A. Unterberger

Opérateurs pseudodifférentiels et relativité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A4_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS ET RELATIVITE

A. UNTERBERGER

Exposé n°IV

15 DECEMBRE 1987

OPÉRATEURS PSEUDODIFFÉRENTIELS ET RELATIVITÉ

A. Unterberger

Le calcul symbolique des opérateurs est pour les analystes, avant tout, un instrument en vue de l'analyse microlocale des singularités. Il intervient par ailleurs à un double titre en mécanique quantique: pour commencer, si $\mathrm{Op}(f)$ est l'opérateur associé à une fonction f définie sur l'espace des phases d'un système mécanique, $(\mathrm{Op}(f)u, u)$ représente le résultat de la mesure de l'observable f lorsque le système est dans l'état décrit par la fonction d'onde normalisée u; ensuite, c'est l'opérateur $\mathrm{Op}(f)$ défini par la fonction énergie f qui permet dans le cas non relativiste, via l'équation de Schrödinger, de poser le problème de l'évolution quantique du système.

Tant en mathématiques qu'en physique, la règle de quantification Op la plus utilisée, et de loin, est celle de Weyl: on a coutume de voir dans ce calcul une manifestation du groupe d'Heisenberg, mais on peut aussi, et ce sera notre point de vue, y voir à l'œuvre le groupe de Galilée.

Un peu d'analyse microlocale permettra, nous l'espérons, d'intéresser les analystes à la méthode de quantification relativiste (calcul symbolique de Klein-Gordon) qui sera proposée plus loin: il est préférable de considérer simultanément le cas relativiste et le cas non relativiste, désignant par la même lettre les notions qui se correspondent.

1. ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ET ANALYSE MICROLOCALE.

On suppose choisies des unités physiques telles que $h = c = 1$, et l'on considère une particule libre, sans spin, dont la masse est choisie comme unité. Comme en physique, on écrit $x = (t, \vec{x})$ pour désigner le point courant de l'espace-temps, et $p = (p_0, \vec{p})$ désigne un vecteur d'énergie-impulsion: ce dernier décrit dans le cas relativiste le feuillet d'hyperboloïde de masse $\mathcal{H}$ d'équation $p_0 = (1 + |\vec{p}|^2)^{1/2}$, et dans le cas non relativiste le paraboloïde de masse d'équation $p_0 = \frac{1}{2}|\vec{p}|^2$.

Dans le cas relativiste, soit Γ_0 le groupe de Lorentz restreint $SO_0(1,n)$: il opère sur $\mathcal{H}$ par son action linéaire. Le groupe Γ_0 est engendré par les rotations $(p_0, \vec{p}) \mapsto (p_0, K\vec{p})$ dépendant de $K \in SO(n)$ et par les transformations

$$(1.1) \qquad (p_0, \vec{p}) \mapsto \left(\frac{p_0 - wp_1}{(1-w^2)^{1/2}}, \frac{p_1 - wp_0}{(1-w^2)^{1/2}}, p_2, \cdots, p_n \right)$$

dépendant de w réel, $|w| < 1$: les transformations conjuguées d'une transformation (1.1) par une rotation s'appellent les “boosts” ou “velocity transformations”. Dans le cas non relativiste, on obtient un groupe Γ_0 tout à fait analogue si l'on remplace (1.1) par

$$(1.2) \qquad (p_0, \vec{p}) \mapsto \left(p_0 - wp_1 + \frac{1}{2}w^2, p_1 - w, p_2, \cdots, p_n \right) \ :$$

bien entendu on ne suppose plus $|w| < 1$.

Si l'on prend sur $\mathcal{H}$ la mesure dm telle que $dm = d\vec{p}$ (resp. $p_0^{-1} d\vec{p}$) dans le cas non relativiste (resp. relativiste), l'action naturelle de Γ_0 sur les fonctions définies sur $\mathcal{H}$ définit des transformations unitaires de l'espace $L^2(\mathcal{H}, dm)$.

Soit $\mathcal{G}^{-1}$ la transformation de $L^2(\mathcal{H}, dm)$ dans les distributions tempérées sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ définie au sens des distributions par

$$(\mathcal{G}^{-1}\varphi)(x) = \int_{\mathcal{H}} \varphi(p) e^{2i\pi\langle x,p\rangle} dm(p) \ . \tag{1.3}$$

Il est alors clair que $T = \mathcal{G}^{-1}\varphi$ vérifie, dans le cas non relativiste, l'équation de Schrödinger

$$i\frac{\partial T}{\partial t} = (4\pi)^{-1}\Delta T \tag{1.4}$$

et dans le cas relativiste l'équation de Klein-Gordon

$$\Box T = -4\pi^2 T \tag{1.5}$$

ou mieux (pour séparer les deux feuillets de l'hyperboloïde)

$$(2i\pi)^{-1}\frac{\partial T}{\partial t} = [1 - (4\pi^2)^{-1}\Delta]^{1/2} T \ . \tag{1.6}$$

De plus, il est classique, et du reste immédiat, que si l'on compose $\mathcal{G}^{-1}$ avec la restriction à $t = 0$ des distributions sur l'espace-temps on établit dans le cas non relativiste une isométrie de $L^2(\mathcal{H}, d\vec{p})$ sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, et dans le cas relativiste une isométrie de $L^2(\mathcal{H}, p_0^{-1} d\vec{p})$ sur l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbf{R}^n)$. Enfin, si l'on fait agir sur T les translations d'espace-temps, on étend la représentation unitaire de Γ_0 précédemment définie en une représentation d'un groupe Γ_1, qui est suivant le cas le groupe de Galilée ou celui de Poincaré: cette représentation n'est qu'une représentation projective (i.e. à un facteur de phase près) pour le groupe de Galilée.

Dans le cas relativiste, considérons le cône de lumière solide C constitué des points $z = (z_0, \vec{z}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $z_0 > |\vec{z}|$, et soit $\sqcap$ le tube complexe $C + i\mathbf{R}^{n+1}$; dans le cas non relativiste, on définit $\sqcap$ par l'inégalité $z_0 > 0$. Dans les deux cas, pour tout $Z \in \sqcap$, définissons la fonction

$$\varphi_Z(p) = e^{-2\pi\langle Z,p\rangle} \tag{1.7}$$

sur la variété $\mathcal{H}$, et la distribution

$$\psi_Z = \mathcal{G}^{-1}\varphi_Z \tag{1.8}$$

sur l'espace-temps. Une distribution T solution de l'équation (1.4) ou (1.6) est caractérisée par les produits scalaires de sa restriction à $t = 0$ avec les fonctions

$\psi_Z\,|_{t=0}$. Limitons-nous aux points Z tels que $Z_0 = 1$, et pour tout point $\vec{x}' + i\xi' \in \mathbf{C}^n$, vérifiant en outre $|\xi'| < 1$ dans le cas relativiste, posons

$$\chi_{\vec{x}'+i\xi'} = \psi_{(1,i\vec{x}'-\xi')}\,|_{t=0} \quad . \tag{1.9}$$

Une fonction $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ (cas non-relativiste) ou $H^{1/2}(\mathbf{R}^n)$ est déjà caractérisée par ses produits scalaires avec les fonctions $\chi_{\vec{x}'+i\xi'}$. Explicitant celles-ci, on trouve

$$\chi_{\vec{x}'+i\xi'}(\vec{x}) = \exp -\pi(\vec{x} - \vec{x}' - i\xi')^2 \tag{1.10}$$

dans le cas non-relativiste, en posant $(X)^2 = \sum X_j^2$ pour tout $X \in \mathbf{C}^n$. On voit que le fait de représenter $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$ via la fonction $\tilde{u}$ définie sur $\mathbf{C}^n$ par

$$\tilde{u}(\vec{x}' + i\xi') = (u, \chi_{\vec{x}'+i\xi'}) \tag{1.11}$$

n'est autre que la représentation de Bargmann-Fock, qui rend les services que l'on sait dans l'analyse pseudodifférentielle.

Dans le cas relativiste, on trouve (avec, rappelons-le, $|\xi'| < 1$):

$$\begin{aligned}\chi_{\vec{x}'+i\xi'}(\vec{x}) = 2[|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + 1 - |\xi'|^2 - 2i\langle \vec{x} - \vec{x}', \xi'\rangle]^{\frac{1-n}{4}} \\ K_{\frac{n-1}{2}}(2\pi[|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + 1 - |\xi'|^2 - 2i\langle \vec{x} - \vec{x}', \xi'\rangle]^{\frac{1}{2}}) \ .\end{aligned} \tag{1.12}$$

Des transformations du genre de celle de Bargmann-Fock ont conduit, on le sait, Bros-Iagolnitzer [2] à une définition du front d'onde analytique d'une distribution, définition dont Bony [1] a montré l'équivalence avec d'autres, introduites par diverses méthodes; Sjöstrand a utilisé dans [5] des généralisations de cette transformation.

Dans le cas relativiste, la transformation (1.11) est particulièrement bien adaptée à la description du front d'onde C^∞: on commence par remarquer que pour toute distribution tempérée u, la fonction qui à ξ' appartenant à la boule ouverte B_n associe la fonction (de classe C^∞) $\vec{x}' \mapsto \tilde{u}(\vec{x}' + i\xi')$ s'étend en une application continue de $\overline{B}_n$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$: se restreignant à $|\xi'| = 1$, on peut enfin considérer $\tilde{u}$ comme une distribution sur $\mathbf{R}^n + iS^{n-1}$. Utilisant (1.12) ainsi que

$$\hat{\chi}_{\vec{x}'+i\xi'}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2} \exp -2\pi[(1 + |\xi|^2)^{1/2} - \langle \xi', \xi\rangle + i\langle x', \xi\rangle] \ , \tag{1.13}$$

on obtient sans difficulté la

Proposition 1.— *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ et soit $\tilde{u}$ la distribution sur $\mathbf{R}^n + iS^{n-1}$ qui lui correspond. Le support singulier de $\tilde{u}$ coïncide avec le front d'onde C^∞ de u.*

Pour élémentaire qu'elle soit, cette proposition montre l'intérêt qu'il y aurait, pour les opérateurs sur $\mathbf{R}^n$, à disposer d'un calcul symbolique pour lequel les fonctions définies en (1.12) joueraient le rôle qui est celui des gaussiennes dans la quantification de Weyl. C'est l'objet de la section qui suit.

2. LE CALCUL DE WEYL ET LE CALCUL DE KLEIN-GORDON.

Considérons le domaine Ω constitué des points $\omega = (t, \vec{x}; v)$, où $v \in \mathbf{R}^n$ doit être regardée comme une vitesse et satisfaire $|v| < 1$ dans le cas relativiste. On peut interpréter chaque point ω comme un ***observateur*** au sens de la physique. Si l'on considère l'espace-temps $\mathbf{R}^{n+1}$ comme un espace vectoriel, à chaque observateur ω (en fait, à chaque v) est associée une décomposition

$$\mathbf{R}^{n+1} = T_\omega \oplus S_\omega \tag{2.1}$$

de l'espace-temps: T_ω est l'espace de dimension 1 engendré par le vecteur $\varepsilon_\omega = (1, v_1, \cdots, v_n)$; quant à S_ω, c'est dans le cas non relativiste l'espace (fixe) des points $(o, \vec{x})$, et dans le cas relativiste l'espace des $(t, \vec{x})$ tels que $t - \langle \vec{x}, v \rangle = 0$, autrement dit l'orthogonal de T_ω relativement au ds^2 de Minkowski. A tout observateur $\omega = (t, \vec{x}; v)$ on associe la symétrie P_ω, transformation affine de l'espace-temps qui conserve le point $(t, \vec{x})$ et dont la partie linéaire conserve les vecteurs de T_ω et change ceux de S_ω en leurs oppposés: P_ω ne dépend que du couple $(\vec{x} - tv; v)$, et l'on appellera fonction ***admissible*** sur Ω toute fonction f ne dépendant que de ce couple, autrement dit satisfaisant l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \ . \tag{2.2}$$

On étend sans difficulté la représentation du groupe de Poincaré restreint précédemment définie en une représentation du groupe de Poincaré "orthochrone" comprenant en outre les symétries P_ω: on associe simplement à P_ω l'***opérateur de parité*** σ_ω tel que $\sigma_\omega(T) = T \circ P_\omega$ pour toute distribution T sur l'espace-temps (solution de (1.6)). C'est un peu plus compliqué pour le cas non relativiste: si $\omega = (t^0, \vec{x}^0; v)$, on trouve

$$\begin{aligned} (\sigma_\omega T)(t, \vec{x}) &= T(t, 2(\vec{x}^0 - t^0 v) - \vec{x} - 2tv) \\ &\quad \exp -4i\pi \langle v, \vec{x} - tv - \vec{x}^0 + t^0 v \rangle \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Soit H l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$ ou $H^{1/2}(\mathbf{R}^n)$, suivant le cas. Si A est un opérateur à trace sur H, il est clair que la fonction $g : \omega \mapsto 2^n \mathrm{Tr}(A\sigma_\omega)$ est une fonction continue admissible: appelons-la le ***symbole*** de A. La règle de correspondance $A \mapsto g$ est covariante: cela signifie que si $\gamma \in \Gamma_1$ (le groupe de Galilée ou de Poincaré) et si U est la représentation unitaire de Γ_1 que nous connaissons, alors le symbole de $U(\gamma)AU(\gamma^{-1})$ est $g \circ \gamma^{-1}$ pour tout opérateur à trace A de symbole g; au second membre intervient l'action géométrique naturelle de Γ_1 sur l'espace des observateurs.

Définition 1.— *Le calcul de Weyl est la règle de correspondance $A \mapsto g$ que l'on vient de définir pour la représentation du groupe de Galilée dans les solutions de l'équation de Schrödinger (1.4); le calcul de Klein-Gordon est la règle $A \mapsto g$ pour la représentation du groupe de Poincaré dans les solutions de (1.6).*

Remarques :

1) évidemment, la représentation U permute entre elles (à une phase près, pour Galilée) les distributions ψ_Z;

2) compte-tenu de la condition (2.2), les fonctions admissibles (en particulier les symboles) s'identifient à des fonctions de $(\vec{x}; v)$; si l'on confond en outre une distribution sur l'espace-temps solution de l'équation de Schrödinger et sa trace pour $t = 0$, on verra aisément en quoi la définition 1 ne diffère pas de la définition usuelle du calcul de Weyl, dont nous ne occuperons plus désormais.

Il importe maintenant de développer l'analyse pseudo-différentielle sur $\mathbf{R}^n$ basée sur le calcul de Klein-Gordon au même titre que l'est celle basée sur le calcul de Weyl. C'est l'objet d'une activité vigoureuse, en cours. Voici par exemple la formule de composition des symboles. Pour simplifier, nous supposerons que les opérateurs A_1 et A_2 sont dans l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les opérateurs de rang un du type $u \mapsto (u, \psi_{Z'})\psi_Z$ (Z et $Z' \in \sqcap$): ce n'est guère une restriction, car $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre dense de celle des opérateurs à trace.

On introduit le difféomorphisme suivant Φ de $(\mathbf{R}^n)^4$ sur l'ouvert de $(\mathbf{R}^n)^4$ constitué des points $(\vec{y}', v', \vec{y}'', v'')$ vérifiant $|v'| < 1$, $|v''| < 1$ et $1 - |v'|^2 - |v''|^2 + \langle v', v''\rangle^2 > 0$: en posant, pour $(\beta', \beta'') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$,

$$k = k(\beta', \beta'') = 1 + |\beta' \wedge \beta''|^2 = 1 + |\beta'|^2\, |\beta''|^2 - \langle \beta', \beta''\rangle^2 \ ,$$

la relation $(\vec{y}', v', \vec{y}'', v'') = \Phi(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'')$ est caractérisée par les relations vectorielles

$$(1 - |v'|^2)^{1/2}(\vec{y}', -mv') = k^{-1/4}(\alpha', \beta')$$

et

$$(1 - |v''|^2)^{1/2}(\vec{y}'', -mv'') = k^{-1/4}(\alpha'', \beta'') \ .$$

On pose aussi $\Psi(\alpha', \beta', \alpha'', \beta'') = (o, \vec{y}', v'; o, \vec{y}'', v'')$ dans les mêmes conditions.

Proposition 2.— *Soient g_1 et g_2 les symboles de A_1 et $A_2 \in \mathcal{A}$. La valeur au point $\omega_0 = (o, \vec{o}; o)$ du symbole $g_1 \# g_2$ de $A_1 A_2$ est donnée par la formule*

$$(g_1 \# g_2)(\omega_0) = 2^{2n} \int_{(\mathbf{R}^n)^4} (\Psi(\alpha', \beta', \alpha'', \beta''))$$
$$\exp 4i\pi(\langle \alpha', \beta''\rangle - \langle \alpha'', \beta'\rangle)\, d\alpha' d\beta' d\alpha'' d\beta'' \ .$$

Remarques :

1) la covariance fournit la formule pour calculer $(g_1 \# g_2)(\omega)$ pour tout ω;

2) la formule, ainsi présentée, a une grande analogie avec la formule correspondante du calcul de Weyl, mais on observera cependant que $(g_1 \# g_2)(\omega)$ ne dépend que de la restriction de $g_1 \otimes g_2$ à une partie de $\Omega \times \Omega$ de complémentaire non négligeable.

Le symbole $g_1 \# g_2$ admet un développement asymptotique comparable (quoique plus compliqué) à celui qui lui correspond dans le calcul de Weyl. Formellement, c'est un développement suivant les puissances de $\frac{h}{m}$ si, contrairement à ce que nous avons fait pour simplifier, on choisit des unités indépendantes de la constante de Planck et de la masse de la particule observée. Dans le même ordre d'idées (ne fixant plus $c = 1$), on peut se demander ce que devient le calcul de Klein-Gordon lorsque $c \to \infty$. L'application

$$v \mapsto (1 - c^{-2} |v|^2)^{-1/2}(mc^2, -mv)$$

qui, comme on sait, identifie une vitesse v ($|v| < c$) au covecteur d'énergie-impulsion correspondant, permet de regarder l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{H}, p_0^{-1} d\vec{p})$ comme un espace de fonctions sur $\mathbf{R}^n$, à support dans la boule $|v| \leq c$, de carré sommable relativement à la mesure $(1 - c^{-2} |v|^2)^{-\frac{1}{2}(n+1)} dv$. Lorsque $c \to \infty$, cet espace "tend" vers l'espace $L^2(\mathbf{R}^n)$, et l'on peut voir que le calcul de Klein-Gordon dégénère vers le calcul de Weyl: c'est satisfaisant pour l'esprit puisque la mécanique quantique non relativiste apparaît bien sous cet angle comme une contraction de la mécanique quantique relativiste.

3. LE CALCUL DE FUCHS DU CÔNE DE LUMIÈRE.

Le cône de lumière solide C défini plus haut est un espace riemannien symétrique, produit de la demi-droite $\mathbf{R}_\star^+$ par l'espace $\mathcal{H} = SO_0(1,n)/SO(n)$. Avec $r(t) = t_o^2 - t_1^2 - \cdots - t_n^2$, la mesure invariante sur C est $d\mu(t) = r(t)^{\frac{-1}{2}(n+1)} dt$, et l'on se propose de décrire les opérateurs sur l'espace de Hilbert $H = L^2(C, d\mu(t))$. Pour tout $y \in C$, soit $S_y : C \to C$ la symétrie géodésique autour de y; si de plus $\eta \in \mathbf{R}^{n+1}$ et si $Y = (y, \eta)$, on définit l'opérateur de symétrie σ_Y sur H par la formule

$$(3.1) \qquad (\sigma_Y u)(t) = u(S_y t) e^{2i\pi \langle \eta, t - S_y t \rangle} .$$

A tout opérateur à trace A sur H, on associe la fonction g sur $C \times \mathbf{R}^{n+1}$ définie par

$$(3.2) \qquad g(Y) = 2^{n+1} \mathrm{Tr}(A \sigma_Y) .$$

La règle de calcul symbolique $A \mapsto g$ s'appelle le calcul de Fuchs du cône C. Bien entendu, le lecteur n'aura pu manquer de remarquer que cette définition a un sens si l'on y remplace le cône C par n'importe quel ouvert de $\mathbf{R}^p$ muni d'une structure interne d'espace riemannien symétrique.

Le calcul de Fuchs du cône C a été complètement développé dans [7]; auparavant, le cas particulier de la demi-droite avait été traité dans [6]. Les difficultés sont considérables ([7] a près de deux cents pages), mais on parvient à établir les principales propriétés du calcul de Fuchs: continuité des opérateurs dont les symboles sont dans des classes appropriées, calcul symbolique ... Il a été nécessaire de renouveler profondément les méthodes de l'analyse pseudo-différentielle: dans le cas particulier qui nous occupe, on fait le plus large appel à l'analyse harmonique du domaine hermitien symétrique

$$\sqcap = C + i\mathbf{R}^{n+1} = SO_0(2, n+1)/SO(2) \times SO(n+1)$$

et à la théorie des représentations du groupe *conforme* $SO_0(2, n+1)$. Signalons au lecteur intéressé par la physique que, pour $n = 3$, ce groupe est le groupe d'invariance des équations de Maxwell, qui occupe la place prépondérante dans la cosmologie d'I. Segal [4]. Revenons à l'analyse et au demi-espace $\mathbf{R}^{n+1}_{+}$, que l'on peut quantifier au moyen d'un produit direct du calcul de Fuchs en la première variable par le calcul de Weyl en les variables tangentielles. Le calcul obtenu étend et précise le calcul totalement caractéristique de Melrose [3]; la condition de lacunarité des symboles devient inutile, eu égard aux formules adoptées. Faisant éclater le cône C via un difféomorphisme qui diagonalise le ds^2, on obtient, comme sous-produit, un calcul symbolique pour le domaine mixte $\mathbf{R}^{+}_{\star} \times B_n$: bornons-nous pour tout cela à renvoyer à [7].

Pour terminer, signalons que c'est également à partir du calcul de Fuchs du cône C que nous avons obtenu [8] le calcul de Klein-Gordon. En effet, le feuilletage de C par les hyperboloïdes de masse décompose $L^2(C, d\mu(t))$ comme une somme continue d'espaces de fonctions portées par les divers hyperboloïdes. On peut alors "restreindre" le calcul de Fuchs à un seul de ces hyperboloïdes, à condition de se limiter aux opérateurs qui commutent avec l'opérateur de multiplication par la fonction $r(t)$. Sous la conjugaison par la transformation $\mathcal{G}$ (cf. (1.3)), on obtient facilement finalement le calcul de Klein-Gordon, la règle de commutation apparaissant sous la forme de la condition d'admissibilité (2.2).

Nous pensons que l'analyse pseudo-différentielle et les équations aux dérivées partielles ont tout à gagner à une utilisation plus consciente des méthodes issues de l'analyse harmonique et des concepts qui viennent de la physique. La géométrie des domaines classiques, en particulier, devrait permettre la création d'analyses pseudo-différentielles sur les modèles locaux de variétés rencontrées dans les équations aux dérivées partielles.

RÉFÉRENCES

[1] J.M. BONY, Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-1977, n° 3, Ecole Polytechnique.

[2] J. BROS, D. IAGOLNITZER, Support essentiel et structure analytique des distributions, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975-76, n° 18, Ecole Polytechnique.

[3] R.B. MELROSE, Transformation of boundary problems, Acta Math. 147 (1981), 149-236.

[4] I.E. SEGAL, Mathematical cosmology and extragalactic astronomy, Acad. Press, New York (1976).

[5] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982), Société Mathématique de France.

[6] A. UNTERBERGER, The calculus of pseudodifferential operators of Fuchs type, Comm. in Part. Diff. Eq. **9**, 12 (1984), 1179-1236.

[7] A. UNTERBERGER, L'analyse harmonique et l'analyse pseudo-différentielle du cône ou d'un domaine mixte,à paraître.

[8] A. UNTERBERGER, Pseudodifferential Analysis, Quantum Mechanics and Relativity, à paraître.

[9] A. UNTERBERGER, Quantization and Relativity, à paraître.

[10] A. UNTERBERGER, Analyse relativiste, C. R. Acad. Sc. Paris 305 (1987), 415-418.

Département de Mathématiques
U.E.R. de Sciences Exactes
et Naturelles

Moulin de la Housse
B.P. 347
51062 REIMS Cedex