Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

B. Helffer
J. Sjöstrand

Structure cantorienne du spectre de l'opérateur de Harper

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A12_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

STRUCTURE CANTORIENNE DU SPECTRE DE L'OPERATEUR DE HARPER

B. HELFFER et J.SJÖSTRAND

Exposé n°XII

22 Mars 1988

Introduction

Comme dans [HS1], on s'intéresse à l'opérateur de Harper,

$$(1) \qquad P_0 = \cos hD_x + \cos x \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbf{R}),\ D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x},$$

ainsi que certaines perturbations de cet opérateur, sous l'hypothèse que l'on a le développement en fraction continue infinie :

$$(2) \qquad \frac{h}{2\pi} = 1/(q_1 + 1/(q_2 + \ldots)),$$

où $q_j \in \mathbf{N}$, $q_j \geq C_0$, (ou plus généralement que $q_j \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $|q_j| \geq C_0$). Ici $C_0 > 0$ est une constante suffisamment grande. Dans [HS1] nous avons obtenu une description partielle du spectre de P_0 par une procédure infinie de localisations aux sous-intervalles et de dilatations affines. Malheureusement, chaque fois qu'une partie isolée du spectre fut localisée dans un intervalle fixé, les méthodes employées dans [HS1] ne nous permirent pas de poursuivre la procédure dans un petit voisinage du milieu de cet intervalle. Dans [HS2] les résultats furent généralisés au cas où $\frac{h}{2\pi}$ est "proche" d'un nombre rationel, mais toujours avec le même défaut.

Pour une introduction générale ainsi que pour une bibliographie plus complète nous renvoyons à ces deux travaux. Signalons cependant que Van Mouche [M] vient d'obtenir des résultats importants complétant ceux de Bellissard-Simon [B-S] sur l'ouverture des gaps pour l'opérateur plus général,

$$\cos hD_x + \lambda \cos x \quad \text{quand} \quad \lambda > 0 \quad \text{et} \quad \frac{h}{2\pi} \in \mathbf{Q}.$$

Si on associe à P_0 le symbole $P_0(x,\xi) = \cos\xi + \cos x$, alors pour $0 < \mu \leq 2$, la surface d'énergie réelle, $P_0(x,\xi) = \mu$ se décompose naturellement en $\bigcup_{\alpha\in\mathbf{Z}^2} U_\alpha(\mu)$ où $U_\alpha(\mu)$ est une courbe fermée qui entoure $2\pi\alpha$ pour $0 < \mu < 2$, et qui dégénère en $\{2\pi\alpha\}$ pour $\mu = 2$. Pour $-2 \leq \mu < 0$ on a le même type de décomposition, en remplaçant $2\pi\alpha$ par $2\pi\alpha + (\pi,\pi)$. Suivant des idées de Wilkinson [W], nous avions dans [HS1] localisé le spectre de P_0 dans $[-2,2] \setminus [\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ (pour $\varepsilon_0 > 0$ petit) dans une réunion d'intervalles fermés de longeur $e^{-\sim 1/h}$, séparés par des ouvertures de largeur $\sim h$. Chaque intervalle correspond modulo $\mathcal{O}(e^{-1/Ch})$ à une valeur propre d'un opérateur de référence obtenu en "bouchant" tous les "puits" U_α sauf un. Ensuite, en analysant l'effet tunnel entre les puits nous avions montré que l'étude du spectre dans chacun de ces intervalles se réduit à celle d'une matrice infinie, $W = (w_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbf{Z}^2}$, dont nous pouvions calculer la contribution principale. Utilisant des propriétés de symétrie des $w_{\alpha,\beta}$, on obtient ensuite que W est isospectral à (const.)P, où P est la h'-quantification de Weyl d'un symbole $P(x,\xi)$ (c'est à dire la quantification de Weyl de $P(x,h'\xi)$, on appellera P un opérateur h'-pseudo-différentiel,) proche de $P_0(x,\xi)$. Ici $h' \in]0,2\pi]$ est donné par

$$(3) \qquad \frac{2\pi}{h} \equiv \frac{h'}{2\pi} \mod \mathbf{Z}.$$

(Ainsi (2) entraîne que $\frac{h'}{2\pi} = 1/(q_2 + 1/(q_3 + \ldots))$.)

Pour le spectre près de 0 on n'a plus de localisation naturelle dans des puits. En fait, pour $\mu \approx 0$, la surface d'énergie, $P_0 = \mu$ est proche de la réunion des droites $\xi = \pm x + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, et une difficulté supplémentaire, (déjà considérée dans notre contexte par Azbel [A],) est que P_0 a des points critiques en $(k\pi, \ell\pi)$, $k + \ell \in 2\mathbf{Z} + \{1\}$. On est alors amené à étudier la structure des solutions microlocales de $(P_0 - \mu)u = 0$ près de ces points.

Soit $s(0,1)$, le segment $[(0,\pi),(\pi,0)]$, $s(0,j) = \mathcal{H}^{1-j}(s(0,1))$, où $\mathcal{H}(x,\xi) = (\xi,-x)$, $s(\alpha,j) = s(0,j) + \{2\pi\alpha\}$.

Près du milieu de $s(0,1)$ la solution microlocale de $(P_0 - \mu)u = 0$ est unique à un facteur constant près. Soit $u_{0,1}$ une telle solution. En utiliant des symétries de P_0 on peut alors définir $u_{\alpha,j}$, solution microlocale près de $s(\alpha,j)$. Près d'un point de branchement, par exemple $(0,\pi)$ le noyau microlocal de $(P_0 - \mu)$ est de dimension 2 et un élément de ce noyau se réduit à :

$$\begin{array}{ccc} x_1 u_{0,1} & \text{près de l'intérieur de} & s(0,1), \\ x_3 u_{(0,1),3} & \text{près de l'intérieur de} & s((0,1),3), \\ y_2 u_{0,2} & \text{près de l'intérieur de} & s(0,2), \\ y_4 u_{(0,1),4} & \text{près de l'intérieur de} & s((0,1),4). \end{array}$$

Ici on peut préscrire (x_1, x_3), et alors

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

où U est une matrice unitaire dépendant de μ dont on sait déterminer le comportement asymptotique.

On choisit maintenant une famille convenable $\{f_{\alpha,j}\}$ de fonctions L^2, telle que $f_{\alpha,j}$ est microlocalement concentrée dans un voisinage du milieu de $s(\alpha,j)$ et telle que $(u_{\alpha,j}/f_{\alpha,j}) = 1$.

On peut alors définir,

$$(R_+u)(\alpha,j) = (u|f_{\alpha,j}) \quad \alpha \in \mathbf{Z}^2, j = 1,3, u \in L^2$$

$$R_-u^- = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}^2 \\ j=2,4}} u^-(\alpha,j) f_{\alpha,j},$$

et on obtient ainsi un opérateur bijectif :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} P_0 - \mu & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : L^2(\mathbf{R}) \times \ell^2(\mathbf{Z}^2; \mathbf{C}^2_p) \to L^2(\mathbf{R}) \times \ell^2(\mathbf{Z}^2; \mathbf{C}^2_i),$$

où $\mathbf{C}^2_i, \mathbf{C}^2_p$ sont des copies de $\mathbf{C}^2$ avec les coordonnées indexées respectivement par 1, 3 et 2, 4. Si l'inverse est $\begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}$, alors $\mu \in Sp(P_0) \Leftrightarrow 0 \in Sp(E_{-+}(\mu))$. Comme avec W

on peut voir E_{-+} comme une matrice infinie $(E_{-+}(\alpha,\beta))$ où maintenant $E_{-+}(\alpha,\beta)$ est une matrice 2×2.

On montre ensuite que $0\in Sp(E_{-+}) \Leftrightarrow 0\in Sp\ P$, où P est le h'-quantifié d'une matrice 2×2 de symboles. Fort heureusement, l'étude de ces systèmes 2×2 a beaucoup de similitudes avec celle des perturbations de l'opérateur de Harper, et souvent on peut même se réduire au cas scalaire. On perd la dépendance linéaire du paramètre spectral et P n'est plus autoadjoint. On peut cependant trouver P_1, P_2 qui sont aussi des opérateurs h' -pseudodifférentiels, elliptiques près des caractéristiques de P, tels que P_1^*P et PP_2^* soient autoadjoints.

Résultats.

Pour $h>0$ on définit les opérateurs :

$$\mathcal{F}u(\xi)=\frac{1}{2\pi h}\int e^{-ix\xi/h}u(x)dx\ ,\qquad \text{(transformation de Fourier unitaire)}$$

$$\tau_1 u(x)=u(x-2\pi)$$

$$\tau_2 u(x)=e^{2\pi i x/h}u(x)$$

$$T_\alpha=\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ ,\ \alpha\in\mathbf{Z}^2.$$

Soit aussi $U_t=e^{it((hD)^2+x^2-h)/h}$, opérateur intégral de Fourier associé à $\mathcal{H}_t:(y,\eta)\mapsto(x,\xi)$, où $(x+i\xi)=e^{it}(y+i\eta)$. Alors $U_{-\frac{\pi}{2}}=\mathcal{F}$, $\mathcal{H}_{-\frac{\pi}{2}}=\mathcal{H}$. Soit aussi $V=U_{\frac{\pi}{4}}\Gamma U_{-\frac{\pi}{4}}=U_{\frac{\pi}{2}}\Gamma=\Gamma U_{-\frac{\pi}{2}}$ où $\Gamma u=\bar{u}$. Alors $V^2=I$ et on peut considérer V comme une quantification antilinéaire de la reflection antisymplectique $\mathcal{S}:(x,\xi)\mapsto(\xi,x)$.

Dans la procédure d'itération ("renormalisation") on rencontrera deux types d'opérateurs :

Définition 1.— *On dit que le triplet, (P,P_1,P_2) d'opérateurs h-pseudodifférentiels est de type 1 si P_1^*P et PP_2^* sont autoadjoints et :*

$$[P,T_\alpha]=0,\ [P_j,T_\alpha]=0\ ,\ \forall\alpha\in\mathbf{Z}^2,$$

$$[P,V]=0\ ,\ [P_j,V]=0$$

$$P\mathcal{F}=\mathcal{F}P^*\ ,\ P_1\mathcal{F}=\mathcal{F}P_2^*\ ,\ P_2\mathcal{F}=\mathcal{F}P_1^*.$$

Un triplet, (P,P_1,P_2) dépendant d'un paramètre complexe, μ avec $|\mu|<4$, est de type $1f$ s'il est de type 1 pour μ réel et s'il existe $\varepsilon>0$ tel que les symboles de Weyl associés, $P(\mu,x,\xi)$, $P_j(\mu,x,\xi)$ (en tant qu'opérateurs h- pseudodifférentiels) sont holomorphes en μ,x,ξ pour $|\mu|<4$, $|\mathrm{Im}(x,\xi)|<\frac{1}{\varepsilon}$ et y vérifient :

$$|P-(\cos\xi+\cos x-\mu)|\le\varepsilon$$

$$|P_j-1|\le\varepsilon.$$

On définit $\varepsilon(P)=\varepsilon(P,P_1,P_2)$ comme l'infimum des $\varepsilon>0$ ci-dessus.

Soit T (selon le contexte) l'un des deux opérateurs : $\mathbf{C}_i^2 \to \mathbf{C}_p^2$, $\mathbf{C}_p^2 \to \mathbf{C}_i^2$, définis par $(Tz)_j = z_{j-1}$, où on considère que les indices $j, j-1$ sont définis dans $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

Définition 2.— *Le triplet (P, P_1, P_2) de matrices 2×2 d'opérateurs h-pseudodifférentiels : $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{C}_i^2) \to L^2(\mathbf{R}; \mathbf{C}_p^2)$ est de type 2, si $P_1^* P$ et PP_2^* sont auto-adjoints et :*

$$[P, T_\alpha] = 0, [P_j, T_\alpha] = 0 \ , \ VP = PVT^2 \ , \ VP_j = P_j VT^2,$$
$$P\mathcal{F}T = \mathcal{F}TP^*, P_1\mathcal{F}T = \mathcal{F}TP_2^* \ , \ P_2\mathcal{F}T = \mathcal{F}TP_1^*.$$

Un triplet (P, P_1, P_2) dépendant d'un paramètre complexe, μ, avec $|\mu| < 4$, est de type $2f$ s'il est de type 2 pour μ réel et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que les symboles de Weyl associés sont holomorphes pour $|\mu| < 4, |\mathrm{Im}(x, \xi)| < \frac{1}{\varepsilon}$ et y vérifient

$$|P - P_0(a, b; x, \xi)| \leq \varepsilon \ , \ |P_j - P_0(ia, ib; x, \xi)| \leq \varepsilon.$$

Ici,

$$P_0(a, b; x, \xi) = \begin{pmatrix} b + \bar{a}\bar{e}^{i\xi} & \bar{b} + ae^{ix} \\ \bar{b} + a\bar{e}^{ix} & b + \bar{a}e^{i\xi} \end{pmatrix},$$

où $a, b \neq 0$ dépendent holomorphiquement de μ,

$$(\bar{a} = \overline{a(\bar{\mu})}, \bar{b} = \overline{b(\bar{\mu})}), b(\mu) = b(0)(1 + \beta_1(\mu))e^{i\mu(1+\beta_2(\mu))}$$

où β_j sont holomorphes, $|\beta_j| \leq \varepsilon$, β_j réel pour μ réel.

De plus pour μ réel :

$$|b|^2 + |a|^2 = 1 \ , \ |\arg b - \arg a| = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Soit $\varepsilon(P) = \varepsilon(P, P_1, P_2)$ l'inf des $\varepsilon > 0$ ci-dessus. On pose $C(P) = \max(\frac{1}{|a(0)|}, \frac{1}{|b(0)|})$.

Pour μ réel, on trouve à l'aide de (4) :

$$\det P_0(a, b; x, \xi) = 2b\bar{a}(\frac{i}{b\bar{a}} \sin(2\arg b(\mu)) + \cos\xi + \cos x),$$

et comme $\frac{i}{b\bar{a}} \in \mathbf{R}$, ceci indique que les opérateurs de type $2f$ doivent se comporter un peu comme des opérateurs de type $1f$. Par abus de langage on dit que P est de type $1f$ (ou $2f$) s'il existe P_1, P_2 tels que (P, P_1, P_2) l'est. On pose $\mu - Sp(P) = \{\mu \in]-4, 4[; 0 \in Sp(P)\}$.

Théorème 3.— *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et des fonctions $F :]0,1] \to [1, \infty[, h_0 :]0,1] \to]0,1]$, $\alpha :]0,1]^2 \to]0,1]$ avec $\alpha(\varepsilon, h) \to 0, h \to 0$ pour chaque ε fixé, tels que si $\varepsilon \in]0,1]$ et si P est de type $1f$ avec $\varepsilon(P) \leq \varepsilon_0$, $0 < h \leq h_0(\varepsilon)$, alors $\mu - Sp(P) \subset \bigcup_{-N_-}^{N_+} \mathcal{J}_j$, où $\mathcal{J}_j$ sont des intervalles fermés disjoints, rangés en ordre croissant tels que pour chaque j, il existe une application affine réelle, $\mathcal{H}_j : \mu \mapsto \mu'$, telle que :*

(a) Pour $j \neq 0$, $\mathcal{H}_j(\mathcal{J}_j \cap \mu - Sp(P)) = \mu' - Sp(Q)$, où Q est un opérateur de type $1f$ avec (μ, h) remplacé par (μ', h') et avec $\varepsilon(Q) \leq \varepsilon$.

(b) $\mathcal{H}_0(\mathcal{J}_0 \cap \mu - Sp(P)) = \mu' - Sp(Q)$, où pour chaque $\mu_0' \in \mathcal{H}_0(\mathcal{J}_0)$, Q est de type $2f$ avec (μ, h) remplacé par (μ'', h), où $\mu' = \mu_0' + \mu''$ et avec $\varepsilon(Q) \leq \alpha(\varepsilon, h), C(Q) \leq F(\varepsilon)$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé la largeur de $\mathcal{J}_0$ est du même ordre de grandeur que h et $\frac{d\mathcal{H}_0}{d\mu} \sim \frac{\log \frac{1}{h}}{h}$. La largeur de $\mathcal{J}_j$ pour $j \neq 0$ est dans $\left[\frac{1}{C}e^{-1/Ch}, C\frac{h}{\log \frac{1}{h}}\right]$ tandis que la séparation entre $\mathcal{J}_j$ et $\mathcal{J}_{j+1}$ est dans $\left[\frac{h}{C \log \frac{1}{h}}, Ch\right]$.

Théorème 4.— *Il existe des fonctions* $\tilde{\varepsilon}_0 : [1,\infty[\to]0,1]$, $F :]0,1] \to [1,\infty[$, $\tilde{h}_0 :]0,1]\times[1,\infty[\to]0,1]$, $\tilde{\alpha} :]0,1]\times[1,\infty[\times]0,1]\to]0,1]$ *avec* $\tilde{\alpha}(\varepsilon, C, h)\to 0, h\to 0$ *pour chaque* (ε, C) *fixé, telles que si* $0<\varepsilon\le 1$, $C\ge 1$ *et* P *est de type* $2f$ *avec* $C(P)\le C$, $\varepsilon(P)\le\tilde{\varepsilon}_0(C)$, $0<h\le\tilde{h}_0(\varepsilon, C)$, *alors* $[-3,3]\cap\mu - Sp(P)\subset\cup\mathcal{J}_j$, *où* $\mathcal{J}_j$ *sont des intervalles fermés disjoints rangés en ordre croissant, et pour chaque* j *il existe une application affine,* $\mathcal{H}_j : \mu\mapsto\mu'$ *tels qu'on a (a) ou (b) (avec les mêmes changements de paramètres que dans le théorème précédent) :*

(a) $\mathcal{H}_j(\mathcal{J}_j\cap\mu - Sp(P)) = \mu' - Sp(Q)$ *où* Q *est de type* $1f$, *avec* $\varepsilon(Q)\le\varepsilon$.

(b) $\mathcal{H}_j(\mathcal{J}_j\cap\mu - Sp(P)) = \mu' - Sp(Q)$ *où* Q *est de type* $2f$ *avec* $C(Q)\le F(\varepsilon)$, $\varepsilon(Q)\le\tilde{\alpha}(\varepsilon, C, h)$.

Pour chaque (ε, C) *fixé la largeur de* $\mathcal{J}_j$ *dans le cas (b) est de l'ordre de grandeur* h *et* $\frac{d}{d\mu}\mathcal{H}_j\sim\frac{\log\frac{1}{h}}{h}$. *Dans le cas (a), la largeur de* $\mathcal{J}_j$ *se trouve dans* $\left[\frac{1}{C'}e^{-C'/h}, \frac{C'h}{\log\frac{1}{h}}\right]$. *La séparation entre* $\mathcal{J}_j$ *et* $\mathcal{J}_{j+1}$ *se trouve dans* $\left[\frac{h}{C'\log\frac{1}{h}}, C'\right]$. *La séparation entre deux intervalles du type (b) est* $\ge\frac{1}{C'}$.

Soit $\varepsilon_0>0$ comme dans le Théorème 3 et soit $0<h_1\le\min(h_0(\varepsilon_0),\tilde{h}_0(\varepsilon_0, F(\varepsilon_0)))$ assez petit pour que : $0<h\le h_1\Rightarrow\max(\alpha(\varepsilon_0,h),\tilde{\alpha}(\varepsilon_0,F(\varepsilon_0),h)\le\tilde{\varepsilon}_0(F(\varepsilon_0))$. (On peut supposer que la fonction "F" dans les deux théorèmes est la même). Soit P un opérateur h-pseudodifférentiel avec $0<h\le h_1$ vérifiant

(I) P est de type $1f$ avec $\varepsilon(P)\le\varepsilon_0$,

ou bien,

(II) P est de type $2f$ avec $\varepsilon(P)\le\tilde{\varepsilon}_0(F(\varepsilon_0)), C(P)\le F(\varepsilon_0)$.

Alors d'après les deux théorèmes ci-dessus, le μ-spectre de P se localise dans une réunion d'intervalles fermés disjoints, et l'étude du μ-spectre dans chaque intervalle se ramène, après une application affine : $\mu\mapsto\mu'$, à l'étude du μ'-spectre de Q, où Q est un opérateur h'-pseudodifférentiel vérifiant (I) ou (II). Si $O<h'\le h_1$ on peut ensuite recommencer. Tenant compte aussi des ordres de grandeur des intervalles et de leurs séparations, on obtient le,

Corollaire 5.— *Il existe* $\varepsilon_0>0$, $C_0>0$ *tels que si* $\frac{h}{2\pi}=1/(q_1+1/(q_2+\ldots))$ *avec* $C_0\le|q_j|\in\mathbf{N}$, $1\le j<\infty$, *et si* P *est un opérateur* h*-pseudodifférentiel de type* $1f$, *avec* $\varepsilon(P)\le\varepsilon_0$, *alors* $\mu - Sp(P)$ *est de mesure nulle et le complémentaire* $(\mu - Sp(P))^c$ *est dense dans* $\mathbf{R}$.

Dans les deux théorèmes on peut donner plus de renseignements sur l'emplacement, la largeur et les séparations des différents intervalles, ce qui permettra probablement une étude de la dimension de Hausdorff de $\mu - Sp(P)$ dans le Corollaire 5.

Dans [HS1] on montrait comment obtenir des résultats sur l'équation de Schrödinger magnétique-périodique sur $\mathbf{R}^2$. Avec les mêmes hypothèses que dans [HS1] plus une hypothèse de symétrie par rapport aux réflexions dans les axes de coordonnées, on peut ramener l'étude d'une partie du spectre à celle d'un opérateur de type $1f$, et on en déduit alors (sous des hypothèses arithmétiques sur le flux magnétique) que cette partie du spectre est de mesure nulle et dense dans aucun intervalle ouvert. Ici, il est important de noter que nous savons aussi traiter des perturbations de P_0, car l'opérateur de Harper dans sa forme pure n'existe pas nécessairement dans la nature.

Bibliographie

[A] Ya. Azbel, Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field, Soviet Physics JETP, 19, n°3, sept.1964.

[B-S] J. Bellissard-B. Simon, Cantor Spectrum for the Almost Mathieu equation, Journal of functional Analysis : Vol.48, n°3, Octobre 1982.

[HS1] B. Helffer, J. Sjöstrand, Analyse semiclassique pour l'équation de Harper. Prépubl. Dépt. de Math. Univ. de Nantes, 1987. (Voir aussi l'exposé n°17, 1986-87 de ce séminaire, ainsi que l'exposé n°6 des Journées des E.D.P. de St Jean de Monts, 1987).

[HS2] B. Helffer, J. Sjöstrand, Analyse semiclassique pour l'équation de Harper II. Comportement semiclassique près d'un rationnel. En préparation.

[M] P. Van Mouche, The coexistence problem for the discrete Mathieu operator. Preprint.

[W] M. Wilkinson, Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems, Proc. R. Soc. London A 391, (1984), 305-350.

J. Sjöstrand
Université Paris XI
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay cedex

B. Helffer
Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière
44072 Nantes cedex 03