B. Helffer

J. Sjöstrand

Analyse semi-classique pour l'équation de Harper

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1986-1987), exp. nº 17, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1986-1987____A16_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1986 - 1987

ANALYSE SEMI-CLASSIQUE POUR L'EQUATION DE HARPER.

par B. HELFFER et J. SJÖSTRAND

Exposé n°XVII

24 Mars 1987

Analyse semi-classique pour l'équation de Harper.

par

B.Helffer et J.Sjöstrand

0. Introduction.

Dans cet exposé on s'interesse au spectre de l'opérateur de Harper dans $l^2(\mathbf{Z})$, donné par $H_{\theta,\lambda,h}u(n) = (u(n+1)+u(n-1))/2+\lambda\cos(hn+\theta)u(n)$, qui apparaît naturellement par exemple dans l'étude de l'équation de Schrödinger dans $\mathbf{R}^2_{x,y}$ avec un potentiel périodique en x et en y et avec un champ magnétique constant. Ici $\lambda>0$, $h \in \mathbf{R}$. Si $h/2\pi$ est rationnel , on peut employer la théorie de Floquet pour reduire l'étude du spectre de $H_\theta=H_{\theta,\lambda,h}$ à celle d'une matrice finie dependant de deux paramètres . La quantité qui nous intéresse dans ce cas est la réunion des spectres de H_θ quand θ varie dans $\mathbf{R}$. Cet ensemble est alors une réunion finie d'intervalles ("bandes") fermés. Quand $h/2\pi$ est irrationnel, on montre facilement que le spectre de H_θ comme ensemble est indépendant de θ . Nous sommes alors en présence d'un opérateur de Schrödinger discret à potentiel quasi-périodique ,et il y a une littérature mathématique et physique abondante sur ces opérateurs. Concernant l'opérateur de Harper on peut en particuler mentionner le travail de Bellissard et Simon [3] , qui montre que pour un ensemble dense (en fait une intersection dénombrable d'ouverts denses) dans l'ensemble des paramètres (λ,h) , le spectre de H n'est dense dans aucun intervalle non-trivial. Voir aussi [10]. D'autre part, le cas $\lambda=1$ semble jouer un rôle important comme valeur de transition entre les cas $\lambda<1$ et $\lambda>1$. Dans ce cas il ne semble pas y avoir des resultats rigoureux, mais il est conjecturé dans ce cas que pour $h/2\pi$ irrationel , le spectre est un ensemble de Cantor de mesure nulle. Voir Azbel [2] , Aubry,André [1] , Sokoloff [11] , Wilkinson [12], Hofstadter [9] . Les deux derniers travaux , indiqués à un de nous par

J.Bellissard , ont constitué une source d'inspiration particulièrement importante. Les resultats de Hofstadter sont entièrement numériques et indiquent très nettement la structure cantorienne du spectre .

Le travail de Wilkinson (voir aussi [13,14]) est basé sur une analyse BKW qui fait intervenir une infinité de "puits" dans l'espace $T^*\mathbf{R}$. Ces puits interagissent par effet tunnel et Wilkinson indique comment , en analysant ces interactions , on tombe sur un nouvel opérateur de Harper avec $\lambda=1$, mais avec un nouvel h . Pour obtenir la structure complète du spectre, on "n'a qu'à" iterer cette procédure indéfiniment. La suite des h qu'on obtient est donnée par le developpement du premier $h/2\pi$ en fraction continue , et Wilkinson indique que sa procédure marche si tous les h sont petits. Son travail montre une intuition admirable , étant donné que ses arguments du point de vue mathématique sont assez flous. Utilisant les techniques de [6,7], étendues au cas d'un nombre infini de puits par U.Carlsson [4], nous avons réussi à donner une version rigoureuse du travail de Wilkinson , mais à chaque étape dans la procédure itérative il y a une petite zône du spectre qui demande une analyse différente (en principe faisable) et qui doit être exclue. Ceci nous empèche dans l'état actuel des choses de faire une analyse complète du spectre.

1.Réduction à un problème semi-classique et analyse spectrale mod $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Une bonne partie de notre analyse marche aussi dans le cas $\lambda\neq 1$, mais le cas $\lambda=1$ est celui qui est le mieux adapté à nos méthodes, et on se place désormais dans ce cas. Si on note par $Sp(H_\theta)$ le spectre de H_θ , alors on voît facilement que $Sp(H_\theta)=Sp(H_{\theta+h})$, et si on suppose que $h>0$ on a $U_\theta Sp(H_\theta)$ = $Sp(H')$, où H' est l'opérateur dans $L^2(\mathbf{Z}\times[0,h[)$ défini par

(1.1) $\quad (H'u)(k,\theta)=H_\theta u(.,\theta)(k).$

La substitution $x=\theta+hk$, permet d'identifier H' avec l'opérateur

(1.2) $P = \cos(hD)+\cos x = (\tau_h+\tau_{-h})/2 + \cos x$,

agissant dans $L^2(\mathbf{R})$. Ici $D = -ih\, d/dx$, et $\tau_h = e^{-ihD}$ est l'opérateur de translation par h. Notre problème est donc d'étudier $Sp(P)\subset[-2,2]$. On peut voir P comme un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole $p(x,\xi)=\cos(\xi)+\cos(x)$. Pour $0<E<2$, on a $p^{-1}(E) = \cup U_\alpha$, $\alpha\in\mathbf{Z}^2$, où U_α est une courbe fermée qui entoure $2\pi\alpha$. Si $E=2$, on a la même relation avec $U_\alpha= \{2\pi\alpha\}$. Pour $-2\leq E<0$, on a une situation analogue. Pour $E=0$, $p^{-1}(0)$ est une réunion de droites et l'étude du spectre près de 0 demandera d'autres techniques. Si $\tau=\tau_{2\pi}$ et σ designe l'opérateur de multiplication par $e^{2\pi ix/h}$, alors P commute avec τ et σ et donc aussi avec les opérateurs $T_\alpha= \tau^{\alpha_1}\sigma^{\alpha_2}$, pour $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbf{Z}^2$. Toute la difficulté du problème provient du fait que τ et σ ne commutent pas en général. Soit $2\pi/h=k+h'/2\pi$, avec $k\in\mathbf{Z}$. Alors $\tau\sigma = e^{ih'}\sigma\tau$, et

(1.3) $T_\alpha T_\beta = e^{i\omega(\alpha,\beta)h'}T_\beta T_\alpha$,

où ω designe la forme symplectique standard sur $\mathbf{R}^2$.

P commute aussi avec la transformation de Fourier unitaire,

(1.4) $F_h u(\xi)=(2\pi h)^{-1/2}\int e^{-ix\xi/h}u(x)dx.$

On fixe un $\varepsilon_0>0$, et on s'intéresse au spectre de P dans $[\varepsilon_0,2]$, pour $h>0$ assez petit. Dans un premier temps il s'agit de localiser le spectre modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, mais on cherche déjà à imiter la démarche de Helffer-Sjöstrand [6,7] pour l'équation de Schrödinger avec puits de potentiels , étendue au cas d'une infinité de puits par U.Carlsson [4]. Soit $0\leq\theta_0(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ à support dans $|x|+|\xi|<\pi$, suffisamment grand pour que $p-\theta_0-\varepsilon_0<0$ dans ce carré. On identifiera dans la suite un symbole $a(x,\xi,h)\in S^m=\{a\in C^\infty(\mathbf{R}^2)\ ;\ \partial_x{}^j\partial_\xi{}^k a = \mathcal{O}(h^{-m})\}$ avec son h-quantifié de Weyl, (1.5) $\quad au(x) = (2\pi)^{-1}\iint e^{i(x-y)\theta/h} a((x+y)/2,\theta,h)\, u(y)\, dy\, d\theta$,

uniformement borné dans L^2 si $m=0$. Soit alors $\theta_\alpha = T_\alpha \theta_0 T_\alpha^{-1}$, de symbole $\theta_\alpha(x,\xi) = \theta_0(x-2\pi\alpha_1, \xi-2\alpha_2)$, et posons ,

(1.6) $\quad P_0 = P - \sum_{\alpha\neq 0}\theta_\alpha$.

Pour le symbole correspondant ; p_0 on a alors $p_0^{-1}(E) = U_0 = U_0(E)$, si $\varepsilon_0 \leq E \leq 2$. Combinant un résultat de Helffer-Robert [5] pour $\varepsilon_0 \leq E \leq 2-Ch$ avec une analyse des valeurs propres de P_0 dans $[2-Ch, 2]$ analogue à celle des basses valeurs propres pour l'équation de Schrödinger semi-classique avec un puits ponctuel non-degeneré , on trouve ,

Proposition 1.1. *Pour* $h>0$ *assez petit , on a* $Sp(P_0)\cap[\varepsilon_0, 2] = \bigcup_{0\leq j\leq N(h)}\{\mu_j\}$, *où chaque* μ_j *est une valeur propre simple et on a* $h/C \leq \mu_j - \mu_{j+1} \leq Ch$ *, pour une constante* $C>0$ *assez grande.*

On peut en fait déterminer les μ_j modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, mais la proposition nous suffit pour décrire les phénomènes essentiels dans la suite. On peut aussi montrer que la fonction propre de P_0 correspondant à μ_j, est microlocalement concentrée à tout voisinage de $U_0(\mu_j)$. On choisit maintenant une des valeurs propres ; $\mu(h) = \mu_{j(h)}(h)$. Toutes les estimations dans la suite sont uniformes par rapport à tous ces choix possibles. Soit $\varphi_0 \in L^2$ un vecteur normalisé correspondant , et posons $\varphi_\alpha = T_\alpha \varphi_0$, $P_\alpha = T_\alpha P_0 T_\alpha^{-1} = P - \sum_{\beta\neq\alpha}\theta_\beta$. Alors, $P_\alpha \varphi_\alpha = \mu\, \varphi_\alpha$. Combinant des techniques de [6],[7],[4] , avec des arguments pseudodifférentiels , on trouve,

Théorème 1.2. *Pour tout* $N>0$ *, il existe* $C_N>0$ *tel que* $Sp(P)\cap[\varepsilon_0, 2] \subset \bigcup_{0\leq j\leq N(h)}[\mu_j - C_N h^N, \mu_j + C_N h^N]$ *. Si on choisit* μ , φ_0 , φ_α *comme cidessus, et si* $F \subset L^2$ *designe l'éspace spectral associé à* $Sp(P)\cap[\mu - C_N h^N, \mu + C_N h^N]$ *, et*

Π_F *le projecteur orthogonal sur* F *, alors les* $v_\alpha=\Pi_F\varphi_\alpha$, $\alpha\in\mathbf{Z}^2$ *forment une bonne base dans* F *au sens que tout vecteur* $f\in F$ *s'écrit;* $f = \sum f_\alpha v_\alpha$, *avec* $\|f\|^2 \sim \sum|f_\alpha|^2$ *. La matrice* $V=((v_\alpha|v_\beta))$ *est de la forme* $I + \mathcal{O}(h^\infty)$ *dans* $L(l^2,l^2)$ *, et dans la base orthonormalisée,* $u = v\, V^{-1/2}$ *, la matrice de* $P|_F$ *est de la forme* $\mu I+W$ *, où* $W=\mathcal{O}(h^\infty)$.

2.Inégalités à poids et matrice d'interaction.

Il se trouve que les interactions qui se cachent dans W sont exponentiellement petites et les méthodes pseudo-différentielles C^∞ standard ne suffiçent pas pour les étudier. La première étape est alors comme dans [6],[7] de développer des inégalités à poids. Si on considère un opérateur

(2.1) $\quad Q=(1-\cos(hD))+V(x)$,

où $V\in C(\mathbf{R})\cap L^\infty(\mathbf{R})$ est réel, on remarque d'abord que $(1-\cos(hD)) = 2\sin(hD/2)^2$. Donc, si $\varphi\in C^{1,1}(\mathbf{R})$ avec φ' , $\varphi'' \in L^\infty(\mathbf{R})$, on trouve,

(2.2) $\quad (e^{\varphi/h}(1-\cos(hD))u|u_\varphi) = 2\,(Ru_\varphi|R^*u_\varphi)$, $u\in C_0^\infty$,

où $u_\varphi=e^{\varphi/h}u$, et

(2.3) $\quad R = e^{\varphi/h}\circ\sin(hD/2)\circ e^{-\varphi/h} = A+iB$,

$\quad A=\mathrm{ch}(\varphi'/2)\sin(hD/2)$, $B=\mathrm{sh}(\varphi'/2)\cos(hD/2)$.

Ici A , B sont autoadjoints modulo $\mathcal{O}(h)$ et en imitant la procédure dans [6] , on trouve qu'il existe $C>0$ tel que si $z\in\mathbf{C}$ et $0\leqslant F_\pm\in L^\infty$ vérifient

(2.3) $\quad V-\mathrm{Re}z-Ch-2(\mathrm{sh}(\varphi'/2))^2=F_+{}^2+F_-{}^2$,

alors,

(2.4) $\quad 2\,\|\mathrm{ch}(\varphi'/2)\sin(hD/2)u_\varphi\|^2+(1/4)\|(F_++F_-)u_\varphi\|^2 \leqslant$

$$\|(F_++F_-)^{-1}e^{\varphi/h}(P-z)u\|^2+\|F_-u_\varphi\|^2 \quad ,$$

pour $u\in C^{\infty}(\mathbf{R})$, $u_{\varphi}=e^{\varphi/h}u$.

On applique cette inégalité à $Q=2-P=(1-\cos(hD))+(1-\cos x)$ avec z voisin de $\nu(h)=2-\mu(h)$. Soit $U_j=\pi_x(U_{(j,k)})$, $U_{(j,k)}=U_{(j,k)}(\mu(h))$. Les inégalités à poids fontionnent alors bien en dehors de $\cup U_j$; si on fixe $a>0$ suffisamment petit , alors pour $|z-\mu(h)|=ah$, on peut representer $(P-z)^{-1}$ par une série du type de Neumann, qui fait intervenir les opérateurs $(P_j-z)^{-1}$, $j\in\mathbf{Z}$, avec $P_j=P-\sum_{k\neq j}\theta_k$ avec $\theta_k=\tau_{2\pi k}\theta_0$, où $0\leqslant\theta_0\in C_0^{\infty}$ est à support près de U_0 tel que $1-\cos x-\nu(h)+\theta_0>0$ près de U_0. On trouve alors les résultats suivants:

(2.5) Si $\delta>0$ et si $2(\mathrm{sh}(\varphi'/2))^2\leqslant(1-\cos x-\nu(h)-\delta)_+$, alors pour $0<h\leqslant h_\delta$ assez petit, $(P-z)^{-1}$ est borné de norme $\mathcal{O}(h^{-1})$: $L_\varphi^2\to L_\varphi^2$.

Ici $L_\varphi^2=\{u;\ e^{-\varphi/h}u\in L^2\}$.

(2.6) Si $\delta>0$ et si φ_1, φ_2 vérifient $2(\mathrm{sh}(\varphi_k'/2))^2\leqslant(1-\cos x-\nu(h)-\delta)_+$,et$\varphi_1=\varphi_2$ sur $\cup U_j$, alors pour $0<h\leqslant h_\delta$ assez petit,Π_F est borné et de norme $\mathcal{O}(1)$:$L^2_{\varphi_1}\to L^2_{\varphi_2}$.

Soit (x_0,x_0) l'unique point dans U_0 avec $x_0\geqslant 0$. Il existe alors (x_h,ξ_h) qui tend vers (x_0,x_0), une combinaison linéaire g_0 des fonctions m, $F_h m$, $F_h^2 m$, $F_h^3 m$, à coefficients $\mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h})$ pour tout $\varepsilon>0$, où $m(x)=\exp(i(x-x_h)\xi_h-(x-x_h)^2/2)/h$, telle que

(2.7) $(g_0|\varphi_0)=1+\mathcal{O}(h^{\infty})$,

(2.8) $F_h g_0=\omega g_0$, $|\omega|=1$.

On redéfinit alors v_0 comme $\Pi_F g_0$ et on pose $v_\alpha=T_\alpha v_0=\Pi_F T_\alpha g_0$. On peut alors supposer que $\|v_0\|=1$, et si on utilise (2.6), on trouve,

(2.9) $\quad v_0=\underline{\mathcal{O}}(e^{-f(x)/h})$, $f(x)=\min(k\nu_0+D(2\pi k,|x|),(k+1)\nu_0+D(2\pi(k+1),|x|)$,

pour $2\pi k\leqslant|x|\leqslant 2\pi(k+1)$.

Ici $0<\nu_0\leqslant S_0=D(0,2\pi)$, et la première relation signifie par définition que pour tout $\varepsilon>0$, on a $\|e^{(1-\varepsilon)f/h}v_0\|=\mathcal{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h})$, $h\to 0$. De plus, on a posé $D(x,y)=|\Phi(x)-\Phi(y)|$, où $\Phi(x)$ est une solution croissante de $2(\mathrm{sh}\Phi'/2)^2=(1-\cos x-\nu(h))_+$. Comme P commute avec F_h , et comme on a (2.8), on obtient la même estimation pour $F_h v_0$. On trouve alors pour $\alpha\neq\beta$:

$(v_\alpha|v_\beta)=\mathcal{O}_\varepsilon(1)e^{-(1-\varepsilon)\nu_0|\alpha-\beta|_\infty/h}$, $\varepsilon>0$.

De nouveau les v_α engendrent F, et si on passe à la (nouvelle) base orthonormalisée; u_α, on trouve que $F_h u_0=\omega u_0$, $u_\alpha=T_\alpha u_0$. La matrice de $P|_F$ prends alors la forme,

(2.10) $\quad ((Pu_\beta|u_\alpha))=\mu I+W$,

pour un nouveau $\mu=\mu(h)$ à distance $\mathcal{O}(h^\infty)$ de l'ancien $\mu(h)$. Ici $W=(w_{\alpha,\beta})$, avec $w_{\alpha,\alpha}=0$, et

(2.11) $\quad w_{\alpha,\beta}=\mathcal{O}_\varepsilon(1)e^{-(1-\varepsilon)\nu_0|\alpha-\beta|/h}$.

D'autre part,

(2.12) $\quad w_{\alpha,\beta}=e^{-ih'\beta_2(\beta_1-\alpha_1)}f(\alpha-\beta)$.

A priori, (2.11) semble insuffisant, mais par des astuces on montre d'abord que $w_{\alpha,\beta}=\mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon_1)/h})$, pour un $\varepsilon_1>0$, si $|\alpha-\beta|_\infty\geqslant 2$, et pour $|\alpha-\beta|_\infty=1$, on trouve par exemple dans le cas $\alpha_1=1$, $\beta=0$:

$$w_{\alpha,0}=-(u_0|\,[P,\chi]u_\alpha)+\mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon_1)/h}),$$

pour $\chi=1_{]-\infty,t]}$, t voisin de π. On établit ensuite que u_0 et u_α ont des expressions BKW dans un voisinage complexe de π, ce qui permet de montrer que

$$|w_{\alpha,0}|=\mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon_1)/h}),\ \text{si}\ |\alpha|\geq 2,$$

$$C_\varepsilon^{-1}e^{-(1+\varepsilon)S_0/h}\leq|w_{\alpha,0}|\leq C_\varepsilon e^{-(1-\varepsilon)S_0/h},\ \text{pour tout}\ \varepsilon>0,\ \text{si}\ |\alpha|=1.$$

3. Itération.

Le problème est maintenant d'étudier le spectre de W. (2.8) montre que W est un opérateur de convolution dans les variables α_1 , et si $h'=0$ c'est même une convolution dans toutes les variables. Dans ce dernier cas, on obtient $Sp(W)=\{Gf(\theta);\theta\in\mathbf{T}^2\}$, où $Gf(\theta)=\sum f(\alpha)e^{i\alpha\theta}=$ $2|f(1,0)|(\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2))+\mathcal{O}(e^{-(S_0+\varepsilon_1)/h})$. Le spectre est alors une bande de largeur $\sim|f(1,0)|$. Supposons maintenant que $h'>0$. Conjugant W par la matrice unitaire; $\mathrm{diag}(e^{ih'\alpha_1\alpha_2})$ on obtient une nouvelle matrice que l'on notera désormais par W (et qui à le même spectre), donnée par,

(3.1) $\quad w_{\alpha,\beta}=e^{-ih'\alpha_1(\alpha_2-\beta_2)}f(\alpha-\beta),$

qui est donc une convolution dans les variables α_2.On arrive alors à l'opérateur unitairement équivalent; $W':L^2(\mathbf{Z}\times S^1)\rightarrow L^2(\mathbf{Z}\times S^1)$, de la forme

(3.2) $\quad W'u(\alpha_1,\theta)=(K_\theta u(.,\theta))(\alpha_1)$,

où K_θ est donné par le "noyau",

(3.3) $\quad k(\alpha_1,\beta_1,\theta)=g(\alpha_1-\beta_1,\theta-h'\alpha_1),$

où,

(3.4) $\quad g(\alpha_1,\theta)=\sum_{\alpha_2}f(\alpha_1,\alpha_2)e^{i\theta\alpha_2}.$

Le spectre de W' est égal à celui de sa restriction à $\mathbf{Z}\times[0,h'[$, et par la substitution; $x=-(\theta-h'\alpha_1)$ on peut identifier cette restriction de W' à l'opérateur Q: $L^2(\mathbf{R})\rightarrow L^2(\mathbf{R})$, donné par

(3.5) $Q=\sum_{k\in Z} g(k,-x)\tau_{kh'}=\sum_{k\in Z} g(k,-x)e^{-ikh'D}$.

A l'aide de (3.4) on trouve que Q est le h'-quantifié de Weyl du symbole,

(3.6) $Q(x,\xi)=\sum\sum f(j,k)\, e^{-ijkh'/2} e^{i(kx+j\xi)}$.

Utilisant que $F_h u_0=\omega u_0$, $|\omega|=1$, on vérifie que Q commute avec $F_{h'}$, c.a.d. qu'au niveau des symboles:

(3.7) $Q\circ\kappa=Q$, où $\kappa(x,\xi)=(\xi,-x)$.

Utilisant (3.6) et les résultats de la section 2, on trouve,

(3.8) $Q(x,\xi)=2|f(1,0)|(Q_0(x,\xi)+R(x,\xi))$,

où R est holomorphe et $=\mathcal{O}(e^{-1/C_0h})$ dans $|\mathrm{Im}(x,\xi)|\leq 1/C_0h$, pour un $C_0>0$ assez grand, et

(3.9) $Q_0(x,\xi)=\cos(\xi)+\cos(x)$.

Le h'-quantifié de Q_0 est alors $Q_0= \cos(h'D)+\cos x$. On peut aussi remarquer que le symbole Q est 2π-périodique en x et en ξ. Les points critiques de Q coïncident avec ceux de Q_0 (grace à (3.7)) et on a les valeurs critiques $m_Q= Q(\pi,\pi)= -2+\mathcal{O}(e^{-1/C_0h})$, $M_Q= Q(0,0)= 2+\mathcal{O}(e^{-1/C_0h})$, $c_Q= Q(\pi,0)= Q(0,\pi)= \mathcal{O}(e^{-1/C_0h})$.Les surfaces d'énergie, Q=E dans les cas $E\in\{m_Q\}$, $]m_Q,c_Q[$, $\{c_Q\}$, $]c_Q,M_Q[$, $\{M_Q\}$, ont la même structure que celles de $Q_0=E'$ dans les cas correspondants (obtenues, en remplaçant m_Q, c_Q, M_Q par -2, 0, 2).

Si $\mu'\in]c_Q,M_Q]$, on peut définir une action $S_1(\mu')$ comme $\mathrm{Im}\int_{[x_0,2\pi-x_0]}\xi(x)dx$, où $[-x_0,x_0]$ est la projection de U_0' ; la composante de $Q=\mu'$ qui entoure ou est égale à (0,0), et $\xi(x)$ est la solution continue complexe de $Q(x,\xi(x))=\mu'$ avec $(x_0,\xi(x_0))\in U_0'$, $\mathrm{Im}\xi(x)\geq 0$. On peut alors procéder comme pour l'opérateur P à quelques modifications près, notamment en ce qui concerne les inégalités L^2 à poids ,et obtenir le résultat suivant(,où nous rappelons que $\varepsilon_0>0$ a été fixé au début de notre exposé):

Théorème 3.1. *Il existe* $h_0>0$, *tel que si* $0<h\leq h_0$, *on ait: Pour tout* $\varepsilon_0'>0$, *il existe* $h_0'>0$, *tel que pour* $0<h'\leq h_0'$, *l'ensemble* $Sp(Q)\cap[c_Q+\varepsilon_0',+\infty[$ *est contenu dans* $[c_Q+\varepsilon_0',M_Q+C_0h']$, *et plus précisément dans une réunion de bandes* $\bigcup_{0\leq j\leq N}[\mu_j-4b_je^{-S_1(\mu_j)/h'},\mu_j+4b_je^{-S_1(\mu_j)/h'}]$, où $\mu_j-\mu_{j+1}\in[h'/C_0,h'C_0]$, $|b_j|,|b_j^{-1}|\leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h'}$, *pour tout* $\varepsilon>0$, et $|M_Q-\mu_0|\leq C_0h'$. *Le spectre de* $P-\mu_j$ *dans la j:ième bande est égal à celui du* h'- *quantifié de* $Q_j'=b_j(Q_0+R_j')$, *où* R_j' *est 2π-périodique en* x, ξ, *holomorphe et de module* $\leq e^{-1/C_0h'}$, *dans* $|\mathrm{Im}(x,\xi)|\leq 1/C_0h'$. *Ici,* C_0,C_ε *sont indépendants de* h, h', *mais dépendent de* ε_0'. *De plus* $2\pi/h'=k+h''/2\pi$, $k\in\mathbf{N}$, *et où on suppose* $0<h''<2\pi$. *(Si* $h''=0$, *on obtient une bande exactement comme pour* $h'=0$ *au début de cette section.)*

On peut ensuite appliquer le même théorème à Q_0+R_j' et ainsi de suite. Compte tenu du fait que la même analyse s'applique en dessous de $c_Q-\varepsilon_0'$, on obtient ainsi le

Théorème 3.2. *On fixe* $\varepsilon_0>0$. *Il existe alors* $C_0>0$, *tel que si* $h/2\pi\in]0,1[\setminus\mathbf{Q}$ *et* $h/2\pi$ *admet le developpement en fractions continues:* $1/(q_1+1/(q_2+1/(q_3+\ldots\ldots)))$, *avec* $q_j\in\mathbf{N}$, $q_j\geq C_0$, *on a:*

Le plus petit intervalle fermé qui contient $Sp(P)$ *est de la forme* $J=[-2+\mathcal{O}(1/q_1),2-\mathcal{O}(1/q_1)]$. $Sp(P)\cap J\subset\bigcup_{N_-\leq j\leq N_+}J_j$, *où* J_j *sont des intervalles fermés de longeur* $\neq 0$, *avec* $\partial J_j\subset Sp(P)$. J_{j+1} *se trouve à droite de* J_j *à une distance* $\sim 1/q_1$. J_0 *est de longeur* $2\varepsilon_0+\mathcal{O}(1/q_1)$, *contenant* 0 *à une distance* $\mathcal{O}(1/q_1)$ *de son centre. Les autres bandes sont de largeur*

$e^{-C(j)q_1}$ *, avec* $C(j)\sim 1$. *Pour* $j\neq 0$, *soit* κ_j *la fonction affine croissante, qui transforme* J_j *en* $[-2,2]$. *On a alors* $\kappa_j(J_j)\subset \cup_k J_{j,k}$, *où les* $J_{j,k}$ *ont les mêmes propriétés etc.. Ici* $a\sim b$ *signifie que* a/b *et* b/a *sont majorés par une constante qui ne dépend que de* ε_0.

Références.

1. S.Aubry, C.André, Proc.Israel Phys.Soc., ed.C.G.Kuper 3 (Adam Hilger, Bristol, 1979), 133-.
2. M.Ya.Azbel, Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field, Zh.Eksp.Teor.Fiz.46,(1964),939-, Sov.Phys. JETP19,(1964),634-.
3. J.Bellisard, B.Simon, Cantor spectrum for the almost Mathieu equation, J. Funct.Anal.,48(3),408-419.
4. U.Carlsson, Travail en préparation.
5. B.Helffer, D.Robert, Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, Ann. de l'IHP,41(3)(1984),291-331.
6. B.Helffer, J.Sjöstrand, Multiple wells in the semi-classical limit I. Comm. in PDE, 9(4)(1984),337-408.
7. B.Helffer, J.Sjöstrand, Puits mulptiples..II, Intéraction moléculaire, symétries, perturbation. Ann. de l'IHP,42(2)(1985),127-212.
8. B.Helffer, J.Sjöstrand, Effet tunnel pour l'équation de Schrôdinger avec champ magnétique. Préprint de l'Ecole Polytechnique, Déc.1986.
9. D.R.Hofstadter, Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Phys. Rev. B, 14(6), 15Sept. 1976.
10. B.Simon, Almost periodic Schrödinger operators. A review, Adv.Appl.Math. 3,(1982),463-490.
11. J.Sokoloff, Unusual band structure, wave functions and electrical conductance in crystals with incommensurate periodic potentials, Physics reports (Review section of Physics letters), 126(4)(1985), 189-244.
12. M.Wilkinson, Critical properties of electron eigenstates in

incommensurate systems, Proc.R.Soc.Lond., A 391,(1984),305-350.

13. M.Wilkinson, An example of phase holonomy in WKB theory, J. Phys. A, 17(1984),3459-3476.

14. M.Wilkinson, Von Neumann lattices of Wannier functions for Bloch electrons in a magnetic field, Proc. R. Soc. Lond., A 403,(1986),135-166.

15. M.Wilkinson, An exact renormalisation group for Bloch electrons in a magnetic field, J. Phys. A., à paraître.

B. HELFFER
Université de Nantes
Institut de Mathématiques et d'Informatique
B.P. 1044
44037 NANTES Cedex

S. SJÖSTRAND
Université de Paris XI
Centre de Mathématiques
Bât. 425
91405 ORSAY Cedex