Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Y. CHEMIN

Persistance des structures géométriques liées aux poches de tourbillon

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 13, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A13_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PERSISTANCE DES STRUCTURES GEOMETRIQUES LIEES AUX POCHES DE TOURBILLON.

J.Y. CHEMIN

Exposé n° XIII

19 Mars 1991

Introduction

Les résultats principaux exposés ici ont pour motivation première un problème classique de la mécanique d'un fluide parfait bidimensionnel : le problème des poches de tourbillon. Rappelons le cadre dans lequel nous allons travailler. Le mouvement d'un tel fluide est décrit par un champ de vecteurs sur le plan, dépendant du temps, noté v(t,x), qui représente la vitesse d'une particule située au point x à l'instant t et qui vérifie:

$$(E)\quad \begin{cases} \partial_t v + v.\nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=0} = v_0 \end{cases}$$

où p(t,x) désigne la pression du fluide au point x à l'instant t et où $v.\nabla v = \sum_i v^i \partial_i$. On notera ψ le flot du champ de vecteurs v, c'est à dire l'application vérifiant $\partial_t \psi = v(t,\psi(t,x))$ et $\psi(0,x) = x$.

La quantité fondamentale dans l'étude de cette équation est le rotationnel du champ des vitesses, appelé encore tourbillon. Comme nous sommes en dimension deux, cette matrice antisymétrique est identifiée à un réel noté $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Le caractère spécifique de la dimension deux est que le tourbillon est conservé le long des trajectoires du champ de vecteurs v:

$$(0.1)\quad \partial_t \omega + v.\nabla\omega = 0.$$

Vue la nullité de la divergence de v, toutes les normes L^p de ω sont conservées au cours du temps. Le problème des poches de tourbillon est le suivant: supposons que le tourbillon à l'instant initial soit la fonction caractéristique d'un domaine borné dont le bord est de classe $C^{k+\varepsilon}$, où k est un entier strictement positif et ε un réel de l'intervalle $]0,1[$; il est bien connu dans ce cas qu'il existe un unique champ de vecteurs solution du système (E) sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$, dont le tourbillon appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Cette solution est alors quasi-lipschitzienne, c'est-à-dire que son module de continuité est $|x-y|.|\mathrm{Log}|x-y||$. Dans ce cas, il existe un flot ψ à régularité exponentiellement décroissante en fonction du temps. D'après la relation (0.1), le tourbillon à l'instant t est la fonction caractéristique d'un domaine borné dont le bord n'est plus a priori que de classe $C^{\exp -\alpha t}$. Ces résultats et cette problématique sont exposés dans [6] par Yudovitch lorsque l'on remplace $\mathbf{R}^2$ par un domaine borné du plan.

Deux questions très naturelles se posent alors:

- le bord du domaine reste-t-il régulier à temps petit?
- si oui, que se passe-t-il pour les temps grands?

Dans le cadre où nous nous sommes placés, il est très facile de vérifier, grâce à la formule de

Green, que, si le bord reste de classe $C^{1+\varepsilon}$, il existe alors un paramétrage propre x(t,.) du bord vérifiant l'équation

$$(B) \quad \partial_t x(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}|x(t,s) - x(t,\sigma)|\partial_\sigma x(t,\sigma)\, d\sigma.$$

Dans [5], A. Majda annonce une démonstration de l'existence locale en temps d'une solution de l'équation (B) et, en se fondant sur des expériences numériques, conjecture que le temps d'existence est en général fini et que, dans ce cas, le bord du domaine cesse d'être rectifiable. De plus, pour une approximation quadratique de l'équation (B), S. Alinhac a démontré dans [1] un résultat d'instabilité qui inclinait à penser qu'il pouvait ne pas y avoir d'existence globale pour l'équation (B) elle même. En ce qui concerne l'existence locale en temps, nous l'avons démontrée dans [3] en oubliant l'équation (B) et en démontrant un contrôle local de la norme lipschitz de la solution de (E) grâce à la régularité tangentielle du tourbillon par rapport à un champ de vecteurs ne s'annulant pas sur le support singulier C^ε du tourbillon.

L'essentiel de cet exposé sera dévolu à la démonstration du théorème suivant :

Théorème A

Soit ε appartenant à l'intervalle]0,1[, on considère une fonction x_0 de l'espace $C^{1+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)$ paramétrant proprement une courbe de Jordan; il existe alors une unique solution x(t,s) de l'équation (B) appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{1+\varepsilon}(S^1;\mathbf{R}^2))$.

Dans [3], nous avions développé l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers qui permettait de déduire du théorème ci-dessus le corrolaire suivant :

Corrolaire B

Soit ε appartenant à l'intervalle]0,1[et k un entier positif non nul, on considère une fonction x_0 de l'espace $C^{k+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)$ paramétrant proprement une courbe de Jordan; il existe alors une unique solution x(t,s) de l'équation (B) appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^{k+\varepsilon}(S^1;\mathbf{R}^2))\cap C^\infty(\mathbf{R};C^{k+\varepsilon-0}(S^1;\mathbf{R}^2))$.

Notre démarche sera la suivante :

- dans le premier paragraphe, nous expliquerons quel concept de régularité permet de voir le théorème précédent comme corrolaire immédiat d'un théorème beaucoup plus général;
- dans le deuxième paragraphe, nous réduirons, à l'aide du calcul paradifférentiel, la

démonstration de ce théorème général à celle d'une estimation a priori sur la norme Lipschitz d'un champ de vecteurs;

- dans le troisième et dernier, nous démontrerons cette estimation.

Nous n'exposerons pas ici complètement toutes les démonstrations; nous renvoyons le lecteur intéressé à [4] pour les détails omis.

Dans toute la suite de cet article, nous prendrons les notations et conventions suivantes :

- ε désignera un réel strictement compris entre 0 et 1;
- si A est un fermé du plan, α un réel strictement positif, $A_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^2 / d(x, A) \leq \alpha\}$;
- si X est un champ de vecteurs du plan, on note $I(A,X)$ l'infimum de $|X(x)|$ pour x parcourant A;
- si f est une distribution sur le plan, on note $\nabla^\perp f$ le champ de vecteurs $(\partial_2 f, -\partial_1 f)$ qui est bien sûr de divergence nulle;
- si Ω est un ouvert du plan et $\varepsilon \in]0,1[$, $C^\varepsilon(\Omega)$ (resp. $\mathrm{Lip}(\Omega)$) désigne l'ensemble des fonctions u bornées sur Ω telles que l'on ait, pour tout x et y dans Ω, $|u(x)-u(y)| \leq C\, |x-y|^\varepsilon$ (resp. $|x-y|$) et on notera par $\|.\|_{\varepsilon,\Omega}$ (resp. $\|.\|_{\mathrm{Lip}(\Omega)}$) la norme naturelle sur $C^\varepsilon(\Omega)$ (resp. $\mathrm{Lip}(\Omega)$),
- si $\Omega = \mathbf{R}^2$, on peut caractériser l'espace $C^\varepsilon(\Omega)$ noté alors simplement C^ε à l'aide d'un découpage dyadique de l'espace des fréquences. Plus précisément, soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2\backslash\{0\})$ telle que $\chi(\xi) = 1 - \Sigma_{q\geq 0}\phi(2^{-q}\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, on a :

  $u \in C^\varepsilon \Leftrightarrow \chi(D)u \in L^\infty$ et $\|\phi(2^{-q}D)\|_{L^\infty} \leq C\, 2^{-q\varepsilon}$, la norme $\|\chi(D)u\|_{L^\infty} + \mathrm{Sup}_{q\geq 0}\, 2^{q\varepsilon}\, \|\phi(2^{-q}D)\|_{L^\infty}$ étant une norme équivalente à la norme usuelle, la propriété caractéristique servant de définition à l'espace C^r dans le cas des indices négatifs; enfin lorque r=1, on ne trouve pas l'ensemble des fonctions lipschitziennes, mais l'ensemble noté C^1_* des fonctions bornées telles que $|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C\,|y|$;
- on notera pour $q\geq 0$, Δ_q l'opérateur $\phi(2^{-q}D)$, Δ_{-1} l'opérateur $\chi(D)$ et enfin par S_q l'opérateur $\Sigma_{-1\leq p\leq q-1}\Delta_p$; on conviendra de plus que $\Delta_p = 0$ lorsque $p\leq -2$. On désignera par N_0 un entier tel que $\mathrm{Supp}\,\chi(2^{-N_0}\,.) + \mathrm{Supp}\,\phi$ ne rencontre pas l'origine. On pose alors

$$T_a = \sum_{q\geq 0} S_{q-N_0}(a)\Delta_q\ ,\ R(a,.) = \sum_{|q-q'|\leq N_0} \Delta_q(a)\Delta_{q'} \text{ et si X est un champ de vecteurs, } T_X = \sum_i T_{X^i}\partial_i.$$

1. Théorème général d'existence globale

Son énoncé nécessite la définition suivante :

Définition 1

Soient A un fermé du plan et X un champ de vecteurs de divergence nulle à coefficients C^ε, ne s'annulant pas sur A, on désigne par $C_\varepsilon(A,X)$ l'ensemble des fonctions bornées du plan tel que :

(i) $u \in C^\varepsilon(R^2 \backslash A)$,

(ii) $X(x,D)u \in C^{\varepsilon-1}$.

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de ce travail.

Théorème 1

Soient v_0 *et* X_0 *deux champs de vecteurs de divergence nulle et* A^0 *tels que* X_0 *ne s'annule pas sur* A^0 *et soit de classe* C^ε *; si* ω_0 *appartient à* $C_\varepsilon(A^0, X_0)$ *et est à support compact, il existe alors une unique solution de (E) dans* $L^\infty_{loc}(R\,; Lip\, R^2)$ *qui de plus vérifie :*

(i) $X_0(x,D)\psi \in L^\infty_{loc}(R;\ C^\varepsilon)$,

(ii) si $X_t = \psi^* X_0$ *et* $A^t = \psi(t,A^0)$, *alors* $\omega(t,.) \in C_\varepsilon(A^t, X_t)$ *et* $X_t(x,D)v(t,.) \in C^\varepsilon$.

Démonstration du théorème A à partir du théorème 1

Soit f_0 une équation $C^{1+\varepsilon}$ de la courbe γ^0, on pose $X_0 = \nabla^\perp f_0$ et $A^0 = \gamma^0_\alpha$, où α est un réel strictement positif suffisamment petit pour que X_0 ne s'annule pas sur A^0. On peut alors appliquer le théorème 1; si l'on observe que, dans le cadre de l'équation (B), on a $x(t,s) = \psi(t,x_0(s))$, on déduit du théorème 1 ci-dessus l'existence d'une solution x de l'équation (B) qui appartient à l'espace $C^{1+\varepsilon}_{loc}(R\times\gamma_0)$.

2. Réduction de la démonstration à celle d'une inégalité logarithmique.

La difficulté majeure de la démonstration du théorème 1 réside dans le contrôle de la norme lipschitz du champ de vecteurs solution au cours du temps, alors que la régularité donnée par les relations (0.1) et la loi de Biot-Savart

$$(2.1)\quad v = \nabla^{\perp}\Delta^{-1}\omega,$$

est moindre (C^1_* ou mieux, à dérivées BMO). Dans [3], nous avions démontré une majoration de la norme lipschitz du champ de vecteurs v. Le point clef de la présente démonstration consiste à établir une version logarithmique de cette inégalité, c'est à dire une version où les données géométriques définissant la régularité additionnelle n'apparaissent qu'au travers d'un logarithme. Plus précisement, on a l'inégalité suivante :

Lemme 2.1

Soit ε un réel de l'intervalle $]0,1[$, il existe une constante C (ne dépendant que de ε) telle que, si A est un fermé du plan et X un champ de vecteurs de classe C^ε, de divergence nulle et ne s'annulant pas sur A, on ait :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\{\|\omega\|_{L^1} + \|\omega\|_{L^\infty}(1 + \operatorname{Log} N_\varepsilon(A,X,\omega))\},$$

$$\text{avec } N_\varepsilon(A,X,\omega) = \frac{\|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\setminus A^0}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A^0)}}\left(1 + \frac{\|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}}{I(A,X)\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Admettons momentanément ce lemme dont la démonstration fera l'objet du troisième paragraphe; nous allons en déduire le théorème 1. Soit v un champ de vecteurs solution globale régulière du système (E), il est nécessaire de définir, pour chaque temps, un champ de vecteurs X_t et un fermé A^t à qui l'on puisse appliquer le lemme ci-dessus avec profit. Soit X_0 un champ de vecteurs tangent à γ_0, ne s'annulant pas près de γ_0, de classe C^ε et de divergence nulle, on définit alors X_t et A^t par

$$X_t = \psi_t{}^* X_0 \text{ i.e. } (X_t)^i = (X_0(x,D)\psi)^i(t,\psi^{-1}(t,x)) \text{ et } A^t = \psi(t,\gamma_0).$$

Le point fondamental est le contrôle de toutes les quantités apparaissant dans le membre de droite de l'inégalité.

- Majoration de $\|\omega(t,.)\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\setminus A^t} / \|\omega(t,.)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A^t)}$.

Vu que $\omega(t,x) = \omega_0(\psi^{-1}(t,x))$, on a, d'après la relation (0.1) et la définition de A^t :

$$(2.2)\quad \frac{\|\omega(t,.)\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\setminus A^t}}{\|\omega(t,.)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A^t)}} \leq \frac{\|\omega_0\|_{\varepsilon,\mathbf{R}^2\setminus A^0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A^0)}} \exp \int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip}\, ds\ .$$

• Majoration de $I(A^t,X_t)^{-1}$.

Par définition de A^t et de X_t, on a :

$$(2.3)\quad I(A^t,X_t)^{-1} \leq I(A^0,X_0)^{-1} \exp \int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip} ds\ .$$

• Majoration de $\|X_t\|_\varepsilon$ et de $\|X_t(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}$.

Elle est décrite par le lemme suivant :

Lemme 2.2

Il existe une constante C, telle que :

$$(i)\quad \|X_t(x,D)\omega(t,.)\|_{\varepsilon-1} \leq 2\|X_0(x,D)\omega(0,.)\|_{\varepsilon-1} \exp C \int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip} ds\ ,$$

$$(ii)\quad \|X_t\|_\varepsilon \leq \left(2\|X_0\|_\varepsilon + C\ \frac{\|X_0(x,D)\omega(0,.)\|_{\varepsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\right) \exp C \int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip} ds\ .$$

Démonstration

En dérivant l'équation du flot le long de X_0, il vient par définition de X_t,

$$(2.4)\quad \partial_t X_t + v.\nabla X_t = X_t(x,D)v,\ \text{d'où}\ \partial_t X_t(x,D)\omega + v.\nabla X_t(x,D)\omega = 0;$$

Il en résulte que la majoration de $\|X_t(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}$ n'est rien d'autre que l'étude de la propagation de la régularité Hölderienne d'indice strictement compris entre 0 et 1, ce qui est une question relevant du calcul paradifférentiel. De même, la majoration de $\|X_t\|_\varepsilon$ se fait, d'après (2.4) et le point (i) ci-dessus, par le biais du lemme suivant :

Lemme 2.3

Si v et X sont deux champs de vecteurs de divergence nulle et si ω est le tourbillon de v, on a alors $X(x,D)\ v = W_1(X,v) + W_2(X,v)$ avec :

(i) $\|W_1(X,v)\|_\varepsilon \leq C\ \|X(x,D)\omega\|_{\varepsilon-1}$,

(ii) $\|W_2(X,v)\|_\varepsilon \leq C\ \|X\|_\varepsilon \|v\|_{Lip}$ *et pour tout* $\varepsilon' < \varepsilon$, $\|W_2(X,v)\|_{\varepsilon'} \leq C_{\varepsilon'}\ \|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty}$.

En appliquant les inégalités (2.2) et (2.3) et le lemme 2.2, il vient :

$$(2.5)\quad \|\nabla v(t,.)\|_{L^\infty} \le C\|\omega_0\|_{L^1\cap L^\infty} + C\|\omega_0\|_{L^\infty} \mathrm{Log} N_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0) \int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip} ds\ .$$

De plus, comme $\|v(t,.)\|_{L^\infty} \le C\,\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}$, on a, par intégration de l'inégalité (2.5),

$$(2.6)\quad \int_0^t \|v(s,.)\|_{Lip} ds \le C \frac{\|\omega_0\|_{L^1\cap L^\infty}}{NL_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0)} \left(\exp\,(NL_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0)Ct)\ -1\right),$$

$$\text{avec } NL_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0) = \|\omega_0\|_{L^\infty} \mathrm{Log} N_\varepsilon(A^0,X_0,\omega_0)\ .$$

On peut maintenant conclure la démonstration du théorème 1 modulo le lemme 2.1. Il suffit simplement de suivre la voie empruntée dans [3]. Après régularisation de la donnée initiale, l'estimation (2.6), le lemme 2.2 et le lemme 2.4 de [3] permettent de passer à la limite et ainsi d'achever la démonstration du théorème 1.

3. Démonstration du lemme 2.1

La démonstration de ce lemme repose sur deux idées très simples. La première, bien connue, est que l'inclusion de l'espace C_*^0 dans L^∞ est vraie, au logarithme de la norme C^ε près. Plus précisement, on a le lemme suivant :

Lemme 3.1

Pour tout ε strictement positif, il existe C tel que l'on ait :

$$\|f\|_{L^\infty} \le C\|f\|_0\left(1 + \mathrm{Log}\left(\frac{\|f\|_\varepsilon}{\|f\|_0}\right)\right).$$

Démonstration

On utilise le découpage dyadique de l'espace des fréquences, d'où :

$$f = \sum_{q=-1}^{N} \Delta_q f + \sum_{q=N+1}^{\infty} \Delta_q f$$

La caractérisation des espaces de Hölder assure que l'on a $\|f\|_{L^\infty} \le (N+1)\ \|f\|_0 + 2^{-(N+1)\varepsilon}\ \|f\|_\varepsilon$, un choix judicieux de N assure alors le lemme.

La seconde idée est la suivante. Supposons que $X = \partial_1$, la majoration de $\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty}$ va résulter du lemme ci-dessus. Or, $\|\partial_2{}^2\phi\|_{L^\infty} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \|\partial_1{}^2\phi\|_{L^\infty}$, d'où le lemme 2.1 dans ce cas très particulier.

Pour passer au cas général, deux difficultés se présentent. La première provient de la nécessaire troncature en espace et se résout facilement par découpage en deux d'une intégrale singulière et optimisation de ce découpage. La seconde, beaucoup plus sérieuse, provient de la faible régularité du champ de vecteurs X et sa possible annulation au cours de l'évolution. L'un des points cruciaux est que toutes ces tendances à perturber l'inégalité n'apparaissent, elle aussi qu'atténuées par un logarithme.

Nous allons commencer par démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.2

Soit ε un réel de l'intervalle $]0,1[$, il existe une constante C (ne dépendant que de ε) telle que si A est un fermé du plan et Y un champ de vecteurs de classe C^ε ne s'annulant pas sur A, on ait :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C \left\{ \|\omega\|_{L^1} + \|\omega\|_{L^\infty} \frac{\|Y\|^2_{L^\infty}}{I(A,Y)^2} \left(1 + Log \left(\frac{\|Y\|^2_\varepsilon}{I(A,Y)^2} + \frac{\|Y\|_\varepsilon \|Y(x,D)v\|_\varepsilon}{I(A,Y)^2 \|\omega\|_{L^\infty}} \right) + Log \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, R^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(R^2 \setminus A)}} \right) \right\}.$$

Démonstration

On peut supposer que le support de la transformée de Fourier de ω ne rencontre pas la boule unité; de plus on notera $a = \Delta^{-1}\omega$. Il s'agit alors de majorer $\partial_i\partial_j a$.

L'étape décisive est la majoration de $Y(x,D)\,\partial_i a$. On va utiliser une décomposition dans l'espace des fréquences inspirée de celle en paraproduit et reste. On a

$$(3.1)\quad Y(x,D)\,\partial_i a = \Phi_1 + \Phi_2 \text{ avec } \Phi_1 = T_Y \partial_i a \text{ et } \Phi_2 = \sum_{k=1}^{2} \sum_{q=-1}^{+\infty} S_{q+N_0}(\partial_i\partial_k a)\Delta_q Y^k.$$

Pour la majoration de $\|\Phi_1\|_{L^\infty}$, on utilise le lemme 3.1. Il est clair que $\|\Phi_1\|_0 \leq \|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}$; de plus, des techniques standard de calcul paradifférentiel entrainent que, pour tout $\varepsilon' \in]0,\varepsilon[$, on a

$$\|\Phi_1\|_{\varepsilon'} \leq C_{\varepsilon'} (\|Y(x,D)v\|_\varepsilon + \|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty}).$$

L'application du lemme 3.1 pour ε', assure alors l'inégalité suivante :

$$(3.2)\quad \|\Phi_1\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty} \left(1 + Log \left(\frac{\|Y(x,D)v\|_\varepsilon + \|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty}}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}} \right) \right).$$

Le terme Φ_2 se traite de manière différente. On fixe un entier N et on écrit $\Phi_2 = \Phi_{3,N} + \Phi_{4,N}$ avec :

$$\Phi_{3,N} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{q=-1}^{N-1} S_{q+N_0}(\partial_k\partial_i a)\Delta_q Y^k ,$$

$$\Phi_{4,N} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{q=N}^{\infty} S_{q+N_0}(\partial_k\partial_i a)\Delta_q Y^k .$$

La majoration de $\Phi_{4,N}$ se fait en utilisant la régularité C^ε du champ de vecteurs Y, d'où :

$$\|\Phi_{4,N}\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon 2^{-N\varepsilon/2}\|\omega\|_{L^\infty}\|Y\|_\varepsilon .$$

Le terme $\Phi_{3,N}$ doit se traiter avec un peu plus de finesse. Un regroupement d'Abel entraine que

$$\Phi_{3,N} = \sum_{k=1}^{2}\left\{S_{N+1}(Y^k)\Delta_{N-N_0}\partial_k\partial_i a - \sum_{q=-1}^{N-1} S_{q+1}(Y^k)\Delta_{q-N_0}\partial_k\partial_i a\right\} \text{ , d'où}$$

$$\|\Phi_{3,N}\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon N\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}$$

On optimise alors le choix de N en prenant par exemple $\frac{N}{2} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}}\right] + 1$, d'où il vient :

$$(3.3)\quad \|\Phi_2\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}}\right).$$

En appliquant (3.1-3), on obtient, pour tout $i \in \{1,2\}$:

$$(3.4)\quad \|Y(x,D)\partial_i a\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D))v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Il suffit alors d'observer qu'en posant $Y^3 = Y^1$ on obtient les relations suivantes :

$$|Y(x)|^2\partial_i^2 = Y^1(x)Y(x,D)\partial_1 - Y^2(x)Y(x,D)\partial_2 + (-1)^{i+1}(Y^{i+1}(x))^2\Delta \text{ et que}$$
$$|Y(x)|^2\partial_1\,\partial_2 = Y^1(x)Y(x,D)\partial_2 - Y^2(x)Y(x,D)\partial_1 - Y^1(x)Y^2(x)(\partial_2^2 - \partial_1^2) .$$

On peut alors conclure, pour tout i et j dans $\{1,2\}$, à l'inégalité suivante :

$$(3.5)\quad \|\,|Y(x)|^2\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon (\|Y\|_{L^\infty})^2\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D))v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Une fois obtenue cette inégalité, reste à tronquer en dehors du lieu d'annulation éventuelle du champ de vecteurs Y. Pour ce faire, on va considérer une fonction f (resp. g) une fonction de $C^\varepsilon(\mathbf{R}^2; [0,1])$, valant identiquement 1 près de $A_{\alpha/2}$ (resp. $A_{3\alpha/4}$) et supportée dans $A_{3\alpha/4}$(resp. $A_{5\alpha/6}$) telle que $\|f\|_\varepsilon \leq C\,\alpha^{-\varepsilon}$ avec $2\alpha = (I(A,Y)/\|Y\|_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$. On écrit alors

$$\partial_i\partial_j a = g\partial_i\partial_j a + (1-g)\partial_i\partial_j a\ .$$

Il résulte de la définition de α et de la norme C^ε que $2I(A_\alpha, Y) \geq I(A,Y)$ et donc de (3.5) que

$$(3.6)\quad \|g\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \frac{\|Y\|^2_{L^\infty}}{I(A,Y)^2}\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty} + \|Y(x,D))v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Reste à majorer $\|(1-g)\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty}$. Des considérations standard sur les intégrales singulières permettent de démontrer que l'on a :

$$(3.7)\quad \|(1-g)\partial_i\partial_j a\|_{L^\infty} \leq C\left\{\|\omega\|_{L^1} + \|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\frac{\|Y\|_\varepsilon}{I(A,Y)} + \mathrm{Log}\frac{\|\omega\|_{\varepsilon,\, \mathbf{R}^2\setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A)}}\right)\right\}.$$

Le lemme 3.2 en résulte.

Remarque.

Le lemme 3.2 démontré ci-dessus n'utilise en rien la nullité de la divergence du champ de vecteurs Y, ce qui n'entraine aucune restriction à son application. Soit X un champ de vecteurs à divergence nulle, la structure striée qu'il définit n'est fidèlement décrite que par un champ de vecteurs colinéaire à X, unitaire dans la région qui nous intéresse. Ce champ de vecteurs n'a bien évidemment aucune raison d'être à divergence nulle.

C'est cette remarque qui est la clef du passage du lemme 3.2, où les données géométriques liées à la structure striée apparaissent "au carré", au lemme 2.1 où ces mêmes données ne sont présentes qu'adoucies par un logarithme. Suivant l'idée émise dans la précédente remarque, nous allons appliquer le lemme 3.2 à un champ de vecteurs Y judicieusement construit à partir de X.

Pour ce faire, posons $\beta = (I(A,X)\ /\ 2\|X\|_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$, et si ρ désigne une fonction régulière supportée dans la boule unité du plan et d'intégrale 1, on pose alors :

$y = \dfrac{16}{\beta^2}\,\rho\left(\dfrac{4}{\beta}\,.\right) * 1_{A_{\beta/2}}$ et $Y(x) = y(x)\,\dfrac{X(x)}{|X(x)|}$, où $1_{A_{\beta/2}}$désigne la fonction caractéristique de$A_{\beta/2}$.

Remarquons immédiatement que $\|Y\|_{L^\infty} = I(A,Y) = 1$. Appliqué avec un ε' strictement compris entre 0 et ε (par exemple $\varepsilon' = \varepsilon/2$), le lemme 3.2 assure

$$(3.8)\quad \|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C\left\{\|\omega\|_{L^1}+\|\omega\|_{L^\infty}\left(1 + \mathrm{Log}\left(\frac{\|\omega\|_{\varepsilon,\, \mathbf{R}^2\setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2\setminus A)}}\right) + \mathrm{Log}\left(\frac{\|Y\|_\varepsilon\|\omega\|_{L^\infty}+ \|Y(x,D))v\|_{\varepsilon'}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right)\right)\right\}.$$

Il suffit dorénavant, pour obtenir le lemme 2.1, de majorer $\|Y\|_{\varepsilon'}$ et $\|Y(x,D)v\|_{\varepsilon'}$ à l'aide de $\|X\|_\varepsilon$, $\|X(x,D)\omega\|_\varepsilon$ et $I(A,X)$.

Le champ de vecteurs Y est à coefficients C^ε; vue la définition de Y, on obtient trivialement que $\|Y\|_\varepsilon \leq C\,\|X\|_\varepsilon\,(I(A,X))^{-1}$. De plus, on a

$$Y(x,D)v = \frac{y(x)}{|X(x)|}\,X(x,D)v,\ \text{d'où}\ \|Y(x,D)v\|_{\varepsilon'} \leq \frac{\|X\|_\varepsilon}{I(A,X)^2}\,\|X(x,D)v\|_{\varepsilon'}\,.$$

La majoration de $\|X(x,D)v\|_{\varepsilon'}$ se fait en utilisant le lemme 2.3 ce qui conclue la démonstration du lemme 2.1 et ainsi celle du théorème 1.

Références bibliographiques

[1] S. Alinhac, *Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon.* Prépublication de l'Université d'Orsay (1989), à paraitre dans Journ. of Functional Analysis.

[2] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.* Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **14**, p. 209-246 (1981)

[3] J.-Y. Chemin, *Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel.* Inventiones Math. **103**, p. 599-629 (1991).

[4] J.-Y. Chemin, *Persistance des structures striées dans les fluides incompressibles bidimensionnels.* Prépublication de l'Ecole Polytechnique, à paraitre.

[5] A. Majda, *Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow.* Comm. Pure Appl. Math. **38**, p. 187-220 (1986).

[6] V. Yudovitch, *Non stationnary flow of an ideal incompressible liquid.* Zh. Vych. Math. **3**, p1032-1066.

Jean-Yves Chemin
URA n°169 du CNRS
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex