^{\alpha'} r$$

$$H(x,u_{\alpha'})_{|\alpha'|\leqslant m} = \int_0^1 (v-1)\Sigma C_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (x,\partial^\delta a+vu_\delta)u_\alpha u_\beta dv$$

où $C_{\alpha,\beta}$ vaut 1 si $\alpha = \beta$ et 2 sinon. Comme P est quasi-linéaire on a $|\alpha|+|\beta| \leqslant 2m-1$ (et $|\delta|\leqslant m$), en outre si $|\alpha|+|\beta| = 2m-1$ alors $|\delta| \leqslant m-1$; ces deux faits sont essentiels.

L'article comprend deux parties. Dans la première on se donne a et S vérifiant les conditions précédentes, on suppose $P(a) \equiv 0$, et on construit des solutions du type (0) peu singulières : on choisit $\gamma_k = m+(k+1)\mu$ où $\mu \in]0,1[$ de sorte que la solution u admette m dérivées bornées. Le résultat est énoncé dans le théorème 1.1.3 où sont introduites des algèbres A^m . Dans la seconde partie (plus délicate), on s'intéresse à des solutions du type (0) avec $\gamma_k = m-1/2+k/2$. L'étude des solutions de l'équation de Burger $\partial_t^2 u-u\partial_y^2 u = 0$ (pour laquelle on vérifie qu'il n'existe pas de solutions du type $a+s^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$ et $\gamma \neq 1/2$) laisse penser que ce cas est le seul raisonnable. Contrairement à la situation précédente, a ne sera plus nécessairement solution de $Pa = 0$ si b_o est non nul (cf. équation (4) dans II) ; a et S seront ici des <u>inconnues</u> au même titre que les $b_k (k \geqslant 0)$. Le théorème 1.1.6 assure l'existence de solutions de ce type.

Rappelons que pour les équations aux dérivées partielles <u>linéaires</u> à caractéristiques simples, le problème de la construction de solutions holomorphes ramifiées (d'un type plus général que (0) a été étudié dans [6] . Dans [2] et pour des équations <u>semi-linéaires</u> avec R polynomial en ses arguments, les auteurs ont construit des solutions d'un type analogue à (0) mais dans le cas où S est non caractéristique $(p_m(0,ds(0)) \neq 0)$.

Il m'est agréable de remercier G. Lebeau qui m'a proposé le sujet de ce travail et communiqué plusieurs idées.

§ 1. ENONCE DES RESULTATS.

Dans la partie I la fonction holomorphe a et S (d'équation $s(x) = 0$) sont données et on suppose que $Pa \equiv 0$. Un changement de coordonnées permet de supposer que S est définie par l'équation $s = y_1 = 0$. Posons $x = (y,t)$ et

$$1 - y/R = \prod_{j=1}^{n} (1-y_j/R) \quad (R > 0)$$

Si $u = \sum_\alpha u_\alpha y^\alpha$ et $v = \sum v_\alpha y^\alpha$ sont deux séries formelles à coefficients complexes nous écrirons $u << v$ pour exprimer que $\forall\alpha\ ,|u_\alpha| \leqslant v_\alpha$.

Définition 1.1.1. Soit Y_1 une indéterminée. Etant donné $R > 0$, $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}$, $A^d(R,\varepsilon,p)$ désigne l'ensemble des séries formelles du type

$$u = u(x,Y_1) = \sum_{j\geqslant 0} \sum_{k\geqslant 1} u_{k,j}(y,t)Y_1^{k\mu+j+d} \qquad (0 < \mu < 1)$$

où les fonctions $u_{k,j}$, holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, vérifient :

$$u_{k,j} << \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{(1-y/R)^{k+j+\ell}} \frac{(k+j+\ell)!}{\ell!(k+j+p)!} C^p_{kj\ell}$$

$$N^{p,d}(u) = \sum_{k,j,\ell} C^p_{kj\ell}\ \varepsilon^{k+2j+\ell} < +\infty$$

Plus précisément nous définissons $N^{p,d}$ en supposant que les $C^p_{kj\ell}(u)$ sont les plus petits réels $\geqslant 0$ permettant de majorer u_{kj} .

On pose $$A^d(R) = \bigcup_{\varepsilon>0} A^d(R,\varepsilon,p),\ A^d = \bigcup_{R>0} A^d(R)$$

Dans la suite de la partie I on peut supposer $0 < \varepsilon \leqslant 1,\ 0 < R \leqslant 1$.

Remarque 1.1.2. La non linéarité de P entraine la présence des exposants $k\mu$, celle des j résulte de la méthode d'optique géométrique que nous utiliserons, d assure une régularité minimale. A un élément $u \in A^d(R,\varepsilon,p)$ on associe de manière non injective une fonction $u(x) = \sum u_{k,j}\ y_1^{k\mu+j+d}$.

Si $r_1 \in A^{d_1}$ et $r_2 \in A^{d_2}$ alors $r_1\ r_2$ appartient à $A^{d_1+d_2}$.

Si α est un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $\leqslant d$ alors on fait opérer ∂^α de A^d dans $A^{d-|\alpha|}$ de manière évidente. Comme S est caractéristique, on véfifie alors que P_{lin} envoie A^d dans A^{d-m+1} . La partie I donne le plan de la preuve du théorème suivant :

Théorème 1.1.3. Soient $u_o \in A^m(\mathbb{C}^n)$ et T une hypersurface analytique passant par $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, d'équation $t = 0$, et transverse au champ $\partial_\xi P_m(x,dy_1)$ (et donc à S). Alors il existe $r \in A^m(\mathbb{C}^{n+1})$ telle que $P(a(x)+r(x)) \equiv 0$ et $r_{|t=o} = u_o$.

La preuve du théorème 1.1.3 se décompose en gros comme suit : étant donné $u \in A^m$ tel que $u_{|t=o} = u_o$, on construit par l'optique géométrique, une solution $V \in A^m$ de l'équation $P_\ell v = H(x,\partial^\alpha u) \in A^1$, $v_{|t=o} = u_o$, on définit un opérateur T en posant $T(u) = v$ et on montre qu'il existe des normes du type $N^{m,m}(R,\varepsilon)$ permettant d'appliquer le théorème du point fixe à T. Dans la partir II nous utiliserons les algèbres définies ci-après :

<u>Définition 1.1.4.</u> $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ désigne l'algèbre des séries formelles du type :

$$r(x,S) = \sum_{k=o}^{+\infty} b_k(x)\, S^{\frac{k+2m-1}{2}}$$

où on suppose que les b_k sont holomorphes sur un même voisinage U de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout k de $\mathbb{N}$ et x de U on ait $|b_k(x)| \leqslant C^{k+1}$.

Plus loin nous substituerons à l'indéterminée S une fonction holomorphe $s(x)$ s'annulant en l'origine et définissant l'équation d'une hypersurface caractéristique pour P_{lin}. Pour $|\alpha| \leqslant 1$ nous définirons alors l'action de ∂^α sur B^{m-1} en convenant que :

$$\partial^\alpha(S^{\frac{k+2m-1}{2}}) = \frac{k+2m-1}{2}\, S^{\frac{k+2m-3}{2}}\, \partial^\alpha s(x) ,$$

et nous définirons l'action de ∂^α, pour $|\alpha| \leqslant m-1$, par récurrence. A un élément $r(x,S)$ de $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ nous associerons de manière non injective une fonction $x \to r(x,s(x))$ définie près de l'origine. La partie II donne le plan de la preuve du théorème 1.1.6, avant de l'énoncer nous définissons quelques notations.

<u>Notations 1.1.5</u> $x = (y,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Supposons que l'opérateur quasi-linéaire P de l'introduction soit de la forme $P = \partial_t^m + Q(y,t,\partial^\alpha)$ où $|\alpha| \leqslant m$, $\alpha \neq (m,0,\dots,0)$. Le symbole principal de l'opérateur $P_{lin}(a)$ de P en a est de la forme $p_m(y,t,\partial^\beta a,\xi,\tau)$ où $|\beta| \leqslant m-1$ (P est quasi-linéaire). Considérons alors des données de Cauchy $a_p(y)$ $0 \leqslant p \leqslant m-1$ holomorphes près de $0 \in \mathbb{C}^n$ et un point (ξ^o,τ^o) de $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}) \setminus 0$. Supposons que :

$$p_m(0,\partial^{\beta'} a_p(0),\xi^o,\tau^o) = 0 , \quad \partial_\tau p_m(0,\partial^{\beta'} a_p(0),\xi^o,\tau^o) \neq 0$$

où $p+|\beta'| \leqslant m-1$. On choisit alors la racine $\tau_1(x,u_\beta,\xi)$ de l'équation (en τ) $p_m(x,u_\beta,\xi,\tau) = 0$, holomorphe près du point $(0,\partial^{\beta'} a_p(0),\xi^o)$ et y prenant la valeur τ^o . Enfin soit s_1 holomorphe près de $0 \in \mathbb{C}^n$ telle que $s_1(0) = 0$ et $ds_1(0) = \xi^o$.

<u>Théorème 1.1.6.</u> (avec ces notations). Soit $\Sigma\, b_k^1(y)\, S^{\frac{k+2m-1}{2}}$ appartenant à $B^{m-1}(\mathbb{C}^n)$ (voir def.1.1.4). Alors il existe un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ sur lequel il existe des fonctions holomorphes $s,a,b_k (k \in N)$ telles que : $b_k(0,y) = b_k^1$, $\partial_t^p a(0,y) = a_p$ $(p \leqslant m-1)$, $\partial_t s(0) = \tau^o$, $s(0,y) = s_1$, s est caractéristique pour P_{lin} et :

$$r(x,S) = \sum_{k=o}^{+\infty} b_k(x)\, S^{\frac{k+2m-1}{2}} \in B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$$

et $x \to a(x)+r(x,s(x\ ))$ est solution de $P = 0$.

Dans la preuve donnée dans [4] nous commencerons par définir des normes formelles relatives à B^{m-1} et permettant d'obtenir de très bonnes majorations. Nous devrons redémontrer le théorème de Cauchy-Kovaleska. Nous utiliserons la linéarisation de P en a écrite dans l'introduction, nous montrerons qu'on peut appliquer le théorème du point fixe dans un Banach où l'inconnue est la suite infinie $(b_o,b_1,\ldots,)$. Pour cela nous établirons des identités algébriques permettant d'écrire un système infini d'équations de sorte que la donnée de b_o permette de déterminer a et s à chaque itération.

§ 2. PREUVE DU THEOREME 1.1.3.

Nous allons donner une liste de résultats constituant le squelette de la preuve, les démonstrations sont exposées dans [4]. La proposition suivante précise les domaines géométriques de convergence associés aux normes $N^{p,d}$ définies en 1.1.1.

<u>Proposition 1.2.7.</u> 1°) Soit $u \in A^d(R,\varepsilon,p)$, alors u_{kj} est holomorphe dans

$$\Omega = \{(y,t) \in \mathbb{C}^{n+1} \ ;\ |y_j| < R \ \text{ et } \ |t| < \varepsilon \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{|y_j|}{R}\right)\}$$

et, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ tel que

$$\sup_K |u_{kj}| \leqslant C_K^{k+j+1}$$

2°) Réciproquement, soit (u_{kj}) une suite de fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert V de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ telles que $\sup_V |u_{kj}| \leqslant C^{k+j+1}$, alors

$\Sigma\, u_{k,j}\, Y_1^{k\mu+j+d} \in A^d$.

Remarque 1.2.2. Muni de la norme $N^{p,d}$ $A^d(R,\varepsilon,p)$ est un espace de Banach. Si $p' \geqslant p$ il est clair que la norme $N^{p',d}$ majore la norme $N^{p,d}$. Soit $d' \in d+\mathbb{N}$, une simple opération de décalage sur l'indice j montre alors que :

$$\forall u \in A^{d'}(R,\varepsilon,0),\ N^{o,d}(u) \leqslant \varepsilon^{2(d'-d)} N^{o,d'}(u)$$

Proposition 1.2.3. Soient $d_j \geqslant 0$ et $u_j \in A^{d_j}(R,\varepsilon,0)$ pour $1 \leqslant j \leqslant q$. Posons $d = \sum_1^q d_j$. Alors $\prod_1^q u_j$ appartient à $A^d(R,\varepsilon,0)$ et :

$$N^{o,d}\left(\prod_{j=1}^{q} u_j\right) \leqslant \prod_{j=1}^{q} N^{o,d_j}(u_j)$$

Le résultat suivant m'a été communiqué par C. WAGSCHAL .

Lemme 1.2.4. Considérons $\ell \in \mathbb{N}$ et $0 < R < R'$. Alors :

$$\frac{1}{1-y/R'}\ \frac{1}{(1-y/R)^{\ell+1}} << \frac{R'}{R'-R}\ \frac{1}{(1-y/R)^{\ell+1}}$$

Preuve. En faisant la différence des deux termes on obtient :

$$\left(\frac{R'}{R'-R} - \frac{1}{1-y/R'}\right) \frac{1}{(1-y/R)^{\ell+1}} = \frac{R}{R'-R}\ \frac{1}{(1-y/R)^{\ell}}\ \left(1 - \frac{y}{R'}\right)^{-1}$$

comme les coefficients de cette série entière sont $\geqslant 0$ le résultat est prouvé.

Proposition 1.2.5. Soient b une fonction holomorphe et bornée par K sur un polydisque centré en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ de rayon R' et $u \in A^d(R,\varepsilon,p)$ avec $0 < R < R'$, $0 < \varepsilon < R'$. Alors $b\,u \in A^d(R,\varepsilon,p)$ et :

$$N^{p,d}(bu) \leqslant \left(\frac{R'}{R'-R}\right) \frac{R'}{R'-\varepsilon}\, K\, N^{p,d}(u)$$

Proposition 1.2.6. Soient $F(x,u)$ une fonction holomorphe et bornée par K sur un polydisque centré en $0 \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^q$ de rayon R' et $u_1,\dots u_q \in A^{\circ}(R,\varepsilon,0)$, $0 < R < R'$, $0 < \varepsilon < R'$, telles que $N^{o,o}(u_j) < R'$. Alors $v = F(x,u_1,\dots,u_q) - F(x,o) \in A^o(R,\varepsilon,0)$ et

$$N^{o,o}(v) \leqslant K(\frac{R'}{R'-R})\ \frac{R'}{R'-\varepsilon}\ \prod_{j=1}^{q} (1 - \frac{N^{o,o}(u_j)}{R'})^{-1} \quad .$$

<u>Proposition 1.2.7.</u> Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\alpha| \leqslant m$, $|\alpha| \leqslant p$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in A^m(R,\varepsilon,p)$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < R \leqslant 1$,

$$N^{p-|\alpha|,m-|\alpha|}(\partial^\alpha u) \leqslant c\ R^{-|\alpha|} N^{p,m}(u)$$

<u>Preuve</u>. Nous prouverons le résultat quand $|\alpha| = 1$, le cas général s'en déduisant par récurrence. Nous distinguerons trois cas correspondant à t,y_1,y_q $(q \geqslant 2)$ au cours desquels nous effectuerons des décalages d'indices. Soit $q \geqslant 2$, on a :

$$\partial_{y_q} u_{kj} << \frac{1}{R} \sum_{\ell} \frac{t^\ell}{(1-y/R)^{k+j+\ell+1}} \quad \frac{(k+j+\ell+1)!}{\ell!(k+j+1+p-1)!} \quad C^p_{kj\ell}(u)$$

Dans l'expression de $\partial_{y_q} u \in A^{m-1}$ $\partial_{y_q} u_{kj}$ est le terme d'indice $(k,j+1)$ donc :

$$C^{p-1}_{kj\ell}(\partial_{y_q} u) \leqslant \frac{1}{R} \quad C^p_{k,j-1,\ell}(u) \quad j \geqslant 1$$

On en déduit que : $N^{p-1,m-1}(\partial_{y_q} u) \leqslant \varepsilon^2\ R^{-1}\ N^{p,m}(u)$. Pour ∂_{y_1} on reprend ce qui précède et considère en plus le cas où on dérive $y_1^{k\mu+j+m}$ au lieu de u_{kj} , on obtient alors (les termes d'indices < 0 sont nuls) :

$$C^{p-1}_{kj\ell}(\partial_{y_1} u) \leqslant \frac{1}{R} \quad C^p_{k,j-1,\ell}(u) \ + \ \frac{k\mu+j+m}{k+j+P} \quad C^p_{kj\ell}(u)$$

Donc $N^{p-1,m-1}(\partial_{y_1} u) \leqslant \frac{1}{R}\ (\varepsilon^2 + \text{cte}) N^{p,m}(u)$. $\partial_t u_{k,j}$ est, dans l'expression de $\partial_t u \in A^{m-1}$, le terme d'indice $(k,j+1)$ et on a :

$$\partial_t u_{kj} << \sum_{\ell} \frac{t^\ell}{(1-y/R)^{k+\ell+j+1}} \quad \frac{(k+\ell+j+1)!}{\ell!(k+p-1+j+1)!} \quad C^p_{k,j,\ell+1}\ (u)$$

Donc $C^{p-1}_{kj\ell}(\partial_t u) \leqslant C^p_{k,j-1,\ell+1}(u)$ et :

$$N^{p-1,m-1}(\partial_t u) \leqslant \varepsilon\ N^{p,m}(u) \qquad \text{cqfd.}$$

Le théorème suivant permet de contrôler le terme non linéaire $H(x,\partial^\alpha u)$ (voir introduction). On fixe $R' > 0$ de telle façon que toutes les fonctions $H(x,u,v)$ apparaissant dans la décomposition de $H(x,u)-H(x,v)$ soient holomorphes et bornées sur le polydisque centré en 0 et de rayon R' , puis on fixe

$R_o > 0$, $\varepsilon_o > 0$ tel que $R_o \leqslant 1$, $R_o < R'$ et $\varepsilon_o \leqslant 1$, $\varepsilon_o < R'$. On a alors le :

<u>Théorème 1.2.8.</u> Il existe $c > 0$ tel que, pour

$$0 < R \leqslant R_o \quad , 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_o$$

$$0 < r \leqslant c\ R^{2m}$$

l'application $u \to H(x,\partial u)$ envoie la boule fermée $B(0;r) \subset A^m(R,\varepsilon,m)$ dans la boule fermée $B(0;\frac{r}{2}) \subset A^1(R,\varepsilon,0)$ et soit lipschitzienne de rapport $1/2$.

<u>Preuve</u>. Etant donné que $H(x,0) = 0$ il s'agit de vérifier le caractère lipschitizien de rapport $1/2$. On observe que la formule de Taylor permet de décomposer $H(x,u_\alpha) - H(x,v_\alpha)$ en une somme finie de termes du type : $F(x,u_\delta,v_{\delta'})\ u_{\alpha'}(u_\beta - v_\beta)$ ou $F(x,u_\delta,v_{\delta'})v_{\alpha'}(u_\beta - v_\beta)$, où dans les deux cas $|\alpha'| + |\beta| \leqslant 2m-1$. Cela dit on suppose $N^{m,m}(u) \leqslant r$, $N^{m,m}(v) \leqslant r$, alors la proposition 1.2.7 assure que :

$$N^{o,o}(\partial^{\alpha'} u) \leqslant c_1\ r\ R^{-m} \quad (\text{pour}\,|\alpha| \leqslant m)$$

si $c_1\ r\ R^{-m} \leqslant \frac{R'}{2}$ (c'est-à-dire $r \leqslant c_2\ R^m$, condition à fortiori vérifiée si $r \leqslant c_2\ R^{2m}$ vu que $R \leqslant 1$), on a d'après la proposition 1.2.6

$$N^{o,o}(F(x,u,v) - F(x,o,o)) \leqslant C_3$$

les propositions 1.2.5 et 1.2.3 assurent que

$$N^{o,1}((F(x,u,v) - F(x,o,o))\partial^{\alpha'} u\ \partial^\beta(u-v)) \leqslant c'r\ R^{-2m}\ N^{m,m}(u-v)$$

$$N^{o,1}(F(x,o,o)\ \partial^{\alpha'} u\ \partial^\beta(u-v)) \leqslant c''r\ R^{-2m}\ N^{m,m}(u-v)$$

il existe donc une constante $c > 0$ tel que $0 < r \leqslant C\ R^{2m}$ entraîne

$$N^{o,1}[H(x,\partial^\alpha u) - H(x,\partial^\alpha v)] \leqslant \frac{r}{2c}\ R^{-2m}\ N^{m,m}(u-v) \leqslant \frac{1}{2}\ N^{m,m}(u-v)$$

cqfd.

La méthode de l'optique géométrique permet d'obtenir le résultat linéaire suivant :

Théorème 1.2.9. Soit T une hypersurface analytique passant par $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, d'équation $t = 0$, et transverse à $\partial_\xi p_m(x,dy_1)$ (donc à S). Soit $1 > R' > 0$ tel que tous les coefficients de P_{lin} soient holomorphes et bornés sur le polydisque centré en 0 de rayon R', soit $0 < R < R'$. Alors il existe $\varepsilon_1 > 0$, $C > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ et $u_o \in A^m(R,\varepsilon,m)$ on puisse définir un opérateur T de A^1 dans A^m tel que $\forall\, v \in A^1(R,\varepsilon,0)$ on ait :

$$Tv|_{t=o} = u_o \ , \ P_{lin}(Tv) = v$$

$$N^{m,m}(Tv) \leqslant c(\,\varepsilon N^{o,1}(v) + N^{m,m}(u_o))$$

d'où : $N^{m,m}(Tv-Tv') \leqslant c\ \varepsilon\ N^{o,1}(v-v')$ si $v' \in A^1(R,\varepsilon,0)$

Le théorème 1.1.3 découle alors des théorèmes 1.2.8 et 1.2.9.

§ 3 PREUVE DU THEOREME 1.1.6

La démonstration est assez technique, aussi nous n'en donnerons que les grandes lignes, le lecteur pourra se reporter à [4] .
Nous commençons par introduire quelques fonctions et normes auxiliaires.
On sait (voir [4]) qu'il existe $C > 0$ tel que la fonction définie par :

$$\varphi(t) = C \sum_{p=o}^{+\infty} \frac{t^p}{(p+1)^2}$$

vérifie $\varphi^2 << \varphi$. Pour $R > 0$ posons :

$$\mathcal{O}_R(y) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(y_j/R)$$

on a alors $\mathcal{O}_R^2 << \mathcal{O}_R$ et , pour $R' > R$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$\partial_{y_j} \mathcal{O}_R(y) << \frac{1}{R}\ \frac{\mathcal{O}_R(y)}{1-y/R} \ , \ \frac{1}{1-y/R'} << C(R,R')\ \mathcal{O}_R(y)$$

Soit maintenant $b(t,y)$ une fonction holomorphe près de l'origine, on considère alors les plus petits C_ℓ appartenant à $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que :

(1) $$b(t,y) << \sum_{\ell=o}^{+\infty} \frac{\mathcal{O}_R(y)\, t_\ell}{(1-y/R)^\ell}\ C_\ell$$

Nous poserons $N(b)\ (\varepsilon) = \sum_{\ell=o}^{\infty} C_\ell\ \varepsilon^\ell$, cette quantité (éventuellement infinie) sera parfois notée $N(b)(R,\varepsilon)$ pour rappeler qu'elle dépend de R .

Proposition 2.1.1. 1°) Soient $b_j(t,y)$, $1 \leq j \leq k$, k fonctions holomorphes près de 0 telles que les quantités $N(b_j)(R,\varepsilon)$ soient finies. Alors on a :

$$N\left(\prod_1^k b_j\right)(\varepsilon) \leq \prod_1^k N(b_j)(\varepsilon)$$

2°) Soit $b(t,y)$ une fonction holomorphe et bornée par K sur le polydisque centré en 0 de rayon $R' > R$. Supposons $0 < \varepsilon < R'$, alors on a :

$$N(b)(\varepsilon) << \frac{C(R,R')K}{1-\varepsilon/R'} \quad .$$

Soit $r = \sum_0^{+\infty} b_k(t,y)\, S^{\frac{k+2m-1}{2}}$ un élément de $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ (voir def.1.1.4), considérons les plus petits $C_{k,\ell} \in \mathbb{R}^+ \cup\{+\infty\}$ tels que :

$$(2) \qquad b_k(t,y) << \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\mathcal{O}_R(y)\, t^\ell}{(1-y/R)^{k+\ell}} \; \frac{(k+\ell)!}{\ell!\,(k+m-1)!} \; C_{k,\ell}$$

On pose alors pour A et $\varepsilon > 0$, $M(r)(A,\varepsilon) =$

$$\sum_{k,\ell\geq 0} C_{k,\ell}\, A^k\, \varepsilon^{k+\ell}$$

Nous noterons $B^{m-1}(R,A,\varepsilon)$ l'ensemble des r de B^{m-1} tels que $M(r)(A,\varepsilon)$ soit fini, c'est un Banach pour cette norme. La proposition suivante précise les domaines géométriques de convergence associés à ces normes.

Proposition 2.1.2. 1°) Soit $r(t,y,S) \in B^{m-1}(R,A,\varepsilon)$ alors les b_k sont holomorphes dans

$$\Omega = \{(t,y) \in \mathbb{C}^{n+1} \;;\; |y_j| < R \text{ et } |t| < \varepsilon \prod_{j=1}^n (1-|y_j|/R)\}$$

et, pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \sup_K |b_k| \leq C^{k+1}$$

2°) $B^{m-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ défini en 1.1.4 est exactement la réunion des $B^{m-1}(R,A,\varepsilon)$.

Rappelons (voir introduction) que $P(a+r) = P(a) + P_{\text{lin}}(r) - H(x,\partial^\alpha r)$, en remplaçant r par $\sum_{o}^{+\infty} b_k \, s^{\frac{k+2m-1}{2}}$ et en réordonnant suivant les puissances de s on peut montrer que l'équation $P(a+r)$ est entraînée par les équations suivantes, numérotées (3), (4), (5) :

l'équation eikonale :

(3) $$\partial_t s = \tau_1(x, \partial^\beta a, \partial_y^j s) \ , \ |\beta| \leqslant m-1 \ , \ |j| \leqslant 1 \ .$$

(4) $$P(a) + b_o^2 \, E(x, \partial^\beta a, \partial^j s) = 0 \ , \ |\beta| \leqslant m-1 \ , \ |j| \leqslant 1$$

a et s vérifiant les conditions initiales indiquées dans l'énoncé du théorème 1.1.6 et E étant une certaine fonction holomorphe.

pour tout $k \geqslant 0$ $\partial_t b_k = D_{k,h} + D_{k,lin}$ où :

$$D_{k,lin} = \frac{-1}{C_{m-1}(k)} \ \frac{1}{\frac{\partial P_m}{\partial \tau}(x, \partial a, ds)} \ \Sigma \ C_j(k') \ \frac{\partial P}{\partial u_\alpha}(x, \partial a) \times$$

$$B_{j_1 \beta, \alpha}(\partial s) \ \partial_x^\beta b_{k'} \ .$$

où les indices j,k' et les multi-indices α, β sont tels que

(5) $k'-2j = k+2-2m$, $|\beta|$ est inférieur ou égal à $|\alpha| - j$, $0 \leqslant j \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $j < m$, (k', j, α, β) est distinct de $(k, m-1, \alpha, \beta_o)$ si $|\alpha| = m$. Si on pose $2r = k'+2m-1$, on a $C_j(k') = r(r-1)\ldots(r-j+1)$; $B_{j,\beta,\alpha}$ sera précisé plus loin.

$$D_{k,h} = \frac{-1}{C_{m-1}(k)} \ \frac{1}{\frac{\partial P_m}{\partial \tau}(-)} \ \Sigma \ E_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(x, \partial a) \ \prod_{j=1}^{N} C_{q_j}(k_j) \times$$

$$B_{q_j, \beta_j, \alpha_j}(\partial s) \ \partial_x^{\beta_j} b_{k_j}$$

la somme est étendue : à tous les N-uplets de multi-indices $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ $(N \geqslant 2)$ avec $|\alpha_j| \leqslant m$ et un au plus étant de longueur m (car P est quasilinéaire), à tous les indices $k_j \geqslant 0$ $j = 1,\ldots,N$, $q_j \geqslant 0$ $j = 1,\ldots,N$, $|\beta_j| \leqslant |\alpha_j| - q_j$ et $k+1 = k_1 + \ldots + k_n + 2N(m-1/2) - 2(q_1 + \ldots + q_N)$, on observe que $2 \leqslant N \leqslant k+3$. Les $E_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}$ étant holomorphes sur un même polydisque centré en $(0, \partial^\beta a_p(0))_{p+|\beta| \leqslant m}$ de rayon $R_1 > 0$ et y vérifiant des estimations du type $\sup |E_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}| \leqslant K^{1+N}$. Enfin si pour un indice j $|\alpha_j| = m$ alors $E_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}$ ne dépend que des dérivées de a d'ordre $\leqslant m-1$.

Le lemme suivant précise les $B_{j,\beta,\alpha}$:

Lemme 2.1.3 : Pour $|\alpha| \leqslant m$, on a $\partial_x^\alpha(bs^r) =$

$$\sum_{j=o}^{|\alpha|} \frac{r!}{(r-j)!} s^{r-j} \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|-j} B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)\partial_x^\beta b$$

où les $B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)$ sont des polynômes universels en les dérivées $\partial^\nu s$ avec $1 \leqslant |\nu| \leqslant |\alpha| - |\beta| - j + 1$ et sont des monômes du type :

$$(\partial^{\nu_1} s)^{k_1} \times \ldots \times (\partial^{\nu_N} s)^{k_N}$$

où $\Sigma\ |\nu_i| k_i \leqslant |\alpha| - |\beta|, \Sigma\ k_i = j$, et la somme, pour $|\nu_i| \geqslant 3$, des $k_i(|\nu_i|-2)$ est inférieure ou égale à $\max[|\alpha|-|\beta|-j-1, 0]$

Dans [4] nous prouvons le théorème 1.1.6 en appliquant (pour une norme $M(R,A,\varepsilon)$ convenable) le théorème du point fixe à l'opérateur T défini comme suit : à une suite $b = (b_k)_{k\geqslant o}$ telle que $\forall\ k\ b_k(0,y) = b_k^1(y)$ on associe d'abord le couple (a,s) vérifiant les équations (3), (4) et les conditions initiales associées, puis la suite $f = (f_k)_{k\geqslant o}$ vérifiant $\forall\ k\ f_k(o,y) = b_k^1(y)$, $\partial_t f_k = D_{k,lin}(b) + D_{k,h}(b)$. On pose alors $T(b) = f$ et on remarque qu'un point fixe de T fournit une solution des équations (3), (4), (5).

Remarque 2.1.4. Quand on fait $N = 2$ dans l'expression donnée en (5) de $D_{k,h}$ il apparaît (entre autres choses) le terme $b_o b_{k+1}$, ce dernier nous empêche de considérer un système fini d'équations récurrentes, c'est là que réside la différence essentielle avec le cas du I .

On peut dériver l'équation (3) par rapport à t et invoquer une version précisée (que nous allons donner) du théorème de Cauchy Kovaleska pour "contrôler" (en utilisant (4)) les quantités $N(\partial^\beta a - \partial^\beta a(0)), |\beta| \leqslant m$, $N(\partial^\delta s - \partial^\delta s(0))$, $|\delta| \leqslant 2$.

Théorème de Cauchy-Kovaleska 2.1.5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient deux fonctions (scalaires) $b_1(t,y)$, $b_2(t,y)$ et une fonction vectorielle $u(y) = (u_1(y), \ldots, u_k(y))$ holomorphes près de l'origine. Considérons, pour $i = 1,2$, un système P_i non-linéaire d'ordre 1 de k équations à k inconnues de la forme :

$$P_i = \partial_t + Q(t,y,\partial^\alpha) + b_i\ S(t,y,\partial^\beta)$$

où $\alpha \neq (1,0,\dots,0)$ et $|\beta| = 0$; $Q(t,y,v_\alpha)$ et $S(t,y,v_\beta)$ étant supposées holomorphes près de $(0,\partial^\alpha u(o))$. Alors sur un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ il existe, pour $i = 1,2$, une unique fonction vectorielle holomorphe $u^i = (u^i_1,\dots,u^i_k)$ vérifiant $P_i u^i = 0$ et $u^i(0,y) = u(y)$. Soient S et $K > 0$, il existe R_o et $\varepsilon_o > 0$ tels que quelque soient $0 < R \leqslant R_o$ et $0 < \varepsilon \leqslant \min(R,\varepsilon_o)$, si les $N(b_i)(R,\varepsilon)$ sont inférieurs à K alors pour tout β de longueur $\leqslant 1$ on a :

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k} N[\partial^\beta u^i_j - \partial^\beta u^i_j(o)]\ (R,\varepsilon) \leqslant \delta$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant k} N[\partial^\beta u^1_j - \partial^\beta u^2_j]\ (R,\varepsilon) \leqslant \delta\ N(b_1-b_2)(R,\varepsilon)$$

Les dérivées d'ordre $\geqslant 3$ de s ne pourront pas être regardées comme des coefficients, pour les contrôler nous dériverons les inégalités (1) définissant les coefficients des normes N qui permettent de contrôler les $\partial^\delta s$ pour $|\delta| \leqslant 2$ et nous utiliserons des décalages d'indices. Désignons donc par F_ℓ où $\ell \in \mathbb{N}$ les plus petites constantes $\geqslant 0$ (dépendant de R) permettant de majorer à la fois toutes les dérivées d'ordre $\leqslant 2$ de s , on a alors le :

<u>Lemme 2.1.6.</u> Soit $0 < R < 1$ et $B_{j,\beta,\alpha}$ comme dans le lemme 2.1.3. Alors on peut majorer $B_{j,\beta,\alpha}(\partial s)$ par la somme d'un nombre fini de termes du type :

$$\text{cte } R^{-v} \sum_{\ell=o}^{+\infty} \frac{t^\ell \mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^{\ell+v}} (1+\ell)^v \sum_{\ell_i} \prod_{i=1}^{j} F_{\ell_i+v_i}$$

où la cte ne dépend que de m et n , les v_i sont des entiers naturels tels que $\Sigma v_i \leqslant v = \max(|\alpha|-|\beta|-j-1,0)$, et $\Sigma \ell_i = \ell$.

Posons $\partial^\beta_x = \partial^{\beta_1}_t\ \partial^{\beta'}_y$, on peut majorer $\partial^\beta b_k$, par

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{|\beta'|} \sum_{\ell=o}^{+\infty} \frac{t^\ell \mathcal{O}_R(y)}{(1-y/R)^{k'+\ell+|\beta|}}\ \frac{(k'+\ell+|\beta|)!}{(k'+m-1)!\,\ell!}\ C_{k',\ell+\beta_1}$$

Le terme $(1+\ell)^v$ présent dans l'expression du lemme 2.1.6.constitue une difficulté, pour obtenir les majorations permettant d'appliquer le théorème du point fixe nous "absorberons" ce terme en utilisant des arguments s'appuyant sur des décalages d'indices. Ainsi les deux lemmes suivants jouent un rôle crucial dans la majoration de $D_{k,lin}$.

Lemme 2.1.7. Considérons les indices j, k', α, β figurant dans $D_{k,lin}$. Posons $v = \max(|\alpha|-|\beta|-j-1,0)$. Alors $k'+|\beta|+v+\ell$ est inférieur ou égal à $k+\ell+1$ et :

$$\frac{(k'+|\beta|+\ell)!}{(k'+m-1)!}\ (k+1)^{-m+1+j}\ (\ell+1)^{v} \leqslant \text{cte}\ \frac{(k+\ell+1)!}{(k+m-1)!}$$

Lemme 2.1.8. (notations du lemme précédent). Posons $\partial_x^{\beta} = \partial_t^{\beta_1}\ \partial_y^{\beta'}$, on a :

$$k' \geqslant k-2m\ ,\quad \beta_1 + k' + \ell + V < k + \ell + 1$$

Pour contrôler $D_{k,h}$ on utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1.9. Considérons les indices q_j, k_j, α_j, $\beta_j = 1,\ldots,N$ figurant dans $D_{k,h}$. Posons $v_j = \max(|\alpha_j|-|\beta_j|-q_j-1,0)$, $v = \Sigma\, v_j$, $\ell = \Sigma \ell_j$. Posons aussi :

$$G_j = \frac{(k_j+|\beta_j|+\ell_j)!}{(k_j+m-1)!\,\ell_j!}\ (1+\ell_j)^{v_j}\ C_{q_j}(k_j)$$

Alors il existe $C_1 > 0$ ne dépendant que de m et n tel que :

$$\sum_{j=1}^{N} (k_j + v_j + \ell_j + |\beta_j|) \leqslant k + \ell + 1 + 2 - N$$

$$(k+1)^{1-m} \prod_{j=1}^{N} G_j \leqslant \frac{(k+\ell+1)!}{(k+m-1)!\,\ell!}\ C_1^N$$

Lemme 2.1.10. (notations du lemme précédent) Posons $\partial_x^{\beta_j} = \partial_t^{\beta_j^1}\ \partial_y^{\beta'_j}$.

Alors $\ell + \sum_1^N (k_j + \beta_j^1 + v_j)$ est inférieur ou égal à $k + \ell + 1 + 2-N$. Si $N = 2$ et s'il y a égalité alors $k_1 + k_2 = k+1$. En outre $\Sigma\ k_i \geqslant k-2Nm$.

Remarque 2.1.11. Signalons un fait un peu inattendu : quand on majore, dans $D_{k,h}$, les termes associés à $b_{k_1} b_{k_2}$ où $k_1+k_2 = k+1$, il vient en facteur $\frac{1}{A}$ et non pas ε.

Pour terminer la preuve on doit donc choisir R assez petit puis $A \gg 1$ puis $\varepsilon \ll 1$ (de sorte que εA^{2m} soit petit) pour conclure par un argument de point fixe à l'aide d'une norme $M(R,A,\varepsilon)$ convenable.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle. J. Math. pures et appl., 1976.

[2] T. Ishii, T. Kobayashi, Singular solutions of nonlinear partial differential equations, Preprint 1984.

[3] T. Kobayashi, G. Nakamura, Singular solutions for semilinear hyperbolic equations I, Preprint 1984.

[4] E. Leichtnam, Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, à paraître.

[5] C. Wagschal, Sur le problème de Cauchy ramifié, J. Math. pures et appl., 1974.

****