

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

V. M. PETKOV

## **Pôles de la matrice de diffusion pour des perturbations captives**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1990-1991), exp. n° 15,  
p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1990-1991\\_\\_\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A15_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### POLES DE LA MATRICE DE DIFFUSION POUR DES PERTURBATIONS CAPTIVES

V.M. PETKOV



## 1. Introduction.

Soit  $L = -c^2(x) \sum_{j,k=1}^n \partial_{x_j} (a_{jk}(x) \partial_{x_k})$  un opérateur dans  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$   $n$  impair. On suppose que les coefficients  $a_{jk}(x), c(x)$  satisfont les hypothèses :

$$(H_1) \quad \left[ \begin{array}{l} a_{jk}(x), c(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \\ a_{jk}(x) = a_{kj}(x), c(x) \geq c_0 > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \\ \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \delta_0 |\xi|^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \\ \text{avec } \delta_0 > 0, \end{array} \right.$$

$$(H_2) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Il existe } \rho_0 > 0 \text{ tel que} \\ c(x) = 1, a_{jk}(x) = \delta_{jk}, \quad \text{pour } |x| \geq \rho_0, \\ \delta_{jk} \text{ étant les symboles de Kronecker.} \end{array} \right.$$

Posons  $L_0 = -\Delta$  et considérons les problèmes de Cauchy pour les opérateurs  $(\partial_t^2 + L_0)$  et  $(\partial_t^2 + L)$  dans  $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n$ . Soit  $H_D(\mathbf{R}^n)$  le complété de  $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  par rapport à la norme

$$\left( \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

et soit  $H = H_D(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$  l'espace énergétique. On introduit dans  $H$  deux groupes unitaires  $U_0(t), U(t)$  associés respectivement aux problèmes de Cauchy pour  $\partial_t^2 + L_0$  et  $\partial_t^2 + L$ . On peut construire une théorie de diffusion liée aux groupes  $U_0(t)$  et  $U(t)$  et on introduit la matrice de diffusion

$$S(\lambda) : L^2(\mathbf{R}^{n-1}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^{n-1}), \lambda \in \mathbf{R}$$

comme une fonction à valeurs des opérateurs unitaires (cf. [1], [6]). La fonction  $S(\lambda)$  admet un prolongement méromorphe sur  $\mathbf{C}$  avec des pôles  $z_j$  dans le demi-plan  $\{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$ . De plus,  $S(\lambda) = \text{Id} + K(\lambda)$ , où  $K(\lambda)$  est un opérateur nucléaire et cela rend possible l'introduction de la phase de diffusion

$$s(\lambda) = -i \log \det S(\lambda), \quad s(0) \in [0, 2\pi[.$$

Dans cet exposé on se propose d'examiner l'existence de pôles  $\{z_j\}$  tels que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |z_j - \lambda_j| = 0, \quad (1)$$

où  $\{\lambda_j\}$  est une suite de nombre réels.

D'autre part, l'existence de pôles  $\{z_j\}$  ayant la propriété (1) implique une croissance de la dérivée  $|\frac{ds}{d\lambda}(\lambda_j)|$  quand  $|\lambda_j| \rightarrow \infty$ .

Nous nous intéressons aux problèmes suivants :

(I) Soit  $p \in \mathbf{N}$ . Trouver une suite  $\{z_j\}_{j \in \mathbf{N}}$  de pôles et une suite de nombres réels  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbf{N}}$  telles que

$$|z_j - \lambda_j| \leq C_p |z_j|^{-p}, \quad \forall j \in \mathbf{N} \quad (2)$$

avec une constante  $C_p > 0$  indépendante de  $j$ .

(II) Soit  $m \in \mathbf{N}, m \geq n$ . Trouver une suite  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbf{N}}, |\lambda_j| \rightarrow \infty$ , telle que

$$\left| \frac{ds}{d\lambda}(\lambda_j) \right| \geq C(1 + |\lambda_j|)^m, \quad \forall j \in \mathbf{N}$$

avec  $C > 0$  indépendante de  $j$ .

(III) Trouver une asymptotique de type de Weyl avec deux termes pour la phase de diffusion  $s(\lambda)$  quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Les problèmes (I)-(III) sont liés et pour qu'on ait (2) il faut que la mesure de l'ensemble de points périodiques par rapport au flot Hamiltonien de  $L$  soit positive. En effet, nous donnerons une précision sur la conjecture de Ralston [12] qui a suggéré que l'existence des trajectoires périodiques stables implique l'existence de pôles  $z_j$  pour lesquels on a (1). Les résultats concernant l'apparition de pôles  $z_j$  tels que  $\text{Im } z_j \rightarrow 0$  ont été obtenus par Ralston [12], Ikawa [5] pour des perturbations captives.

D'autre part, Gérard, Martinez et Robert [3] ont examiné la croissance exponentielle de la dérivée de la phase de diffusion  $\frac{ds_h(\lambda)}{d\lambda}$  pour l'opérateur de Schrödinger  $-h^2\Delta + V(x)$ .

## 2. Annonce de résultats.

Soit  $\ell(x, \xi) = c^2(x) \sum_{j,k} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k$  le symbole principal de  $L$  et soit  $\ell_s(x, \xi)$  le symbole sous-principal de  $L$ . On introduit l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) : \ell(x, \xi) = 1\}$$

et on considère sur  $\Sigma$  les trajectoires du flot Hamiltonien  $\phi^t$  de  $\ell(x, \xi)$ . On dit que  $\nu \in \Sigma$  est périodique avec période  $T$  si  $\phi^T(\nu) = \nu$ . On désigne par  $\Pi_T$  l'ensemble de points périodiques ayant période  $T$  et on pose  $\Pi = \cup_{t>0} \Pi_t$ . Etant donné  $\nu \in \Sigma$ , considérons la trajectoire périodique

$$\delta(\nu) = \{(x(\sigma; \nu), \xi(\sigma; \nu)) \in \mathbf{R}^{2n} ; 0 \leq \sigma \leq T(\nu)\},$$

où  $T(\nu)$  est la période primitive de  $\delta(\nu)$ . Posons

$$q_s(\nu) = \int_0^{T(\nu)} \ell_s(x(\sigma; \nu), \xi(\sigma; \nu)) d\sigma .$$

Soit  $q_c(\nu) \in \mathbf{Z}$  l'indice de Maslov de la trajectoire périodique  $\delta(\nu)$  et soit

$$q(\nu) = \frac{\pi}{2} q_c(\nu) - q_s(\nu) .$$

Etant donné  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on note  $[\lambda]_{2\pi}$  le résiduum de  $\lambda$  modulo  $2\pi$ , déterminé par

$$-\pi < [\lambda]_{2\pi} \leq \pi$$

$$\lambda = [\lambda]_{2\pi} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} .$$

Finalement, introduisons la fonction

$$Q(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{\Pi} \frac{[\pi - \lambda T(\nu) - q(\nu)]_{2\pi}}{T(\nu)} d\nu .$$

Il est facile de voir que pour tout  $\nu \in \Pi$  nous avons  $T(\nu) \geq \delta_1 > 0$  et cela implique

$$|Q(\lambda)| \leq C_1, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} .$$

La fonction  $Q(\lambda)$  a été introduite par Safarov [15] (cf. aussi [4]). Afin d'annoncer une formule de Weyl pour  $s(\lambda)$ , introduisons la constante

$$c_0 = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_{\mathbf{R}^n} \{[\det(c^2(x) a_{jk}(x))]^{-1/2} - 1\} dx .$$

Dans le théorème suivant on obtient une formule de Weyl pour la phase de diffusion  $s(\lambda)$ .

**Théorème 1.**— Pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$\begin{aligned} Q(\lambda - \varepsilon)\lambda^{n-1} - C_0\varepsilon\lambda^{n-1} - o(\lambda^{n-1}) &\leq s(\lambda) - c_0\lambda^n \\ &\leq Q(\lambda + \varepsilon)\lambda^{n-1} + C_0\varepsilon\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}) . \end{aligned} \quad (3)$$

où la constante  $C_0 > 0$  ne dépend pas de  $\varepsilon$  et  $\lambda$ .

**Remarques :**

1) Dans le cas où  $\text{mes } \Pi = 0$  on obtient une asymptotique avec un reste de type  $o(\lambda^{n-1})$ . Dans ce cas le résultat a été obtenu par d'autres méthodes par Robert [13], [14]. Il a traité aussi le cas général avec un reste de type  $o(\lambda^{n-1})$ .

2) Pour des métriques non-captives une formule pour la phase de diffusion a été démontrée par Majda et Ralston [7]. On renvoie à [9] pour des résultats concernant la phase de diffusion associée à l'opérateur de diffusion pour des obstacles.

Il est facile de voir que la fonction  $Q(\lambda)$  est continue à gauche et à droite. De plus, si on pose

$$\Omega_\lambda = \{\nu \in \Pi : \lambda T(\nu) + q(\nu) = 0 \pmod{2\pi}\},$$

on obtient

$$Q(\lambda + 0) - Q(\lambda - 0) = (2\pi)^{-n-1} \int_{\Omega_\lambda} T^{-1}(\nu) d\nu .$$

La continuité de la fonction  $Q(\lambda)$  sur  $\mathbf{R}$  joue un rôle crucial pour l'existence de pôles  $z_k$  tels que  $\text{Im } z_k \rightarrow 0$ .

**Théorème 2.**— Soit  $p \in \mathbf{N}$ . Supposons qu'il existe  $\xi > 0$  et deux suites  $\lambda_k \nearrow \infty$  et  $\varepsilon_k \searrow 0$  telles qu'on a

$$Q\left(\lambda_k + \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}\right) - Q\left(\lambda_k - \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}\right) \geq \xi \quad \text{pour } \forall k \in \mathbf{N} . \quad (4)$$

Alors pour toute constante  $C > 0$  il existe  $k_0(C)$  et des pôles  $\{z_k\}$  tels que

$$|z_k - \lambda_k| \leq C|z_k|^{-p} \quad \text{pour } k \geq k_0(C) . \quad (5)$$

De plus, si  $p \geq n$  il existe  $k_1$  et  $C'$  tels que

$$\left| \frac{ds}{d\lambda}(\text{Re } z_k) \right| \geq C'(1 + |z_k|)^p, \quad \forall k \geq k_1 . \quad (6)$$

**Corollaire 3.**— Supposons qu'il existe  $\xi > 0$  et une suite  $\lambda_k \nearrow \infty$  tel que

$$Q(\lambda_k + 0) - Q(\lambda_k - 0) \geq \xi \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N} . \quad (7)$$

Alors la condition (4) est satisfaite pour tout  $p \in \mathbf{N}$ .

Dans l'exemple suivant l'hypothèse (7) est satisfaite même si on examine seulement une partie des trajectoires périodiques.

**Exemple 4 :** Soit  $n = 3$ . Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $0 < r_0 < r_1 < \rho_0$  tels que

$$a_{jk}(x) = \delta_{jk}, c(x) = \alpha|x| \quad \text{pour } r_0 \leq |x| \leq r_1.$$

Soit  $S_\sigma = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = \sigma\}, r_0 \leq \sigma \leq r_1$ .

Posons

$$\Sigma_{0,1} = \{(x, \xi) \in \Sigma : r_0 \leq |x| \leq r_1, \Sigma_k x_k \xi_k = 0\}.$$

Alors pour tout  $\nu \in \Sigma_{0,1}$  nous avons une trajectoire périodique de  $H_q$  ayant période  $T(\nu) = \frac{2\pi}{\alpha}$ . En effet, si  $\{t(\sigma), x(\sigma), -1, \xi(\sigma)\}$  est une trajectoire périodique, on trouve

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\dot{x}_k(\sigma)}{\dot{t}(\sigma)} = \alpha^2 r^2 \xi_k \quad \text{avec } r = \text{const}$$

$$\text{et } \left| \frac{dx}{dt} \right| = \alpha r \quad \text{implique}$$

$$\alpha r T(\nu) = \int_0^{T(\nu)} \left| \frac{dx}{dt} \right| dt = 2\pi r.$$

D'autre part, nous avons  $q_s(\nu) = 0, q_c(\nu) = -2$  pour  $\nu \in \Sigma_{0,1}$  puisque  $\Sigma_k x_k(\sigma) \xi_k(\sigma) = 0$ . Alors  $q(\nu) = -\pi$  et on considère la suite

$$\lambda_k = \alpha \left( k + \frac{1}{2} \right), k \in \mathbf{Z}$$

pour laquelle  $\lambda_k \frac{2\pi}{\alpha} - \pi = 0 \pmod{2\pi}$ . On obtient

$$\Omega_{\lambda_k} \supseteq \Sigma_{0,1}, \mu_\Sigma(\Omega_{\lambda_k}) \geq \mu_0 > 0$$

et

$$Q(\lambda_k + 0) - Q(\lambda_k - 0) \geq \mu_0 \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^{-1} = \xi > 0,$$

où  $\mu_\Sigma$  est la mesure induite sur  $\Sigma$ . De telle manière, pour tout  $p \in \mathbf{N}$  et  $C_p > 0$  il existe des pôles  $\{z_k\}$  tels que

$$|z_k - \alpha \left( k + \frac{1}{2} \right)| \leq C_p |z_k|^{-p}, \forall k.$$

On peut comparer cet exemple avec celui de Ralston [12], où la métrique est radiale.

### 3. Idée de la démonstration du théorème 1.

Pour simplifier la description des idées on va supposer que  $c(x) \equiv 1$ . Alors l'opérateur  $L$  admet une extension auto-adjoint dans  $L^2(\mathbf{R}^n)$  qu'on note aussi par  $L$ . On commence par une formule de trace obtenue dans [1]. Pour chaque fonction  $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  on a

$$2tr \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)(\cos t\sqrt{L} - \cos t\sqrt{L_0})dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\lambda) \frac{ds}{d\lambda}(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

où  $\hat{\varphi}(\lambda)$  est la transformation de Fourier de  $\varphi(t)$ . En suivant les arguments de Melrose [8] on peut montrer que pour toute fonction  $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$  on a

$$2tr \int_0^{\infty} \varphi(t)(\cos t\sqrt{L} - \cos t\sqrt{L_0})dt = \Sigma_j \hat{\varphi}(-z_j), \quad (9)$$

où  $\hat{\varphi}(z)$  est la transformation de Laplace et la sommation est sur tous les pôles  $z_j$  en les répétant en suivant leur multiplicité. Comme en [9] on introduit la distribution

$$\xi(t) = \begin{cases} \Sigma_j e^{iz_j t}, & t > 0, \\ \Sigma_j e^{i\bar{z}_j t}, & t < 0. \end{cases}$$

Soit  $N(R) = \#\{j : |z_j| \leq R\}$  la fonction de comptage de nombre de pôles dans le disque  $|z| \leq R$ . Récemment, Vodev [19] et Sjöstrand et Zworski [17], [18] ont obtenu une estimation optimale pour la fonction  $N(R)$  dans la forme

$$N(R) \leq C_0 R^n + C_1, \quad \forall R > 0. \quad (10)$$

Alors en combinant (8) et (9) on déduit la représentation

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) = \Sigma_j \frac{2 \operatorname{Im} z_j}{(\operatorname{Re} z_j - \lambda)^2 + (\operatorname{Im} z_j)^2},$$

où la sommation est sur tous les pôles  $z_j$  calculés avec leur multiplicité et la série est convergente au sens de distributions. Cette forme de  $\frac{ds}{d\lambda}$  pour des obstacles bornés a été proposée par Melrose [9].

Soit  $\zeta(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  une fonction telle que  $\zeta(t) = 1$  pour  $|t| \leq 2$ ,  $\zeta(t) = 0$  pour  $|t| \geq 3$ . Introduisons la fonction  $s_1(\lambda)$  par

$$\frac{ds_1}{d\lambda}(\lambda) = \Sigma_j \zeta\left(\frac{|z_j|}{\lambda}\right) \frac{2 \operatorname{Im} z_j}{(\operatorname{Re} z_j - \lambda)^2 + (\operatorname{Im} z_j)^2}, \quad s_1(0) = 0 \quad (11)$$

et on pose  $s_2(\lambda) = s(\lambda) - s_1(\lambda)$ . Il est facile de voir que  $s_2(\lambda)$  est un symbole dans l'espace  $S^n(\mathbf{R})$  et

$$\left| \frac{ds_2}{d\lambda}(\lambda) \right| \leq C(1 + |\lambda|)^{n-1}.$$

Soit  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  une fonction ayant les propriétés suivantes :

$$\rho(\tau) = \rho(-\tau) , \rho(\tau) \geq 0 \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbf{R} .$$

$$\rho(\tau) > 0 \quad \text{pour } |\tau| \leq 1 , \hat{\rho}(0) = 1 .$$

$$\hat{\rho}(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \text{supp } \hat{\rho}(t) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

où  $0 < \varepsilon_0 < \delta_1$  est assez petit et  $\hat{\rho}(t)$  désigne la transformation de Fourier.

Posons  $\rho_\delta(\tau) = \frac{1}{\delta} \rho(\frac{\tau}{\delta})$ ,  $0 < \delta \leq 1$ . Rappelons un théorème taubérien démontré par Safarov [15].

**Théorème 5 [15].**— Soit  $e(\chi)$  une fonction croissante telle que  $|e(\lambda)| \leq C|\lambda|^M$ . Soit  $e_\delta(\lambda) = (e * \rho_\delta)(\lambda)$ . Supposons que  $c'_1(\lambda) \leq C_1(1 + |\lambda|)^{n-1}$ . Alors pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  et tout  $0 < \delta \leq 1$  on a

$$\begin{aligned} e_\delta(\lambda - \varepsilon) - C_0 \varepsilon^{-1} \delta |\lambda|^{n-1} - C'_0 &\leq e(\lambda) \\ &\leq e_\delta(\lambda + \varepsilon) + C_0 \varepsilon^{-1} \delta |\lambda|^{n-1} + C'_0 \end{aligned} \quad (12)$$

avec des constantes  $C_0, C'_0$  qui ne dépendent pas de  $\varepsilon$  et  $\delta$ .

Afin d'appliquer ce théorème pour la fonction  $s_1(\lambda)$  on estime

$$|e'_1(\lambda)| \leq |(\frac{ds}{d\lambda} * \rho)(x)| + |(\frac{ds_2}{d\lambda} * \rho)(\lambda)| \leq C(1 + |\lambda|)^{n-1} .$$

Après on utilise la formule (8) avec  $\varphi(t) = \hat{\rho}(t)e^{i\lambda t}$  et on obtient l'asymptotique

$$(\frac{ds}{d\lambda} * \rho)(\lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^{n-1-2k} \quad (13)$$

avec  $d_0 = \frac{n}{2}c_0$ . Pour la fonction  $s_2(\lambda)$  par un calcul direct on déduit pour  $0 < \delta < \varepsilon$  les estimations

$$\begin{aligned} (s_2 * \rho_\delta)(\lambda - \varepsilon) - C_2 \varepsilon |\lambda|^{n-1} &\leq s_2(\lambda) \\ &\leq (s_2 * \rho_\delta)(\lambda + \varepsilon) + C_2 \varepsilon |\lambda|^{n-1} . \end{aligned}$$

Soit  $E(t, x, y)$  la solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + L_x)E(t, x, y) = 0 & \text{dans } \mathbf{R}^{n+1}, \\ E(0, x, y) = 0, \partial_t E(0, x, y) = \delta(x - y) \end{cases}$$

et soit  $E_0(t, x, y)$  la solution du même problème avec  $L_0$  à la place de  $L$ . Alors

$$(\frac{ds}{d\lambda} * \rho_\delta)(\lambda) = 2tr \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} (\cos t\sqrt{L} - \cos t\sqrt{L_0}) dt$$

$$= 2 \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} [\partial_t E(t, x, x) - \partial_t E_0(t, x, x)] dt dx . \quad (14)$$

Soit  $\phi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  telle que  $\text{supp } \phi \subset (-\delta_1, \delta_1)$ ,  $\phi(t) = 1$  pour  $|t| \leq \frac{\delta_1}{2}$ . L'étude de (14) avec  $\hat{\rho}(\delta t)$  remplacée par  $\phi(t)\hat{\rho}(\delta t)$  ne pose pas de problèmes. D'autre part, notons que  $E_0(t, x, x) = 0$  pour  $t \neq 0$ . L'intégration sur  $\mathbf{R}^n$  par rapport à  $x$  dans (14) engendre des difficultés quand  $\delta \rightarrow 0$  puisque le support de  $\hat{\rho}(\delta t)$  est inclus dans  $(-\varepsilon_0/\delta, \varepsilon_0/\delta)$ . Pour cela on va utiliser une formule de trace pour des fonctions  $\psi(t)$  ayant support dans  $\mathbf{R}^+$ . Soit  $h_0(t, x, y)$  la solution du problème

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x)h_0(t, x, y) = E_0(t, x, y), \\ \text{supp } h_0 \subset \{(t, x, y) : t \geq 0\}, \end{cases}$$

où on prolonge  $E_0(t, x, y)$  et  $E(t, x, y)$  comme 0 pour  $t < 0$ . Soit  $Q = L - L_0$ .

**Théorème 6.**— Pour chaque fonction  $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$  on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) \partial_t E(t, x, x) dt dx \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(t) \partial_t E(s, x, z) Q_x Q_z h_0(t-s, z, x) dx dz , \end{aligned} \quad (15)$$

où l'intégration est interprétée au sens de distributions.

Soit  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  deux fonctions telles que  $\alpha_1(x) = 1$  pour  $|x| \leq \rho_0 + 1$ ,  $\alpha_1(x) = 0$  pour  $|x| \geq \rho_0 + 2$  et  $\alpha_2(x) = 1$  sur  $\text{supp } \alpha_1(x)$ . Notons  $\nu_\delta(\lambda)$  la transformation de Fourier de

$$Y(t)(1 - \phi(t))\hat{\rho}(\delta t)$$

On applique (15) avec  $\varphi(t) = e^{i\lambda t}(1 - \phi(t))\hat{\rho}(\delta t)$  et on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (1 - \phi(t))\hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \partial_t E(t, x, x) dt dx \\ &= (2\pi)^{-1} \int \int dx dz \alpha_2(x) \alpha_1(z) \int d\mu \nu_\delta(\lambda - \mu) \int e^{-i\mu t} \partial_t E(t, x, z) dt \\ & \quad \cdot Q_x Q_z \int e^{-i\mu s} h_0(s, z, x) ds . \end{aligned} \quad (16)$$

On écrit

$$Q_x Q_z = (L_x - \mu^2 + \Delta_x + \mu^2)(L_z - \mu^2 + \Delta_z + \mu^2)$$

et on remarque que

$$(\Delta_x + \mu^2) \int e^{-i\mu s} h_0(s, z, x) ds = \int e^{-i\mu s} E_0(s, z, x) ds , \quad (17)$$

$$(L_x - \mu^2) \int e^{-i\mu t} \partial_t E(t, x, z) dt = i\mu \delta(x - z), \quad (18)$$

où les intégrales sont interprétés au sens de distributions.

On voit facilement que les singularités des distributions

$$\int e^{-i\mu s} h_0(s, z, x) ds, \quad \int e^{-i\mu s} E_0(s, z, x) ds$$

sont inclus dans le diagonal

$$\{(x, z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : x = z\}.$$

En profitant de (17), (18) on observe que si dans (16) on remplace  $Q_x$  par l'opérateur  $(L_x - \mu^2)$ , on obtient des termes qu'on peut estimer par  $\mathcal{O}(|\lambda|^{-M})$  pour tout  $M \in \mathbf{N}$  uniformément par rapport à  $\delta \in (0, 1)$ . L'opérateur  $(\Delta_x + \mu^2)(\Delta_z + \mu^2)$  donne le terme

$$I_\delta^+(\lambda) = \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (1 - \phi(t)) \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \alpha_1^2(x) \partial_t E(t, x, x) dt dx, \quad (18)$$

où l'intégration par rapport à  $x$  est sur un compact qui contient les trajectoires périodiques de  $H_t$ . Afin de traiter l'opérateur  $(\Delta_x + \mu^2)(L_z - \mu^2)$  on fait une intégration par parties dans l'intégral par rapport à  $z$  et on exploite (17). De telle façon, modulo des termes négligibles, on obtient des intégrales

$$\sum_{1 \leq |\gamma| \leq 2} \int_{\mathbf{R}^n} dx \int_{\rho_0+1 \leq |z| \leq \rho_0+2} dz \alpha_2(x) \partial_z^\gamma \alpha_1(z) \int d\mu \nu_\delta(\lambda - \mu) .$$

$$P_{2-\gamma} \int e^{-i\mu t} \partial_t E(t, x, z) dt \int e^{-i\mu s} E_0(s, z, x) ds, \quad (19)$$

où  $P_{2-\gamma}$  sont des opérateurs différentiels par rapport à  $z$  d'ordre  $2 - |\gamma|$ . On examine (19) en construisant une paramétrix de  $E(t, x, z)$ . On obtient une intégrale oscillant ayant des points critiques qui sont hors du domaine de l'intégration.

On répète le même argument pour les fonctions  $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^-)$  et on se ramène à l'étude de l'intégrale

$$I_\delta(x) = \int_{-\infty}^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (1 - \phi(t)) \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \alpha_1^2(x) \partial_t E(t, x, x) dt dx .$$

L'asymptotique de  $I_\delta(\lambda)$  est liée avec les périodes des trajectoires périodiques de  $\phi^t$ . On dit qu'un point  $\nu \in \Pi_t$  est absolument périodique si les graphes de  $\phi^t$  et de l'identité sont tangent d'ordre infini en  $(\nu, \nu)$ . Posons  $\Pi^a = \cup_{t>0} \Pi_t^a$ , où  $\Pi_t^a \subset \Pi_t$  désigne l'ensemble de points absolument périodiques ayant période  $t$ . Alors on obtient le résultat suivant.

**Proposition 7.**— On a

$$\begin{aligned}
& \int \int (1 - \phi(t)) \hat{\rho}(\delta t) e^{i\lambda t} \partial_t E(t, x, x) dt dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\Pi^a} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\rho}(k\delta T(\nu)) \cos(k(\lambda T(\nu) + q(\nu))) d\nu \lambda^{n-1} \\
&\quad + o(\lambda^{n-1}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \tag{20}
\end{aligned}$$

où  $o(\lambda^{n-1})$  ne dépend pas de  $\delta \in (0, 1)$ .

Pour démontrer cette proposition comme dans [4], [15] on construit une paramétrix globale pour  $E(t, x, y)$  et on utilise le fait que  $\mu_{\Sigma}(\Pi) = \mu_{\Sigma}(\Pi^a)$ ,  $\mu_{\Sigma}$  étant la mesure induite sur  $\Sigma$ . Cela permet de calculer les singularités associées aux périodes de trajectoires absolument périodiques. Pour terminer la démonstration du théorème 1 on utilise (12), (13) et (20) et l'argument de Safarov [15].

**Remarque 8.** Pour la phase de diffusion associée à l'équation des ondes dans l'extérieur d'un obstacle compact  $K$  ayant frontière  $C^{\infty}$  on peut obtenir le même résultat que celui du théorème 1. Pour cela il faut considérer les trajectoires périodiques et réfléchissantes correspondant au flot généralisé de  $\partial_t^2 - \Delta_x$  dans  $\mathbf{R}^n \setminus K$ . D'autre part, dans le cas générique nous avons mes  $\Pi = 0$  (cf. [10]).

#### 4. Démonstration du théorème 2.

Supposons qu'il existe  $\xi > 0$  et deux suites  $\lambda_k \nearrow \infty$  et  $\varepsilon_k \searrow 0$  telles qu'on a (4). D'après (3) on trouve

$$\begin{aligned}
& s(\lambda_k + \frac{2\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}) - s(\lambda_k - \frac{2\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}) \geq \\
& \geq \left[ Q(\lambda_k + \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}) - Q(\lambda_k - \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}}) \right] \lambda_k^{n-1} \\
& - C_2 \varepsilon_k \lambda_k^{n-1} - C_3 \delta_2 \lambda_k^{n-1} \geq \frac{\xi}{2} \lambda_k^{n-1} \tag{21}
\end{aligned}$$

si on prend  $\delta_2$  assez petit et  $k \geq k_0$ ,

Maintenant, supposons qu'il existe  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $\delta$ ,  $|\delta| \leq 1$ , tous les pôles  $z_j$  et  $k_1$  fixé on a  $\lambda_{k_1} \geq 1$  et

$$\left( \operatorname{Re} z_j - (\lambda_{k_1} + \frac{2\delta\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}}) \right)^2 + (\operatorname{Im} z_j)^2 \geq C_0 |z_j|^{-2p}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{ds_1}{d\lambda} \left( \lambda_{k_1} + \frac{2\delta\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}} \right) \right| &\leq \Sigma_j \zeta \left( \frac{|z_j|}{\lambda_{k_1} + \frac{2\delta\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}}} \right) |z_j|^p \\ &\leq C_1 \lambda_{k_1}^{n+p}, \quad \forall \delta, |\delta| \leq 1, \end{aligned}$$

où la constante  $C_1$  ne dépend pas de  $k_1$ . Pour  $k_1 \geq k_0$  nous avons avec une autre constante  $C'_1$  l'estimation

$$\begin{aligned} \left| s \left( \lambda_{k_1} + \frac{2\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}} \right) - s \left( \lambda_{k_1} - \frac{2\varepsilon_{k_1}}{\lambda_{k_1}^{p+1}} \right) \right| \\ \leq 4C'_1 \varepsilon_{k_1} \lambda_{k_1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Prenant  $k_1 \geq k_0$  assez grand on obtient une contradiction avec (21). De telle manière, on trouve  $k_2 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $k \geq k_2$  il existe au moins un pôle  $z_k$  pour lequel

$$\left| z_k - \left( \lambda_k + \frac{2\delta_k \varepsilon_k}{\lambda_k^{p+1}} \right) \right|^2 \leq C_0 |z_k|^{-2p}$$

avec  $|\delta_k| \leq 1$ . On en déduit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - \lambda_k) = 0.$$

Alors il existe  $k_3 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $k \geq k_3$  on a

$$|z_k - \lambda_k|^2 \leq 4C_0 |z_k|^{-2p}.$$

Pour la démonstration de (6) on applique l'argument de [11].

## Bibliographie :

- [1] C. Bardos, J.C. Guillot et J. Ralston, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné, *Comm. in P.D.E.*, 7 (1982), 905-958.
- [2] V. Buslaev, Scattering plane waves, spectral asymptotics and trace formulas in exterior problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 197 (1971), 999-1002.
- [3] C. Gérard, A. Martinez, D. Robert, Breit-Wigner formulas for the scattering phase and total scattering cross-section in the semi-classical limit, *Commun. Math. Phys.*, 121 (1989), 323-336.
- [4] T.E. Gurejev, Yu. Safarov, Precise asymptotics of the spectrum for the Laplace operator on manifolds with periodic geodesics, LOMI preprint E-1-86, Leningrad and *Trans. MIAN URSS*, 179.
- [5] M. Ikawa, Trapping obstacles with a sequence of poles converging to the real axis, *Osaka J. Math.*, 22 (1985), 657-689.
- [6] P. Lax, R. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, 1967.
- [7] A. Majda and J. Ralston, An analogue of Weyl's theorem for unbounded domains, II, *Duke Math. J.* 45 (1978), 513-536 and III, 46 (1979), 725-731.
- [8] R. Melrose, Polynomial bound on the number of scattering poles, *J. Funct. Anal.*, 53 (1983), 287-303.
- [9] R. Melrose, Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattering, *Comm. PDE*, 13 (1988), 1431-1439.
- [10] V. Petkov, L. Stoyanov, On the number of periodic reflecting rays in generic domains, *Erg. Th. Dynam. Systems*, 8 (1988), 81-91.
- [11] V. Petkov, Phase de diffusion pour des perturbations captives, Conférence Saint-Jean-de-Monts, 1990, Société Mathématique de France.
- [12] J. Ralston, Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering matrix, *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 (1971), 571-582.
- [13] D. Robert, Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel, *Asymptotic Analysis* 3 (1991), 301-320.
- [14] D. Robert, Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du Laplacien. preprint, Août 1990.

- [15] Yu Safarov, Asymptotic of the spectrum of pseudo-differential operator with periodic bicharacteristics, Trans. Sci. Seminar LOMI, 152 (1986), 94-104 (In Russian).
- [16] Yu Safarov, Exact asymptotics of the spectrum of a boundary value problem and periodic billiards Izv AN SSSR, Ser. Mat. 52 (1988), 1230-1251. Math. USSR Izvestiya 33 (1989), 553-573.
- [17] J. Sjöstrand, Estimations sur les résonances pour le Laplacien avec une perturbation à support compact, Séminaire EDP, Ecole Polytechnique, 1990-1991.
- [18] J. Sjöstrand, M. Zworski, Complex scaling and the distribution of scattering poles, preprint.
- [19] G. Vodev, Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles for metric perturbations of the Laplacian in  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$  odd, preprint 1990.

V. Petkov  
Département de Mathématiques  
Université de Bordeaux I  
33405 TALENCE