

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. C. NEDELEC

## **Homogénéisation du problème des courants de Foucault dans un transformateur**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1987-1988), exp. n° 15,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1987-1988\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988__A15_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 691.596 F

**Séminaire 1987-1988**

---

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

HOMOGENEISATION DU PROBLEME  
DES COURANTS DE FOUCAULT  
DANS UN TRANSFORMATEUR

J.C. NEDELEC



## Résumé

Nous considérons un transformateur constitué de deux feuilles minces. L'une est métallique et l'autre isolante et ces deux feuilles sont enroulées en forme de cylindre creux. Le but de cet article est d'étudier sur ce cas, les équations de Maxwell qui décrivent les courants de Foucault, dans le cas où les épaisseurs des plaques sont minces. Lorsque cette épaisseur tend vers zéro, nous obtenons un problème limite par une technique d'homogénéisation. Ce problème est inhabituel. Il fait intervenir la conductivité moyenne et la limite des courants est radiale.

**N.B.** Ce travail est le fruit d'une collaboration avec S. Wolf.

### 1. La géométrie.

Nous utilisons les coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  et la base associée  $(e_\rho, e_\theta, e_z)$  qui est orthonormée.

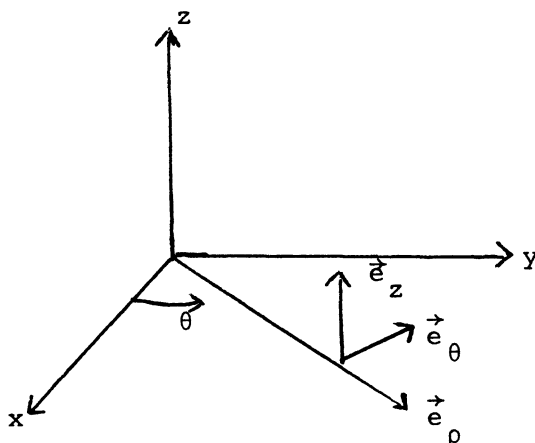


Figure 1

Le transformateur est un cylindre creux d'axe  $Oz$  constitué comme un gâteau roulé, de deux feuilles l'une métallique et l'autre diélectrique, enroulées l'une sur l'autre.

$\varepsilon_c$  est l'épaisseur du conducteur

$\varepsilon_i$  est l'épaisseur de l'isolant

$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_c$  est l'épaisseur élémentaire des deux feuilles.

Nous notons  $\Omega_i^\varepsilon$  le milieu diélectrique et  $\Omega_c^\varepsilon$  le milieu conducteur. La surface de séparation conducteur-diélectrique est noté  $\Sigma_\varepsilon$ . Soit  $S$  une section radiale du transformateur.

La surface  $\Sigma^\varepsilon$  est décrite par sa section dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  qui est une spirale d'Archimède notée  $C^\varepsilon$ .

L'ensemble du transformateur est le domaine  $\Omega$

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 ; \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; a \leq z \leq b\}.$$

Mais la structure interne dépend du paramètre  $\varepsilon$ .

Les champs électriques et magnétiques  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont créés dans le transformateur  $\Omega$  sous l'action d'un champ magnétique extérieur  $\vec{H}_e$  et d'une différence de potentiel appliquée aux bornes intérieures et extérieures de la feuille de métal.

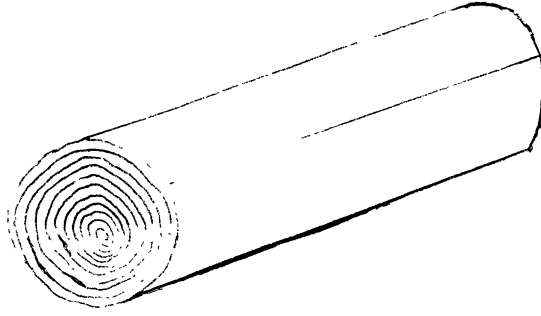


Figure 2

## 2. Les équations de Maxwell.

Dans l'hypothèse où les courants de déplacements sont négligés (hypothèse des courants de Foucault), les équations de Maxwell s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \text{rot } H^\varepsilon = J^\varepsilon \\ \text{div } H^\varepsilon = 0 \\ \text{div } J^\varepsilon = 0 \\ \text{rot } E^\varepsilon + i\omega\mu H^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

dans le domaine  $\Omega^\varepsilon$  et au sens des distributions, et aussi

$$(2) \quad \text{div } E^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_i^\varepsilon \quad \text{et dans } \Omega_c^\varepsilon.$$

Mais la composante  $E^\varepsilon \cdot n^\varepsilon$  est discontinue à la traversée de la surface  $\Sigma^\varepsilon$  de normale  $n^\varepsilon$ . Ceci correspond à la présence de charges électriques à la surface du diélectrique.

Nous ajoutons la loi d'Ohm qui s'écrit

$$(3) \quad \begin{cases} J^\varepsilon = \sigma E^\varepsilon & \text{dans } \Omega_c^\varepsilon \quad \text{ou encore} \\ j^\varepsilon = \sigma^\varepsilon E^\varepsilon & \text{dans } \Omega \quad \text{avec } \sigma^\varepsilon = \begin{cases} \sigma & \text{dans } \Omega_c^\varepsilon \\ 0 & \text{dans } \Omega_i^\varepsilon \end{cases} \end{cases}$$

La conductivité  $\sigma$  est une donnée.

L'équation (2) est vraie au sens des distributions et entraîne donc

$$(4) \quad J^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = \sigma E^\varepsilon \cdot n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur la surface } \Sigma^\varepsilon \quad \text{du côté conducteur.}$$

Les conditions aux limites de ce problème sont d'une part

$$(5) \quad H \wedge \nu = H_e \wedge \nu \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{de normale } \nu$$

et d'autre part la condition sur la différence de potentiel qui s'exprime mal. Afin de nous ramener à un problème avec conditions aux limites nulles (ce qui permettra d'introduire la formulation variationnelle), nous introduisons le courant  $J_R^\varepsilon$  suivant :

$$(6) \quad \begin{cases} J_R^\varepsilon = \begin{cases} I\vec{\tau}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_c^\varepsilon \\ 0 & \text{dans } \Omega_i^\varepsilon \end{cases} \\ \vec{\tau}^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\pi\rho}\vec{e}_\rho + \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Le vecteur  $\vec{\theta}^\varepsilon$  est le vecteur tangent à la spirale parallèle à  $\mathcal{C}^\varepsilon$  qui passe par le point courant.

La constante  $I$  est donnée et il est équivalent du point de vue physique de se donner  $I$  où de se donner la différence de potentiel. Lors du passage à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers zéro seule la donnée de  $I$  est commode. Le courant  $J_R^\varepsilon$  est l'intensité moyenne qui traverse une section de conducteur et donc si nous posons

$$(7) \quad j^\varepsilon = J^\varepsilon - J_R^\varepsilon$$

le courant  $j^\varepsilon$  sera d'intensité moyenne nulle.

Un calcul montre que

$$(8) \quad J_R^\varepsilon = \text{rot } H_R^\varepsilon$$

$$(9) \quad H_R^\varepsilon = H_a^\varepsilon + H_S^\varepsilon$$

$$(10) \quad H_a^\varepsilon = -I \frac{\varepsilon_c}{2\pi} \frac{z}{\rho} \vec{e}^\theta$$

$$H_S^\varepsilon = I\beta_S^\varepsilon \vec{e}_z$$

$$(12) \quad \beta_S^\varepsilon = \begin{cases} -\rho + \frac{\varepsilon_i}{2\pi}\varphi & \text{dans } \Omega_c^\varepsilon \\ -\frac{\varepsilon_c}{2\pi}\varphi - \rho_0 - \varepsilon_c & \text{dans } \Omega_i^\varepsilon \end{cases}$$

où  $\varphi$  est l'angle polaire avec la détermination obtenue en suivant la spirale  $\mathcal{C}^\varepsilon$  ( $\varphi = \theta + 2\pi p$  sur le  $p^\varepsilon$  tour)

Nous posons donc

$$(13) \quad \begin{cases} h^\varepsilon = H - H_R^\varepsilon - H_e \\ j^\varepsilon = J^\varepsilon - J_R^\varepsilon \end{cases}$$

Les équations deviennent alors

$$(14) \quad \begin{cases} \text{rot } h^\varepsilon - j^\varepsilon = 0 \\ \text{rot } E^\varepsilon + i\omega\mu h^\varepsilon = -i\omega\mu(H_R^\varepsilon + H_e) \\ j^\varepsilon - \sigma^\varepsilon E^\varepsilon = -J_R^\varepsilon \end{cases} \quad \text{dans } \Omega$$

$$(15) \quad \begin{cases} h^\varepsilon \wedge n = 0 \\ j^\varepsilon \cdot n = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Soit  $S$  une section radiale du cylindre et  $S_p^\varepsilon$  la section du  $p^e$  tour de conducteur. Nous obtenons (en utilisant la formule de la divergence)

$$(16) \quad \int_{S_p^\varepsilon} (j^\varepsilon \cdot e_\theta) d\sigma = \int_{S_{p+1}^\varepsilon} (j^\varepsilon \cdot e_\theta) d\sigma$$

$$(17) \quad \int_S (j^\varepsilon \cdot e_\theta) d\sigma = 0$$

Si bien que

$$(18) \quad \int_{S_p^\varepsilon} (j^\varepsilon \cdot e_\theta) d\sigma = 0$$

Cette relation aura un sens à la limite et elle explique bien qu'il était nécessaire de soustraire le courant  $j_R^\varepsilon$  pour obtenir une formulation variationnelle.

### 3. Formulation variationnelle.

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivant

$$\mathcal{H}(\text{div}) = \{u \in (L^2(\Omega))^3; \text{div } u \in L^2(\Omega)\}$$

$$\mathcal{H}(\text{rot}) = \{u \in (L^2(\Omega))^3; \text{rot } u \in (L^2(\Omega))^3\}$$

$$V = \{k \in \mathcal{H}(\text{rot}); \text{div } k = 0; k \wedge n / \partial\Omega = 0\}$$

On considère alors l'espace de Hilbert  $W^\varepsilon$  suivant

$$W^\varepsilon = \{k \in V; \text{rot } k = 0 \quad \text{dans } \Omega_i^\varepsilon\}$$

En partant des équations (14), une multiplication par  $\vec{k}$ , l'utilisation de la formule de Stokes et l'élimination du champ électrique  $E$  à l'aide de la dernière équation conduisent à la formulation variationnelle suivante

$$(19) \quad \int_{\Omega} [((\text{rot } h^\varepsilon + J_R^\varepsilon) \cdot \text{rot } k) + i\omega\mu\sigma((k^\varepsilon + H_e + H_R^\varepsilon) \cdot k)] dx = 0 \quad \forall \vec{k}.$$

Ce problème a clairement une solution unique. L'utilisation de l'inégalité de Friedrich conduit aux estimations a priori suivantes :

$$(20) \quad \|h^\varepsilon\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq C;$$

$$(21) \quad \|j^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C; \quad (j^\varepsilon = \text{rot } h^\varepsilon).$$

Nous pouvons extraire des sous suites telles que

$$(22) \quad \begin{cases} h^\varepsilon \rightarrow h & \text{dans } (H^1(\Omega))^3 \text{ faible et dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ fort} \\ j^\varepsilon \rightarrow j & \text{dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ faible} \end{cases} .$$

Il s'agit maintenant de caractériser les champs limites  $h$  et  $j$ , i.e de trouver l'équation vérifiée par ces limites.

#### 4. Le problème limite.

La première étape pour déterminer ce problème consiste à chercher l'espace de Hilbert qui contient les courants limites  $j$ . Nous utilisons plusieurs lemmes

**lemme 1.**— *La limite faible  $\vec{j}$  du courant  $\vec{j}^\varepsilon$  est telle que*

$$(23) \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$(24) \quad (\vec{j} \cdot \vec{e}_\rho) = 0$$

**preuve** Nous introduisons

$$(25) \quad f = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon}$$

$$\vec{a}^\varepsilon = \vec{e}_\rho - \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\theta$$

Nous avons

$$\operatorname{rot} \vec{a}^\varepsilon = 0$$

Soit alors

$$\chi^\varepsilon = \begin{cases} 1 & , \text{ dans } \Omega_c^\varepsilon; \\ 0 & , \text{ dans } \Omega_i^\varepsilon. \end{cases}$$

Nous avons

$$\operatorname{rot} (\chi^\varepsilon \vec{a}^\varepsilon) = 0$$

Soit  $\varphi$  une fonction de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Nous avons

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{h}^\varepsilon \cdot \vec{a}^\varepsilon) \varphi dx = \int_{\Omega} \vec{h}^\varepsilon \cdot (\vec{a}^\varepsilon \wedge \nabla \varphi) dx$$

et d'autre part

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} h^\varepsilon \cdot \chi^\varepsilon \vec{a}_\varepsilon dx = \int_{\Omega} h^\varepsilon \chi^\varepsilon \cdot (\vec{a}_\varepsilon \wedge \nabla \varphi) dx$$

En passant à la limite dans ces deux égalités, nous obtenons

$$(1 - f) \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{h} \cdot \vec{e}_\rho) \varphi dx = 0 \quad ; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

soit l'égalité (24) dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**lemme 2.**— *La limite faible  $\vec{j}$  du courant  $\vec{j}^\varepsilon$  est telle que*

$$(26) \quad \int_a^b (\vec{j} \cdot \vec{e}_\theta) dz = 0 \quad ,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\int_{\Omega} (\vec{j} \cdot \vec{e}_\theta) \psi(\rho, \theta) dx = 0 \quad ;$$

$\forall \psi(\rho, \theta)$  régulière et nulle au bord



**Preuve** Nous introduisons la fonction suivante

$$(28) \quad \gamma_S^\varepsilon = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2\pi} \varphi + \rho_0 & \text{dans } \Omega_c^\varepsilon \\ (\rho - \rho_0 - \frac{\varepsilon_c}{2\pi} \varphi) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} + \rho_0 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \varepsilon_c & \text{dans } \Omega_i^\varepsilon. \end{cases}$$

Nous avons alors la convergence

$$\begin{aligned} \gamma_S^\varepsilon &\rightarrow \rho \quad \text{uniformément} \quad . \\ \nabla \gamma_S^\varepsilon &= \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta & \text{dans } \Omega_c^\varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} (\vec{e}_\rho - \frac{\varepsilon_c}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta) & \text{dans } \Omega_i^\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction  $\psi(\gamma_S^\varepsilon, \theta)$  tend uniformément vers  $\psi(\rho, \theta)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Mais cette fonction est constante sur chaque tranche de conducteur  $S_\rho^\varepsilon$  et donc nous avons en utilisant (18) :

$$(29) \quad \int_{\Omega} (j^\varepsilon \cdot \vec{e}_\theta) \psi(\gamma_S^\varepsilon, \theta) \frac{\gamma_S^\varepsilon}{\rho} dx = 0$$

La limite quand  $\varepsilon$  tend vers zéro conduit à l'égalité (27).

Nous savons maintenant qu'il faut chercher le courant  $\vec{j}$  dans l'espace de Hilbert  $K$

$$K = \left\{ \vec{j} \in (L^2(\Omega))^3 ; \operatorname{div} \vec{j} = 0, (\vec{j} \cdot \vec{e}_\rho) = 0 \quad (\vec{j} \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} = 0 ; \int_a^b (\vec{j} \cdot \vec{e}_\theta) dz = 0 \right\}$$

Nous avons une description précise de cet espace sous la forme

**Lemme 3.**—

Un vecteur  $\vec{j}$  est dans l'espace  $K$  si et seulement si

$$(30) \quad \begin{cases} j_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial z} ; \\ j_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} ; \end{cases}$$

$$(31) \quad j_\rho = 0 \quad ;$$

$$\phi \in (L^2(\Omega))^3 ; \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \in (L^2(\Omega))^3 ; \frac{\partial \phi}{\partial z} \in (L^2(\Omega))^3 ;$$

$$(32) \quad \phi(\rho, \theta, a) = \phi(\rho, \theta, b) = 0.$$

ou encore

$$(33) \quad \vec{j} = \operatorname{rot} (\phi \vec{e}_\rho)$$

**Remarque** Le vecteur  $\vec{h}$  n'est pas en général égal à  $\phi \vec{e}_\rho$  car par exemple  $\operatorname{div} (\phi \vec{e}_\rho) = (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{e}_\rho)$  n'est pas nul. Nous avons

$$(34) \quad \vec{h} - \Phi \vec{e}_\rho = \nabla \alpha$$

où la fonction  $\alpha$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ .

Nous pouvons introduire l'espace de Hilbert des vecteurs où varie le champ magnétique  $\vec{h}$ .

$$W = \{ \vec{k} \in V ; \operatorname{rot} \vec{k} \in K \}$$

Nous pouvons donner le problème limite

**Théorème.**— Le champ magnétique  $\vec{h}$  vérifie l'équation

$$(35) \quad \int_{\Omega} [((\text{rot } \vec{h} + \vec{J}_S) \cdot \text{rot } \vec{k}) + i\omega\mu\theta f((\vec{h} + \vec{H}_e + \vec{H}_S) \cdot \vec{h})] dx = 0; \quad \forall \vec{k} \in W.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{j} = \text{rot } \vec{h} \\ \vec{H}_S = I\beta_S \vec{e}_z \\ \beta_S = -\rho_0 - f(\rho - \rho_0) \\ \vec{J}_S = \text{rot } \vec{H}_S \end{array} \right.$$

**Esquisse de preuve.** Nous choisissons un vecteur  $\vec{k}$  régulier dans l'espace  $W$  et  $\vec{w} = \text{rot } \vec{k}$ . Nous avons

$$\vec{w} = \text{rot } (\phi \vec{e}_\rho)$$

Nous introduisons alors le courant  $\vec{i}^\varepsilon$  associé par

$$\vec{w}^\varepsilon = \text{rot} \left( \phi \left( \vec{e}_\rho - \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \vec{e}_\theta \right) \right)$$

$$\vec{i}^\varepsilon = \vec{w}^\varepsilon \chi^\varepsilon$$

On vérifie alors que

$$\text{div } \vec{i}^\varepsilon = 0$$

et que  $\vec{i}^\varepsilon$  converge vers  $f\vec{w}$  dans  $(L^2(\Omega))^3$  faible. Soit  $\vec{\ell}^\varepsilon$  le vecteur de l'espace  $W^\varepsilon$  tel que

$$\text{rot } \vec{\ell}^\varepsilon = \vec{i}^\varepsilon.$$

Nous avons alors les convergences

$\vec{\ell}^\varepsilon \rightarrow f\vec{k}$  dans  $(H^1(\Omega))^3$  faible et  $(L^2(\Omega))^3$  fort,  $\vec{w}^\varepsilon \rightarrow \vec{w}$  dans  $(L^2(\Omega))^3$  fort.

En utilisant la formulation variationnelle du problème (19) et les convergences ci-dessus, nous obtenons le problème limite.

**Interprétation** Nous pouvons revenir aux variables initiales  $H$  et  $J$ . Le problème qui apparait est de retrouver le champ électrique  $E$ . Il est naturel de tenter de le définir tel que

$$(37) \quad \text{rot } E + i\omega\mu H = 0$$

Alors la formulation variationnelle (35) n'est autre que l'équation

$$(38) \quad \int_{\Omega} ((\vec{J} - \sigma f \vec{E}) \cdot \vec{w}) dx = 0; \quad \forall w \in K;$$

soit encore en utilisant le lemme 3

$$(39) \quad (\text{rot } (J - \sigma f E) \cdot \vec{e}_\rho) = 0$$

Le système limite s'écrit alors

$$(40) \quad \begin{cases} \text{rot } H - J = 0 \\ \text{rot } E + i\omega\mu H = 0, \quad \text{dans le domaine } \Omega, \\ (\text{rot } (J - \sigma f E) \cdot \vec{e}_\rho) = 0 \end{cases}$$

et les conditions aux limites non homogènes associées sont

$$(41) \quad H \wedge n = (H_e + H_S) \wedge n \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Le champ électrique  $E$  n'intervient que par son rotationnel. Il est donc défini à un champ de gradient près. Physiquement ceci est difficile à interpréter. On peut cependant remarquer que lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, la longueur du conducteur devient infini. Les charges électriques peuvent donc être arbitraires dans le dispositif dans une certaine mesure.

### 5. Le cas d'un dispositif à couches concentriques.

La description de la géométrie du transformateur est semblable à celle précédemment décrite sauf que la coupe du cylindre est constituée de couches concentriques de métal et de diélectrique alternativement. L'épaisseur totale de deux couches est  $\varepsilon$  et nous gardons les mêmes notations que précédemment. La seule source de courant est le champ extérieur  $\vec{H}_e$ . Si nous posons

$$(42) \quad h^\varepsilon = H^\varepsilon - H_e$$

les équations sont

$$(43) \quad \begin{cases} \text{rot } h^\varepsilon - J^\varepsilon = 0 \\ \text{rot } E^\varepsilon + i\omega\mu(h^\varepsilon + H_e) = 0 \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \\ \text{div } J^\varepsilon = 0 \\ J^\varepsilon = \sigma^\varepsilon E^\varepsilon. \end{cases}$$

et la condition limite

$$(44) \quad h^\varepsilon \wedge n = 0 \quad , \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$

L'espace  $W^\varepsilon$  ayant la même définition la formulation variationnelle est inchangée, soit

$$(45) \quad \int_{\Omega} [(\text{rot } \vec{h}^\varepsilon \cdot \text{rot } \vec{k}) + i\omega\mu\sigma((\vec{h}^\varepsilon + \vec{H}_e) \cdot \vec{k})] dx = 0; \quad \forall \vec{k} \in W^\varepsilon.$$

La différence entre les deux cas apparait dans le problème limite. La géométrie étant différente, nous n'avons plus les relations (18) et donc l'espace qui contient les courant limites  $\tilde{K}$  est donné par

$$\tilde{K} = \left\{ \vec{j} \in (L^2(\Omega))^3; \text{div } \vec{j} = 0; (\vec{j} \cdot \vec{e}_\rho) = 0, \quad \text{dans } \Omega; (\vec{j} \cdot \vec{n}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega; \int_S (\vec{j} \cdot \vec{e}_\theta) d\sigma = 0 \right\}$$

Nous avons l'équivalent du lemme 3.

**Lemme 4.**— Un vecteur  $\vec{j}$  est dans l'espace  $\tilde{K}$  si et seulement si

$$(46) \quad \begin{cases} j_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ j_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$(47) \quad j_\rho = 0$$

$$(48) \quad \begin{aligned} \phi(\rho, \theta, a) = 0 \quad ; \quad \phi(\rho, \theta, b) = c(\rho) \\ \phi \in (L^e(\Omega))^2 ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \in (L^2(\Omega))^3 ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \in (L^2(\Omega))^3. \\ \text{ou encore } \vec{j} = \text{rot}(\phi \vec{e}_\rho) \end{aligned}$$

Le champ magnétique  $\vec{h}$  prend la forme

$$(49) \quad \vec{h} = \phi \vec{e}_\rho + \nabla \alpha$$

où la fonction  $\alpha$  est dans  $(H^1(\Omega))^3$  et est nulle sur les surfaces intérieures et extérieures du cylindre et sur la face  $z = a$ . La valeur de  $\alpha$  sur la surface  $z = b$  est une fonction de  $\rho$  seulement. Nous introduisons l'espace

$$\tilde{W} = \{ \vec{k} \in V ; \text{rot } \vec{k} \in \tilde{K} \}$$

et la solution limite est donnée par

**Théorème..**—

Le champ limite  $\vec{k}$  vérifie l'équation

$$(50) \quad \int_{\Omega} [(\text{rot } \vec{h} \cdot \text{rot } \vec{h}) + i\omega\mu\sigma f((\vec{h} + \vec{H}_e) \cdot \vec{H})] dx = 0 ; \quad \forall \vec{k} \in \tilde{W}.$$

$$(51) \quad \vec{j} = \text{rot } \vec{h}$$

L'interprétation de ce problème est analogue à celle du précédent et conduit à l'équation

$$(52) \quad \int_{\Omega} (\vec{j} - \sigma f \vec{E} \cdot \vec{w}) dx = 0 ; \quad \forall \vec{w} \in \tilde{W}.$$

En utilisant le lemme 4, cette équation entraîne

$$(53) \quad (\text{rot } (\vec{J} - \sigma f \vec{E}) \cdot \vec{e}_\rho) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Il reste une autre information contenue dans (52) qui est

$$(54) \quad \int_0^{2\pi} ((\vec{J} - \sigma f \vec{E}) \cdot \vec{e}_\theta) d\theta = 0$$

Pour ce problème le champ électrique  $E$  est définie à un gradient près.

**Conclusion** Nous avons obtenu un problème homogénéisé qui est plus facilement approximable par une technique d'éléments finis. Ceci est l'objet de la suite du travail qui préoccupe S. Wolf actuellement.

## Bibliographie.

- [1] A. BENDALI, Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, 1984.
- [2] A. BENDALI, J.M. DOMINGUEZ, S. GALLIC, A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems in three dimensional domains, J. of Math. Ana. and App., Vol. 107. n° 2, May 1985.
- [3] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, Asymptotic Analysis for periodic structures, North Holland, New York, 1978.
- [4] G. DUVAUT, J.L. LIONS, Les inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1972.
- [5] KRAUS and CARVER, Electromagnetics, Mac Graw Hill, New York, 1973.
- [6] J.L. LIONS, E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [7] F. MURAT, H-Convergence, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique, 1977/78, Université D'Alger.
- [8] J.C. NEDELEC, Elements finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans  $\mathbf{R}^3$ . Num. Math. 39, p. 97-112, 1982.
- [9] J.C. NEDELEC, A new family of mixed finite element in  $\mathbf{R}^3$ , Num. Math 50, 57-81 (1986).
- [10] J.C. NEDELEC, S. WOLF, Homogenization of the problem of Eddy-Current in a transformer core. Rapport interne n° 166 du Centre de Mathématiques Appliquées. Ecole Polytechnique. Octobre 1987.
- [11] J.C. NEDELEC, S. Wolf, Homogénéisation des courants de Foucault dans un transformateur. C.R.A.S. T. 306, Série II, P. 193.196, 1988.
- [12] L. TARTAR, Cours Peccot, Collège de France, 1977.
- [13] J. VAN BLADEL, Electromagnetic Fields, Mac Graw Hill, New York, 1964.

Centre de mathématiques Appliquées  
Ecole Polytechnique  
91128 - Palaiseau cedex