Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. Vaillant

Conditions d'hyperbolicité pour les systèmes à multiplicité constante, de rang pouvant varier

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 19, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A19_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CONDITIONS D'HYPERBOLICITE POUR LES SYSTEMES A MULTIPLICITE CONSTANTE, DE RANG POUVANT VARIER

J. VAILLANT

Exposé n°XIX

24 Novembre 1987

Nous avons résumé dans [7] [8] la microlocalisation d'un système, à partie principale hyperbolique de multiplicité constante et donné des formes réduites. On distingue les cas, d'abord selon le rapport entre le degré p du polynôme minimal relatif à une racine et sa multiplicité m ($p = m$, $p > \frac{m}{2}$, $p \leq \frac{m}{2}$), plus précisément selon la localisation algébrique de la matrice caractéristique par rapport à la racine caractéristique considérée (facteurs invariants). Dans [9], nous étudions un cas où $p \leq \frac{m}{2}$; ces cas "voisins" de l'hyperbolicité forte sont les plus compliqués. Ici nous donnerons les résultats "voisins" du cas scalaire ($p = m$), déjà bien connus dans le rang constant [1], [2], [4], mais encore difficiles dans le cas du rang variable [3], [6], [7] ; en particulier nous donnerons les conditions de Levi sous une forme nouvelle, invariante, analogue à celle des autres cas : on calcule des symboles d'opérateurs différentiels ; nous détaillons le calcul en multiplicité 3 et rang variable. La bibliographie concernant le cas du rang constant est très résumée ; on peut se reporter à [8] pour une bibliographie un peu plus complète.

I Réduction de l'opérateur et conditions de Levi

a) $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots x_n) \in \Omega$;

Ω est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

On considère un opérateur différentiel h d'ordre 1, matriciel $m \times m$, à coefficients analytiques et le problème de Cauchy :

$$h(x, D)u = f,$$

$$u_{|x_0 = t} = g_t(x').$$

f est le second membre donné, g_t la donnée de Cauchy sur $x_0 = t$ et u l'inconnue.

Les hyperplans $x_0 = t$ sont supposés non caractéristiques en chaque point, de sorte que h peut sécrire :

$$h(x, D) = \mathrm{a}(x, D) + b(x) = ID_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} a^i(x) D_i + b(x),$$

où : $D_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$, $D_i = \frac{D}{\partial x_i}$, et les $a^i(x), b(x)$ sont des matrices $m \times m$ fonctions analytiques de x.

Définitions.— *Le problème de Cauchy est bien posé en $(\underline{t}, \underline{x}') \in \Omega$ si et seulement si il existe un voisinage ouvert ω de $(\underline{t}, \underline{x}'), \omega \subset \Omega$, tel que : $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\omega), \forall g_{\underline{t}} \in \mathcal{C}^\infty(\omega_{\underline{t}})$, où : $\omega_{\underline{t}} = \omega \cap \{x_0 = \underline{t}\}$, il existe une solution $\mathcal{C}^\infty$, unique du problème de Cauchy dans ω, le problème de Cauchy est bien posé dans Ω, si il est bien posé en tout point de Ω.*

On dira que le problème de Cauchy est bien posé au voisinage de 0, ou brièvement, localement bien posé, s'il existe un voisinage ouvert de 0, Ω, où le problème de Cauchy est bien posé.

Remarques

i) L'hypothèse d'analyticité des coefficients est indispensable pour la démonstration des conditions suffisantes, lorsque le rang généralisé [8] varie ; la dernière définition est justifiée par l'analycité des coefficients ; en fait on considèrera des germes en 0.

ii) Avec quelques précautions (par exemple : densité des points où le rang généralise est constant) on peut obtenir les conditions nécessaires en supposant seulement les coefficients $\mathcal{C}^\infty$; de même dans le cas du rang constant, on peut alors, obtenir les conditions suffisantes.

On note : $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ la variable duale de x et on considère le déterminant caractéristique :

$$\det \mathrm{a}(x,\xi) \equiv \det(\xi_0 I + \sum_{1\le i\le n} a_i(x)\xi_i) \; ;$$

on fait l'hypothèse qu'il est **hyperbolique** par rapport à la direction (1,0) et que les racines caractéristiques sont de **multiplicité constante**.

On décompose $\det \mathrm{a}(x,\xi)$ en polynômes en ξ à coefficients analytiques et irréductibles ; on a :

$$\det \mathrm{a}(x,\xi) = H_1^{m_1}(x,\xi) H_2^{m_2} \ldots H_s^{m_s}$$

les H_j sont hyperboliques par rapport à $(1,0)$.

Nous allons nous ramener à séparer l'étude des différents facteurs, de sorte que l'on posera, pour simplifier les notations :

$$\det \mathrm{a} = H^{m_1} K \; , \; H_1 = H$$

et l'on supposera K à caractéristiques simples.

On note A la matrice des cofacteurs de a de sorte que

$$\mathrm{a}A = A\mathrm{a} = \det \mathrm{a} I, \quad \text{I matrice unité} \quad .$$

On considère l'anneau localisé de l'anneau des polynômes de ξ, à coefficients les germes analytiques de x , par rapport à l'idéal engendré par H, c'est à dire l'anneau principal des fractions rationnelles dont le dénominateur n'est pas divisible par H [5]. On rappelle que ses idéaux sont engendrés par les puissances de H.

Dans cet anneau $\mathrm{a}(x,\xi)$ est équivalente à une matrice diagonale, dont les éléments sont les facteurs invariants de a, c'est à dire qu'il existe P et Q telles que:

$$\mathrm{a}(x,\xi) = P(x,\xi) \begin{pmatrix} H^p & & & & & 0 \\ & H^{q_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & H^{q_k} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}, Q(x,\xi)$$

$p \geq q_1 \geq \ldots \geq q_k$; $p + q_1 + \ldots + q_k = m_1$; de sorte que :

$$K \equiv \det P . \det Q;$$

Q peut être choisi comme une matrice de polynômes en ξ que l'on peut calculer explicitement [5] et son déterminant s'exprime à l'aide des mineurs de a . $H^{q_1+\cdots+q_k}$ est la plus haute puissance de H qui divise A et on a une propriété analogue pour les mineurs d'ordre plus petit.

Dans [8], nous avons donné le résumé de l'étude des différents cas et dans [9] nous traitons le cas $p = q_1 = 2$, les autres $q_k = 0$. Ici nous considérons le cas $p = m_1$; $q_1 = \ldots = q_k = 0$, de sorte que A n'est pas divisible par H.

Définition.— *On dira que le rang de a est constant, (par rapport à H), si et seulement si : il n'existe pas de (x, ξ), $\xi \neq 0$, tel que :*

$$H(x,\xi) = 0 \quad \textit{et} \quad A(x,\xi) = 0.$$

b) Nous nous proposons d'énoncer les conditions de Levi relatives à H. A un polynôme homogène en $\xi, \Lambda(x,\xi)$, on associera un opérateur $\Lambda'(x, D)$ différentiel de symbole principal $\Lambda(x,\xi)$; on note σl'opération prendra le symbole principal.

Exemple à $A(x,\xi)$ on associe $A'(x,D); \sigma(A') = A$; à $H(x,\xi)$ on associe $H'(x,D)$ et à $K(x,\xi)$ on associe $K'(x,D); \sigma(H') = H, \sigma(K') = K$.

Conditions L Il existe des opérateurs $H', K', A', \Lambda'_1, \ldots \Lambda'_{m-2}$, (les Λ' sont définis par récurrence) tels que :

$$L_1 : \sigma \left\{ A' \left[hA' - (H')^{m_1} K' I \right] \right\} = H^{m_1 - 1} \Lambda_1,$$

où Λ_1 est un polynôme homogène en ξ, à coefficients analytiques en x.

$$L_2 : \sigma \left\{ A \left[h\Lambda'_1 - hA'H'K' + H'^{m_1} K'H'K' \right] \right\} = H^{m_1-1} \Lambda_2,$$

Λ_2 polynôme homogène.

$$L_{m_1-1} : \sigma \Big\{ A \big[h\Lambda'_{m_1-2} - h\Lambda'_{m_1-3} H'K' + \cdots (-1)^{m_1-2} hA'(H'K')^{m_1-2} + (-1)^{m_1-1} H'^{m_1} K' (H'K')^{m_1-2} \big] \Big\} = H_1^{m_1-1} \Lambda_{m_1-1},$$

Λ_{m_1-1} homogène.

Remarques.

1) Ces conditions sont invariantes par changement de coordonnées.
2) On peut les expliciter à l'aide des coefficients de h [1]; toutefois vu la complexité des calculs nous le ferons seulement pour la forme microlocale de ces conditions.
3) On peut les généraliser au cas des opérateurs h d'ordre plus grand que 1 [1].

b) Nous allons faire une première réduction qui permettra de séparer h en opérateur $\tilde{h}$ correspondant aux différentes racines caractéristiques λ.

On remarque d'abord que :

$$\det \mathrm{a} = (\xi_0 - \lambda_1(x,\xi'))^{m_1} \dots (\xi_0 - \lambda_s(x,\xi'))^{m_1}(\xi_0 - \lambda_{s+1}(x,\xi')) \dots (\xi_0 - \lambda_r(x,\xi'))$$

avec :

$$\lambda_j(x,\xi') \neq \lambda_k(x,\xi'),$$

$\forall x$, $\xi' \neq 0, j \neq k$; les λ_j sont homogènes de degré 1 et analytiques en $x, \xi \neq 0$; jusqu'à l'indice j, ce sont les racines de H_1, ensuite on a écrit les racines de K.

Proposition.— $\forall(\underline{x}, \underline{\xi}'), \underline{\xi}' \neq 0$, *il existe un voisinage conique de ce point et un symbole matriciel* $\Delta_0(x,\xi')$ *défini dans ce voisinage, homogène de degré* 0 *en* ξ', *analytique dans ce voisinage, de déterminant non nul et tel que :*

$$\Delta_0^{-1}(x,\xi')\mathrm{a}(x,\xi)\Delta_0(x,\xi') = \tilde{\mathrm{a}}(x,\xi),$$

$$\tilde{\mathrm{a}}(x,\xi) = \begin{pmatrix} \square & & & & & & 0 \\ & \square & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \square & & & \\ & & & & \xi_0 - \lambda_{s+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \xi_0 - \lambda_r \end{pmatrix};$$

en dehors des blocs, la matrice est nulle; il y a s *blocs carrés de dimension* m_1; *le premier bloc est de la forme :*

$$\tilde{\mathrm{a}}_{(1)}(x,\xi) = \begin{pmatrix} \xi_0 - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_0 - \lambda_1 \end{pmatrix} + \tilde{a}_{(1)}(x,\xi'),$$

où $\tilde{a}_{(1)}$ *est homogène de degré 1 en* ξ' *analytique en* $(x,\xi'), \xi' \neq 0$ *et nilpotente, telle que :* $(\tilde{a}_{(1)})^{m_1} \equiv 0, (\tilde{a}_{(1)})^{m_1-1} \not\equiv 0, \det \tilde{\mathrm{a}}_{(1)} = (\xi_0 - \lambda_1)^{m_1}$.

On désigne par $\Delta(x,D')$ *un opérateur pseudodifferentiel d'ordre* 0, *de symboles* $\Delta(x,\xi')$ *développable en symboles homogènes, tel que* $\Delta(x,\xi') = \Delta_0(x,\xi') + \Delta_1(x,\xi') + \dots + \Delta_\ell(x,\xi') + \dots,$ *où* Δ_ℓ *est d'ordre* $-\ell$.

Proposition.— $\forall(\underline{x}, \underline{\xi}'), \underline{\xi}' \neq 0$, *il existe un opérateur pseudodifferentiel* $\Delta(x,D')$ *tel que :*

$$h(x,D)\Delta(x,D') = \Delta(x,D')\tilde{h}(x,D),$$

modulo un opérateur d'ordre $-\infty$, où : $\tilde{h}(x,D) = \tilde{a}(x,D) + \tilde{b}(x,D')$, ã *est obtenu dans la proposition précèdente ;* $\tilde{b}(x,\xi')$ *est défini dans un voisinage conique, d'ordre* 0 *et de la forme :*

$$\tilde{b}(x,\xi') = \begin{pmatrix} \square & & & & 0 \\ & \square & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \square & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix};$$

en dehors des blocs, la matrice est nulle; les $\tilde{b}$ *sont développables en symboles homogènes.*

La preuve est résumée dans [3][8].

On obtient alors les conditions de Levi sur les opérateurs diagonaux obtenus, ainsi $\tilde{h}_{(1)} = \tilde{a}_{(1)} + \tilde{b}_{(1)}$*; on introduit la matrice* $\tilde{A}_{(1)}$ *d'ordre* m_1 *des cofacteurs de* $\tilde{a}_{(1)}$*; on omettra ensuite d'écrire l'indice (1). On notera encore* $\tilde{\Lambda}'$ *un opérateur pseudodifferentiel, différentiel en* D_0*, de symbole developpable en symboles homogènes, dont le symbole principal est* $\tilde{\Lambda} : \sigma(\tilde{\Lambda}') = \tilde{\Lambda}$.

Proposition.— *Supposons que* h *vérifie les conditions de Levi* L*, alors* $\tilde{h}$ *satisfait les conditions de Levi* $\tilde{L}$ *: il existe des opérateurs pseudodifférentiels* $\tilde{\Lambda}'_1, \dots \tilde{\Lambda}'_{m-2}$*, (définis par récurrence), tels que :*

$$\tilde{L}_1 : \sigma\left\{\tilde{A}'\left[\tilde{h}'\tilde{A}' - I(D_0 - \lambda_1(x,D'))^{m_1}\right] = (\xi_0 - \lambda_1(x,\xi'))^{m_1-1}\,\tilde{\Lambda}_1\right\},$$

où $\tilde{\Lambda}_1$ *est homogène en* ξ'*, polynômial en* ξ_0

$$\tilde{L}_{m_1-1} : \sigma\left\{\tilde{A}'\left[\tilde{h}\tilde{\Lambda}'_{m_1-2} - \tilde{h}\tilde{\Lambda}'_{m_1-3}(D_0 - \lambda_1(x,D')) + \dots + (-1)^{m_1-1}I(D_0 - \lambda_1(x,D'))^{2m_1-2}\right]\right\} = (\xi_0 - \lambda_1)^{m_1-1}\tilde{\Lambda}_{m_1-1}$$

Preuve On montre d'abord que dans les conditions (L), on peut remplacer H' par $(D_0 - \lambda_1(x,D'))\dots(D_0 - \lambda_s(x,D'))$. Ensuite on exprime h en fonction de $\tilde{h}$ et on écrit les conditions de Levi par blocs.

c) On utilise maintenant le théorème d'Egorov, pour se ramener au cas où $\lambda_1 = 0$ [4], [8].

Proposition.— $\tilde{h}$ *est microlocalement "conjugué" de :*

$$\tilde{\tilde{h}}(x,D) = \tilde{\tilde{a}}(x,D) + \tilde{\tilde{b}}(x,D'),$$

où

$$\tilde{\tilde{a}}(x,\xi') = I\xi_0 + \tilde{\tilde{a}}(x,\xi'),$$

$\tilde{\tilde{a}}$ *est homogène de degré 1 en* ξ'*, telle que :* $(\tilde{\tilde{a}})^{m_1} \equiv 0, (\tilde{\tilde{a}})^{m_1-1} \not\equiv 0, \det\tilde{\tilde{a}} = \xi_0^{m_1}; \tilde{\tilde{b}}(x,\xi')$ *est développable en symboles homogènes :*

$$\tilde{\tilde{b}}(x,\xi') = \tilde{\tilde{b}}_0(x,\xi') + \tilde{\tilde{b}}_1(x,\xi') + \dots + \tilde{\tilde{b}}_j(x,\xi') + \dots$$

On obtient alors les conditions de Levi $\tilde{\tilde{L}}$ *sous la forme indiquée dans [8].*

Proposition.— *Supposons que h vérifie les conditions L, alors $\tilde{\tilde{h}}$ satisfait les conditions de Levi $\tilde{\tilde{L}}$: Il existe des opérateurs pseudodifférentiels $\tilde{\tilde{\Lambda}}'_1 \ldots \tilde{\tilde{\Lambda}}'_{m-2}$, (définis par récurrence), tels que :*

$$\tilde{\tilde{L}}_1 : \sigma\left\{\tilde{\tilde{A}}'[\tilde{\tilde{h}}\tilde{\tilde{A}}' - ID_0^{m_1}]\right\} = \xi_0^{m_1-1}\tilde{\tilde{\Lambda}}_1,$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{m_1-2} : \sigma\left\{\tilde{\tilde{A}}'[\tilde{\tilde{h}}\tilde{\tilde{\Lambda}}'_{m_1-2} - \tilde{\tilde{h}}\tilde{\tilde{\Lambda}}'_{m_1-3}D_0 + \ldots + (-1)^{m_1-1}ID_0^{2m_1-2}]\right\} = \xi_0^{m_1-1}\tilde{\tilde{\Lambda}}_{m_1-1}.$$

Conséquence [8] Invariance des conditions de Levi par transformation par un opérateur elliptique. Si on transforme $\tilde{\tilde{h}}$ par un opérateur pseudodifférentiel elliptique $\tilde{\tilde{\Delta}}(x, D')$ d'ordre 0, développable en symboles homogènes, de sorte que :

$$\tilde{\tilde{h}} = \tilde{\tilde{\Delta}}^{-1}\tilde{\tilde{h}}\tilde{\tilde{\Delta}},$$

l'opérateur $\tilde{\tilde{h}}$ satisfait les conditions de Levi.

Nous allons expliciter les conditions $\tilde{\tilde{L}}$, pour économiser les notations nous omettrons les tildas. On note :

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\xi_0^{\alpha_0}\,\partial\xi_n^{\alpha_n}} \quad ;\alpha = (\alpha_0, \alpha').$$

Définition.—

$$\mathcal{L}_0(x,\xi,D_x) = A(x,\xi)\left[\sum_{|\alpha|=1}\partial^\alpha \mathrm{a}(x,\xi)D^\alpha + b_0(x,\xi')\right]$$

$$\mathcal{L}_1(x,\xi,D_x) = A(x,\xi)\left[\frac{1}{2!}\sum_{|\alpha'|=2}\partial^{\alpha'}\mathrm{a}(x,\xi)D^{\alpha'} + \sum_{|\alpha'|=1}\partial^{\alpha'}b_0(x,\xi')D^{\alpha'} + b_1(x,\xi')\right]$$

$$\mathcal{L}_{m_1-2}(x,\xi,D_x) = A(x,\xi)\Big[\frac{1}{(m_1-1)!}\sum_{|\alpha'|=}$$

$$m_1 - 1\partial^{\alpha'}\mathrm{a}(x,\xi)D^{\alpha'} + \frac{1}{(m_1-2)!}\partial^{\alpha'}b_0(x,\xi')D^{\alpha'} + \ldots + b_{m_1-2}(x,\xi')\Big]$$

Conditions de Levi

$$\mathcal{L}_0(A) = \xi_0^{m_1-1}\,\mathring{\Lambda}_1$$

$$\mathcal{L}_0(\mathring{\Lambda}_1) - \xi_0\mathcal{L}_1(A) = \xi_0^{m_1-1}\,\mathring{\Lambda}_2$$

$$\mathcal{L}_0(\mathring{\Lambda}_{m_1-2}) - \xi_0\mathcal{L}_1(\mathring{\Lambda}_{m_1-3}) + \ldots + (-1)^{m_1-2}\xi_0^{m_1-2}\mathcal{L}_{m-2}(A) = \xi_0^{m-1}\,\mathring{\Lambda}_{m-1}\ ;$$

les $\mathring{\Lambda}$ sont des symboles matriciels $m \times m$ polynômaux en ξ_0, homogènes en $\xi' \neq 0$, dórdre $m-1$; les conditions expriment l'annulation de fonctions de (x,ξ'), $\xi' \neq 0$ dans le voisinage conique considéré.

Cas du rang constant

Proposition [2].— *Si le rang est constant, il existe un opérateur pseudodifférentiel matriciel $\Delta(x, D')$, elliptique, d'ordre 0, de symbole développable en symboles homogènes, tels que :* $\tilde{\tilde{h}}(x,D)\Delta(x,D') = \Delta(x,D')\tilde{\tilde{\tilde{h}}}(x,D')$, *modulo un opérateur d'ordre* $-\infty$, *où :* $\tilde{\tilde{\tilde{h}}}(x,D) = \tilde{\tilde{a}}(x,D) + \tilde{\tilde{\tilde{b}}}(x,D')$, *avec :* $\tilde{\tilde{a}}(x,\xi) = \tilde{I}\xi_0 + J|\xi'|$, *J est la matrice de Jordan :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{b}}}(x,\xi') = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & \dots & & 0 \\ \tilde{\tilde{\tilde{b}}}{}^m_1 & \dots & \tilde{\tilde{\tilde{b}}}{}^m_{m-1} & 0 \end{pmatrix},$$

les $\tilde{\tilde{\tilde{b}}}$ *sont d'ordre* ≤ 0, *developpables en symboles homogènes. On explicite les conditions de Levi précèdentes et on retrouve celles de [2] :* $\forall A, 1 \leq A \leq m-1$, *ordre de* $\tilde{\tilde{\tilde{b}}}{}^m_A \leq A - m$.

Cas de $\mathbf{R}^2$ (rang variable) L'opérateur réduit $\tilde{\tilde{h}}$ s'écrit, (en omettant les tildas) :

$$h(x,D) = ID_0 + a(x)D_1 + b_0(x) + b_1(x)D_1^{-1} + \dots + b_j(x)D_1^{-j} + \dots,$$

le cas du rang variable étant plus compliqué, nous ferons une **hypothèse** simplificatrice :

$$b_1 = \dots = b_j = \dots = 0,$$

et on écrit :

$$h = ID_0 + aD_1 + b\ ,\ m_1 = m.$$

Les conditions de Levi s'écrivent alors :

1) Si $m = 2\,, a(\mathring{a} + ba)(x) \equiv 0$, où $\mathring{a} = D_0 a$,

2) Si $m = 3$, en posant : $\beta = b - D_1 a$, $M = a^2$, $\mathring{a} + ba = \delta$,

$$N = \mathring{M} + \beta M + a\delta,$$

les conditions s'écrivent :

$$aN(x) = 0$$

$$[a(\mathring{N} + \beta N) + M(\mathring{\delta} + b\delta)](x) = 0$$

3) Si $m = 4$, dans le cas de la matrice :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a détaillé dans [6], les conditions de Levi.

II. Conditions nécessaires pour que le problème de Cauchy soit localement bien.

Il suffit de considérer le cas du rang constant, car les conditions de Levi expriment l'annulation de fonctions continues et l'ensemble des (x,ξ') où le rang est constant est partout dense. On obtient la nécessité des conditions en $\tilde{\tilde{b}}$ dans [2]; on en déduit la nécessité des conditions de Levi, par suite de leur invariance par transformation par un opérateur elliptique.

III. Conditions suffisantes pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé.

Cas du rang constant On obtient le :

Théorème.— *Les conditions de Levi précedentes sont nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé :*

Cas de $\mathbf{R}^2$ et du rang variable *L'hypothèse d'analyticité des coefficients est, dans ce cas, importante.*

1) $m = 2$

Théorème [3],[8].— *La condition de Levi est nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé :*
2) $m = 3$
a) On considère d'abord le cas où $a_1^2 \equiv a_1^3 \equiv 0$ *et on considère le problème de Cauchy relatif à l'opérateur réduit, (avec* $f = 0$*, pour simplifier l'écriture; le cas* f *quelconque se traitant exactement de la même façon)*

$$D_0u_1 + a_1^1 D_1 u_1 + a_2^1 D_1 u_2 + a_3^1 D_1 u_3 + b_1^1 u_1 + b_2^1 u_2 + b_2^1 u_2 + b_3^1 u_3 = 0$$

$$D_0 u_2 + a_2^2 D_1 u_2 + a_3^2 D_1 u_3 + b_1^2 u_1 + b_2^2 u_2 + b_3^2 u_3 = 0$$

$$D_0 u_3 + a_2^3 D_1 u_2 + a_3^3 D_1 u_3 + b_1^3 u_1 + b_2^3 u_2 + b_3^3 u_3 = 0,$$

$$u_1(t,x_1) = g_1(x_1),\ u_2(,x_1) = g_2(x_1),\ u_3(t,x_1) = g_3(x_1)\,;$$

On explicite les conditions de Levi; on remarque d'abord que comme $a^3 \equiv 0$; $a_1^1 = 0$, $a_2^2 = -a_3^3$

$$(a_2^2)^2 + a_2^3 a_3^2 = 0\ ; \tag{1}$$

On a alors les conditions sous la forme (si, lorsque $a_2^2 \equiv a_3^3 \equiv 0$, on a : $a_3^2 \not\equiv 0$) :

$$a_2^2 b_1^2 + a_3^2 b_1^3 = 0 \tag{2}$$

$$\overset{\circ}{a}{}_3^2\, b_1^2 - a_3^2\, \overset{\circ}{b}{}_1^2 + a_3^2 b_1^2(b_1^1 - b_3^3) - a_2^2 b_1^2 b_3^2 - a_3^1 (b_1^2)^2 = 0 \tag{3}$$

$$\text{(4)} \qquad \overset{\circ}{a}{}_2^3\, b^3 - a_2^3\, \overset{\circ}{b}{}_1^3 + a_2^3 b_1^3 (b_1^1 - b_2^2) - a_3^3 b_2^3 b_1^3 - a_2^1 (b_1^3)^2 = 0$$

En considérant (1) et (2), on obtient que l'on peut poser :

$$a_2^2 = -a_3^3 = k\sigma\rho\,,\; a_3^2 = k\sigma^2\,,\; a_2^3 = -k\rho^2,$$
$$b_1^2 = \ell\sigma\,,\; b_1^3 = -\ell\rho,$$

ou ρ et σ sont des germes premiers entre eux, k et ℓ des germes quelconques. On décompose : $\ell = \ell, \ell_2$ où ℓ_1 est la partie de ℓ' indépendante de x_0. On déduit de (3) et (4) que : ℓ_2 divise $k\rho$ et $k\sigma$, donc divise k; on peut donc poser :

$$\rho' = \frac{k}{\ell_2}\rho \quad \text{et} \quad \sigma' = \frac{k}{\ell_2}\sigma; \quad \text{(3) et (4) deviennent:}$$

$$\overset{\circ}{\rho}{}' + \rho' \left(b_1^1 - b_2^2 - \frac{\overset{\circ}{\ell}_1}{\ell_1} \right) - \sigma' b_2^3 - a_2^1 \ell_1 = 0$$

$$\overset{\circ}{\sigma}{}' + \sigma' \left(b_1^1 - b_3^3 - \frac{\overset{\circ}{\ell}_1}{\ell_1} \right) - \rho' b_3^2 - a_3^1 \ell_1 = 0$$

On pose :

$$w = \rho' D_1 u_2 + \sigma' D_1 u_3 + \ell_1 u_1,$$

il vient :

$$D_0 u_1 + a_2^1 D_1 u_2 + a_3^1 D_1 u_3 + b_1^1 u_1 + b_2^1 u_2 + b_3^1 u_3 = 0$$
$$D_0 u_2 + \sigma \ell_2 w + b_2^2 u_2 + b_3^2 u_3 = 0$$
$$D_0 u_3 - \rho \ell_2 w + b_2^3 u_2 + b_3^3 u_3 = 0$$

$$D_0 w + \left(b_1^1 - \frac{\overset{\circ}{\ell}_1}{\ell_1} \right) w + C_2(x) u_2 + C_3(x) u_3 + C_1(x) w = 0,\; C_i \quad \text{analytique} \quad ,$$

les conditions de Cauchy précédentes et :

$$w(t, x_1) = \rho'(t, x_1) D_1 g_2(x_1) + \sigma'(t, x_1) D_1 g_3(x_1) + \ell_1(t, x_1) g_1(x_1).$$

On résout en u_2, u_3, w à l'aide des trois dernières équations et des données de Cauchy; on obtient ensuite u_1, par la première équation, on vérifie que les solutions $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{C}^\infty$ trouvées vérifiant le système initial. On traite directement le cas $a_2^2 \equiv a_3^3 \equiv 0, a_3^2 \equiv 0$.
5) Dans le cas général, on sait que $M = a^2 \not\equiv 0$; supposons que $M_1^1 \not\equiv 0$; comme on a :

$$aN = 0\,,$$

On en déduit que :

$$M_1^2 N_1^1 = N_1^2 M_1^1 \quad \text{et} \quad M_1^3 N_1 = N_1^3 M_1^1.$$

Nous ferons une hypothèse : M_1^1 et N_1^1 sont premiers entre eux. On en déduit que M_1^1 divise M_1^2 et M_1^3; le vecteur analytique $d(x)$ défini par : $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{M_1^2}{M_1^1}$, $d_3 = \frac{M_1^3}{M_1^1}$, forme une base du noyau de $a(x)$ pour x voisin de 0.

On fait un changement de base régulier au voisinage de 0, en prenant d pour premier vecteur de base et a prend la forme du cas considéré en a). Compte tenu de l'invariance des conditions de Levi par cette transformation, on obtient le résultat :

Théorème.— *Supposons M_1^1 et N_1^1 premiers entre eux, les conditions de Levi sont nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé :*

Théorème.— *3) $m = 4$. Supposons que :*

$$a(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les μ sont des germes en 0, tels que $\mu_1\mu_2\mu_3 \not\equiv 0$. Supposons les μ irréductibles. Les conditons de Levi sont alors nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé.

Preuve.— *Elle est donnée dans [6].*

Remarque.

1) On obtient aisément sur les formes réduites la propagation des singularités le long des bicaractéristiques et la perte de régularité dûe aux multiplicités.

2) On pourrait étudier les problèmes précèdents dans les classes de Gevrey en reliant les conditions de Levi aux indices de Gevrey.

Bibliographie

[1] R. BERZIN et J. VAILLANT, J. Math Pures Appliquées, 58, 1979, p 165-216.

[2] K. KAJITANI, Public R.I.M.S. Kyoto, 15, 1979, p 519-550.

[3] W. MATSUMOTO, J. Maths, Kyoto Univ. 21 n° 102, 1981 p 47-84 et p 251-271.

[4] V.M. PETKOV, Trans. Moscow, Math-Soc. 1980, Issue I.

[5] J. VAILLANT, Annal. Inst. Fourier, 151, 1965, p 225-311.

[6] J. VAILLANT, Hyperbolic equations par F. COLOMBINI et M.K.V. Murthy, LONGMAN, 1985.

[7] J. VAILLANT, C.R.Acad. Sc. Paris, 304, Serie I, 1987 p 379-384, 305, Série I, 1987, p377-380.

[8] J. VAILLANT Colloque de PISE, 1987 à paraître dans PITMAN Séries, LONGMAN, 1988.

[9] J. VAILLANT Un système en multiplicité 4..., Livre en l'honneur d'E. DE GIORGI, à paraître.

J. VAILLANT
Unité Associée au CNRS 761
Mathématiques, Tour 45-46, 5ème Etage
Université de Paris VI
4, Place Jussieu
75252 - PARIS Cedex 05