SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. LEBEAU

Front d'onde des fonctions non linéaires et polynômes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. n° 10, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A10_0>

CENTRE DE MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRONT D'ONDE DES FONCTIONS NON LINEAIRES ET POLYNÔMES

G. LEBEAU

Exposé n°X

17 Janvier 1989

I Introduction

Soit (t,x) le point courant de l'espace temps, $t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^d, \Box = \partial_t^2 - \Delta$ l'opérateur des ondes et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^{1+d}$ qui est un domaine d'influence pour $\omega = \Omega \cap \{t=0\}$

Soit $u(t,x)$ une fonction réelle continue sur Ω appartenant localement à l'espace

$$C^0(\mathbf{R}_t, H^{s+1}(\mathbf{R}^d)) \cap C^1(\mathbf{R}_t, H^s(\mathbf{R}^d))$$

où H^s est l'espace de Sobolev usuel et vérifiant dans Ω l'équation des ondes semi-linéaires

$$(1) \qquad \begin{cases} \Box u = F(t,x,u,\nabla u) & \nabla u = (\partial_t u, \nabla_x u) \\ u_{|t=0} = u_0 \in H^{s+1}_{\mathrm{loc}}(\omega) & \dfrac{\partial u}{\partial t}_{|t=0} = u_1 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\omega) \end{cases}$$

où F est une fonction C^∞ de ses arguments et où $s > \frac{d}{2}$ (ou $s > \frac{d}{2} - 1$ si F ne dépend pas de ∇u).

Rappelons que dans [9], on a prouvé le résultant suivant :

Théorème 1.— *Si F est un polynôme de u, et si les données de Cauchy u_0, u_1 sont conormales C^∞ classiques sur une hypersurface lisse analytique réelle V de ω, on a*

$$(2) \qquad WF(u) \subset Z(\mathcal{E}) \cap T^*\Omega$$

si $\mathcal{E}$ est un ensemble de suites dans $T^*(\mathbf{C}^{n+1})$ contenant $\mathcal{A}_v$ [voir [9] th.1, pour les définitions et résultats précis].

On se propose ici d'exposer une technique de décomposition spectrale de la solution $u(t,x)$ de (1) qui permet de prouver (2) pour les solutions de (1), avec F quelconque, en se ramenant comme dans la preuve de [9], à l'étude de distributions explicites du type valeur au bord de fonctions holomorphes et bornées pour lesquelles on utilise des techniques d'analyse microlocale analytique.

Pour étendre le th.1 au cas général il y a deux difficultés :

a) Pouvoir traiter une fonction C^∞ comme un polynôme

b) Tenir compte des termes en ∇u dans la partie non-linéaire.

On verra que la résolution de a) conduit naturellement à celle de b).

L'idée directrice ici est d'utiliser des décompositions d'une fonction $f(y), y \in \mathbf{R}^n$ de la forme

$$(3) \qquad f = f_{1,\lambda} + f_{2,\lambda} \quad f_{1,\lambda} = (2\pi)^{-n} \int_{|\eta| \le c_0 \lambda^\delta} e^{iy\cdot\eta} \hat{f}(\eta) d\eta$$

où le grand paramètre λ est essentiellement la fréquence du phénomène qu'on observe et où $\delta \in]0,1[$ est un paramètre convenablement choisi.

On remarquera que f_1 est la partie "régulière" et f_2 la partie "singulière" de la décomposition. Bien sur, ce qui suit est à relier au paraproduit de J.M. Bony [4].

Pour les résultats connus sur l'interaction des singularités pour les équations de type (1) on pourra consulter [2], [3], [5], [6], [10] et pour le cas totalement non linéaire [1], [7].

II Calcul quasi-homogène multilinéaire

On se propose dans cette partie de montrer comment la décomposition (3) permet de prouver le résultat suivant :

Théorème 2.— *Soit $u \in H^s(\mathbf{R}^d)(s = \frac{d}{2} + \rho\ ,\ \rho > 0)$ à valeurs réelles et $F \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Alors $\forall N \geq 1$, $\forall \mu \in [d/2 + N\rho, \frac{d}{2} + (N+1)\rho[$ on a*

$$WF^\mu(F(u)) \subset \bigcup_{j=1}^{N} WF^\mu(u^j) \tag{4}$$

où WF^μ est le front d'onde Sobolev usuel d'indice μ.

En d'autres termes, le front d'onde de $F(u)$ est controlé par les polynômes de u.

Pour prouver ce résultat, on choisit un réel $\sigma = d/2 + \gamma$, $0 < \gamma < \rho$, un $\delta \in]0, 1[$ et on pose $\nu = s - \sigma = \rho - \gamma$. Pour tout $t > d/2$, on munit l'espace de Sobolev $H^t(\mathbf{R}^d)$ d'une norme multiplicative $\|\ \|_t$, et pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, on décompose u sous la forme

$$u = u_1 + u_2 \quad ;\ u_1 = (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq \lambda^\delta} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \tag{5}$$

On a alors pour tout α

$$\|\lambda^{-|\alpha|\delta} \partial_x^\alpha u_1\|_s \leq C_\alpha \tag{6}$$

et si G est une fonction C^∞, $G(u_1)$ vérifie des estimations analogues.

De plus, on a

$$\|u_2\|_\sigma \leq C^k \lambda^{-\nu\delta} \tag{7}$$

En écrivant la formule de taylor pour F, on obtient

$$\begin{cases} F(u) = f_1(x, \lambda) + f_2(x, \lambda) \\ f_1(x, \lambda) = \sum\limits_{j \leq N} \dfrac{F^{(j)}(u_1)}{j!} u_2^j = \sum\limits_{j \leq N} G_j(u_1) u^j \\ f_2(x, \lambda) = \dfrac{u_2^{N+1}}{N!} \displaystyle\int_0^1 F^{(N+1)}(u_1 + tu_2)(1-t)^N dt \end{cases}$$

où les G_j sont des fonctions C^∞.

On a

$$\|f_2\|_\sigma \leq C_N^k \lambda^{-\nu\delta(N+1)} \tag{8}$$

Soit à présent $\lambda.\mathcal{D}'$ l'espace des distributions $f(x,\lambda)$, dépendant d'un paramètre $\lambda \in [1,\infty[$ telles que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ on ait

$$|\widehat{\varphi f}(\xi,\lambda)| \leq \quad \text{Polynôme} \quad (\lambda,\xi)$$

Pour $(x_0,\xi_0) \in \overset{\circ}{T}{}^*\mathbf{R}^d$, on dira que $(x_0,\xi_0) \notin \lambda.WF(f)$ ssi il existe $\varphi \in C_0^\infty$ égal à 1 près de x_0 et V_0 voisinage de ξ_0 tels que

$$\int_{\xi\in\lambda V_0} |\widehat{\varphi f}(\xi,\lambda)|^2 d\xi \in \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$$

où $\lambda V_0 = \{\xi = \lambda\eta \ ; \ \eta \in V_0\}$. On a $\lambda WF(f) = WF(f)$ si f est indépendant de λ.

Pour $p \in \mathbf{N}$, soit C_p la couronne

$$2^p \leq |\xi| < 2^{p+1}$$

et pour $f(x,\lambda)$ à support compact

$$a_p^2(f) = \int_{C_p} |\hat{f}(\xi,2^p)|^2 d\xi$$

Pour $\mu \in \mathbf{R}$, on pose

$$|f|_\mu^2 = \sum_p 2^{2p\mu} a_p^2(f)$$

On a alors :

Lemme 1.— *Soit $t > d/2$ et $a(x,\lambda)$ vérifiant, pour un $\delta \varepsilon]0,1[\| \lambda^{-|\alpha|\delta}\partial_x^\alpha a \quad \|_t \leq C_\alpha$*

i) Pour $f \in \lambda\mathcal{D}' \quad \lambda.WF(af) \subset \lambda WF(f)$

ii) Si $v(x) \in H^\mu_{\text{comp}} \quad |av|_\mu \leq C^k\|v\|_\mu$

Comme on peut supposer $a(x,\lambda)$ à support compact en x, ce lemme est conséquence des deux estimations :

$$\int |\hat{a}(\xi,\lambda)| d\xi \leq C^{te}$$

$$|\hat{a}(\xi,\lambda) \leq C_N(\frac{\lambda^\delta}{|\xi|})^N$$

Lemme 2.— *Soit $g(x) \in \mathcal{D}'$ et supposons donné pour tout λ une décomposition $g(x) = g_1(x,\lambda) + g_2(x,\lambda)$ avec $(x_0,t\xi_0) \notin \lambda WF(g_1) \forall t > 0$ et $|g_2|_\mu < +\infty$.*

Alors $g \in H^\mu_{(x_0,\xi_0)}$ (espace de Sobolev microlocal).

Le théorème 2 est alors conséquence des lemmes 1 et 2. En effet, on a

$$a_p(f_2) \leq 2^{-p[\sigma+\nu\delta(N+1)]}$$

d'où $|f_2|_\mu < \infty$ pour $\mu < \sigma + \nu\delta(N+1)$ et si $u^j \in H^\mu_{(x_0,\xi_0)}$ pour $j = 1,\ldots,N$, on aura $f_1 = f_1' + f_1''$ avec $(x_0,t\xi_0) \notin \lambda WF(f_1'), |f_1''|_\mu < \infty$. On obtient alors $F(u) \in H^\mu_{(x_0,\xi_0)}$ pour $\mu < \sigma + \nu\delta(N+1)$, donc en faisant tendre σ vers $d/2$ et δ vers 1, pour $\mu < d/2 + (N+1)\rho\sharp$.

En remplaçant u par un vecteur $(u_1,\ldots,u_p)$ et en utilisant le résultat de J.-M. Delort sur la deuxième microlocalisation simultanée [8], on obtient le résultat annoncé dans [8] :

Théorème 3 [Delort].— *Pour $i = 1, \dots, p$ soient $u_i \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d) s > d/2$ des distributions conormales C^∞ sur des sous-variétés analytiques $\S_j$ et $F(u_1, \dots, u_p)$ une fonction C^∞ de ses arguments. On a*

$$WF(F(u_1, \dots, u_p)) \subset [\hat{\underset{i=1}{\overset{p}{+}}} \{T^*_{\S_j^{\mathbf{C}}} \mathbf{C}^d \cup \mathbf{C}^d\}] \cap T^*\mathbf{R}^d$$

où

$$\hat{\underset{i=1}{\overset{p}{+}}} A_j = \{(x,\xi); \exists (x^n_j, \xi^n_j) \in A_j, \exists x^n_0 \quad t.q. \quad |x^n_j - x^n_0||\xi^n_j| \to 0 \,; x^n_\ell \to x \,; \sum_j \xi^n_j \to \xi\}$$

III L'équation d'onde semi-linéaire

On se propose dans ce paragraphe de donner une idée de la preuve du théorème 1 pour les solutions de (1).

On utilisera ici des algèbres $A^{\sigma,\alpha}$ définies par : $u(t,x) \in A^{\sigma,\alpha} \iff (1+|\xi|)^\sigma \int (1+|\tau|+|\xi|)^\alpha |\hat{u}(\tau,\xi)| d\tau \in L^2_\xi$ où $\sigma > d/2$ et $\alpha > 0$;

Comme dans le paragraphe II, on écrit $u = u_1 + u_2$ avec $\|\lambda^{-\delta|\alpha|} \partial^\alpha_x u_1\|_A \leq C_\alpha$ et $\|u_2\|_A \leq C\lambda^{-\nu\delta}$ et on choisit $\delta \in]0, 1/2[$.

On obtient alors l'équation vérifiée par u_2.

$$\square_{\mathcal{L}}(u_2) = \mathcal{N}(u_2) + a + r \tag{9}$$

avec

$$\square_{\mathcal{L}}(f) = \square f - \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha F(t,x,u_1,\nabla u_1)(f, \nabla f)^\alpha \tag{10}$$

$$a(t,x,\lambda) = F(t,x,u_1,\nabla u_1) - \square u_1 \tag{11}$$

$$\mathcal{N}(f) = \sum_{2 \leq |\alpha| \leq N} \partial^\alpha F(t,x,u_1,\nabla u_1)(f, \nabla f)^\alpha \tag{12}$$

et où le reste r du développement taylorien vérifie $r \in \mathcal{O}((u_2, \nabla u_2)^{N+1})$.

On écrit alors $u_2 = u_0 + f$ avec $\square_{\mathcal{L}} u_0 = 0$ et u_0 ayant même données de Cauchy que u_2 sur $t = 0$, d'où dans $t \geq 0$ si $\square_{\mathcal{L}}^{-1}$ désigne la solution élémentaire de l'opérateur strictement hyperbolique $\square_{\mathcal{L}}$ à support dans l'avenir

$$f_+ = \square_{\mathcal{L}}^{-1}(a 1_{t\geq 0}) + \square_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \mathcal{N}[u_0 1_{t\geq 0} + f_+] + \square_{\mathcal{L}}^{-1}(r 1_{t \geq 0}) \tag{13}$$

où $f_+ = f 1_{t\geq 0}$.

On itère alors l'identitée (13) en remarquant que l'opérateur $\square_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \mathcal{N}$ est borné dans la chaîne d'algèbres $A^{\sigma,\alpha}, (\alpha \simeq 1+0 \,; \sigma \simeq d/2+0)$ et en utilisant le caractère quadratique de $\mathcal{N}$.

Si M est un entier fixé à l'avance, on obtient alors, modulo $\theta(\lambda^{-M})$ dans $A^{\sigma,\alpha}, f_+$ comme combinaison linéaire finie de distributions construites à partir de a, u_0, et des opérations $\square_{\mathcal{L}}^{-1}$ et $\square_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \mathcal{N}$.

On introduit encore v_0 solution de

$$\square_{\mathcal{L}} v_0 = 0 \quad v_0|_{t=0} = u|_{t=0} \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$$

et on remarque que $b = u_0 - v_0$ vérifie des estimations

(14) $$\lambda^{|\beta|\delta} \partial^\beta b \quad \text{borné dans} \quad A^{\sigma,\alpha}$$

Pour utiliser la technique des diagrammes de [9], il reste à constater que l'optique géométrique fournit des développements asymptotiques du noyau de $\square_{\mathcal{L}}^{-1}$. (C'est dans cette dernière étape qu'on utilise l'hypothèse $\delta < 1/2$), et que les multiplicateurs vérifiant des hypothèses de type (14) sont λ-microlocaux.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, "Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires", Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 21 (1988) 91-132.

[2] A.Sa. Baretto, "Interactions of conormal waves for fully semi linear wave equations", Am. Jour. of Math. to appear.

[3] M. Beals, "Singularities in solutions to non linear hyperbolic problems" preprint.

[4] J.M. Bony, "Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires". Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 14 (1981) 209-246.

[5] J.M. Bony, "Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires" Advances in microlocal analysis. Nato ASI Series. D. Reidel Pub. Company (1986) Ed. Garnir

[6] J.Y. Chemin, "Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux dérivées partielles non linéaires" Duke Math Journal Vol.56 n°3 1988.

[7] J.Y. Chemin, "Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires" Prepublication. Ecole Polytechnique 1988.

[8] J.M. Delort, "Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits" Preprint Université de Rennes.

[9] G. Lebeau, "Equations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires". A paraître à Inventiones.

[10] R. Melrose et N. Ritter, "Interaction of progressing waves for semi linear wave equations II" Ankiv for Math 25 (1987) (91-114).