

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

E. ANDRONIKOF

## **Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1990-1991), exp. n° 3,  
p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1990-1991\\_\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A3_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHÉMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

---

## ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

### INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

par E. ANDRONIKOF



# INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

Emmanuel ANDRONIKOF

Université Paris-Nord  
Département de Mathématiques  
F 93430 VILLETANEUSE

## 0 - Introduction

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés analytiques complexes et  $f : Y \rightarrow X$  une application lisse (i.e. une submersion holomorphe),  $S$  une hypersurface complexe de  $Y$ ,  $d = \dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X$ ,  $x_0 \in X$ ,  $U$  un voisinage ouvert de  $S$ . On se donne un  $d$ -cycle relatif  $\gamma_{x_0}$ , représenté par une  $d$ -chaîne dans  $(U \setminus S) \cap f^{-1}(x_0)$  de cobord nul, et une forme holomorphe relative de degré maximal  $d$  définie sur  $U \setminus S$ , éventuellement multiforme. On regarde  $\gamma_{x_0}$  comme le germe d'une famille continue  $\Gamma$  de  $d$ -cycles relatifs définie au voisinage de  $x_0$ , et on considère la fonction  $h := \int_{\gamma} \omega$ , qui est définie sur un voisinage de  $x_0$ . On se propose de montrer le

THÉORÈME 0. — *On fait les hypothèses suivantes :*

$$\begin{cases} U \text{ est sous-analytique,} \\ f \text{ est propre sur } \overline{U}, \\ U \text{ n'a pas de contour apparent dans } X, \\ \omega \text{ est uniforme au voisinage de } \gamma_{x_0}. \end{cases}$$

Alors :

(i)  *$h$  est holomorphe au voisinage de  $x_0$  et il existe un sous-ensemble analytique complexe  $Z$  de codimension  $\geq 1$  dans  $X$  tel que  $h$  se prolonge en fonction holomorphe multiforme sur  $X \setminus Z$ .*

(ii) *Si  $\omega$  est de détermination finie, il en est de même de  $h$ .*

(iii) *Si  $\omega$  est de classe de Nilsson, il en est de même de  $h$ .*

L'ouvert  $U$  étant dit sans contour apparent s'il existe une  $\mu$ -stratification de  $\partial U$  telle que la projection sur  $T^*X$  de la réunion des conormaux aux strates soit incluse dans  $T_X^*X$  (cf. paragraphe 5).

Ce type d'intégrale a une longue histoire, voir par exemple la bibliographie de [A-V-G] et le livre de Pham [P].

Dans le cas algébrique, ce théorème est bien connu : (ii) et (iii) sont démontrés par Nilsson dans [N1] (cf. aussi [N2]), (i) et (ii) par Leray dans [L] où (iii) est d'ailleurs énoncé sous forme de conjecture. Plus précisément on retrouve leurs énoncés en prenant  $X = \mathbb{C}^n$ ,

$Y = X \times \mathbf{P}^d \mathbf{C}$ ,  $f : Y \rightarrow X$  la projection et  $U = X \times (\mathbf{P}^d \mathbf{C} \setminus H_\infty)$ ,  $H_\infty$  étant l'hyperplan à l'infini.

Le propos est ici d'étudier ce type d'intégrale dans un cadre plus général par des techniques différentes de celles de ces auteurs. On s'inspire de Deligne [D] pour interpréter les fonctions multiformes et on utilise, pour (i) et (ii), le morphisme résidu de Leray-Grothendieck et l'analyse microlocale des ensembles sous-analytiques de Kashiwara et Schapira, qui produisent le lieu de ramification  $Z$  de  $h$  comme un contour apparent dont on vérifie qu'il est en fait un ensemble analytique complexe. Pour (iii) on interprète et intègre les fonctions de classe de Nilsson à l'aide du foncteur de cohomologie à croissance de Kashiwara.

Ce qui suit est le résumé d'un article à paraître ([A1]).

## 1 - Notations

Précisons quelques notations pour lesquelles on suivra [K-S].

Les variétés que l'on considèrera seront toujours supposées paracompactes, et une variété complexe sera supposée orientée par le choix de  $\sqrt{-1}$ .

Si  $M$  est une variété analytique réelle on désigne par  $w - \mathbf{R} - c(M)$  (resp.  $\mathbf{R} - c(M)$ ) la catégorie des faisceaux faiblement  $\mathbf{R}$ -constructibles (resp. des faisceaux  $\mathbf{R}$ -constructibles) et, si  $X$  est une variété complexe, on désigne par  $\mathcal{O}_X$  le faisceau structural, par  $\Omega_X$  le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, par  $\bar{X}$  la variété complexe conjuguée, par  $X_{\mathbf{R}}$  la variété réelle sous-jacente et par  $w - \mathbf{C} - c(X)$  (resp.  $\mathbf{C} - c(X)$ ) la catégorie des faisceaux faiblement  $\mathbf{C}$ -constructibles (resp. des faisceaux  $\mathbf{C}$ -constructibles) sur  $X$ . On désigne par  $D^b(M)$  la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de  $\mathbf{C}$ -vectoriels sur  $M$  et par  $D_{w-\mathbf{R}-c}^b(M)$  (resp.  $D_{w-\mathbf{C}-c}^b(M)$ ) la sous-catégorie pleine de  $D^b(M)$  des objets à cohomologie dans  $w - \mathbf{R} - c(M)$  (resp. dans  $\mathbf{R} - c(M)$ ). Définitions analogues de  $D_{w-\mathbf{C}-c}^b(X)$ ,  $D_{\mathbf{C}-c}^b(X)$ .

Une absence d'indice dans un symbole  $\otimes$  ou  $\mathcal{H}om$  sous-entendra que l'anneau de base est  $\mathbf{C}$ .

## 2 - Intégration des fonctions multiformes et prolongement analytique

Soit  $X$  une variété analytique complexe (paracompacte). Rappelons que si  $f \in \mathcal{O}_{X,x}$  est un germe holomorphe en  $x \in X$  tel que  $f$  se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin dans  $X$  issu de  $x$ , alors  $f$  définit (de manière non unique) une section holomorphe globale d'un revêtement universel de  $X$  (le choix de la section dépend du choix d'un point du revêtement qui se projette sur  $x$ ).

Inversement, si  $p : X^* \rightarrow X$  est un revêtement (non ramifié quelconque) et  $f \in \Gamma(X^*; \mathcal{O})$  est donnée, tout choix d'un point  $x^* \in X^*$  définit de manière unique un germe de fonction holomorphe  $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ , où  $x = p(x^*)$ , qui se prolonge holomorphiquement le long de

tout chemin dans  $X$  issu de  $x$  et on dira, comme c'est l'usage, que " $f$  est une fonction holomorphe multiforme définie sur  $X$ ". Remarquons qu'on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X^*; \mathcal{O}_X) \simeq \Gamma(X; \mathcal{H}om(p_* \mathbb{C}_{X^*}, \mathcal{O}_X)).$$

et on pose classiquement la

**DÉFINITION 2.1.** — *On appelle fonction holomorphe multiforme sur  $X$  la donnée de  $f \in \Gamma(X, \mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_X))$ , où  $L$  est un faisceau localement constant sur  $X$ , et on dit que  $f$  est une fonction holomorphe multiforme de détermination finie si de plus  $L$  est un système local (i.e.  $\dim L_x < \infty \quad \forall x \in X$ ).*

Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme lisse de variétés complexes,  $d$  la dimension complexe de la fibre. Un  $d$ -cycle dans  $f^{-1}(x)$ , où  $x \in X$ , est un élément de  $H_d(f^{-1}(x); \mathbb{C}_{f^{-1}(x)}) \simeq H_c^d(f^{-1}(x); \mathbb{C}_{f^{-1}(x)}) = H^d(Rf_* \mathbb{C}_Y)_x$ . Par (famille continue) de  $d$ -cycle(s) relatif(s) sur  $X$ , on entend une section globale  $\gamma \in \Gamma(X; H^d(Rf_* \mathbb{C}_Y))$ .

Soit  $j : U \hookrightarrow Y$  l'immersion d'un ouvert de  $Y$ . On note  $\tilde{f} = f \circ j$ .

On a un morphisme canonique

$$\Gamma(X; H^d(Rf_* \mathbb{C}_U)) \rightarrow \Gamma(X; H^d(Rf_* \mathbb{C}_Y)),$$

et si un cycle  $\gamma$  est dans l'image de ce morphisme on dira que  $\gamma$  est traçable dans  $U$ . On désigne par  $\Omega_{Y/X}$  le faisceau sur  $Y$  des formes relatives de degré maximum  $d$ . Vu les notations précédentes une forme holomorphe multiforme de degré maximum définie dans  $U$  est une section  $\omega \in \Gamma(U; \mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X})) = \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_* L, \Omega_{Y/X}))$ .

**PROPOSITION 2.2.** — *Soit  $L$  un faisceau localement constant sur  $U$ .*

(i) *On a un morphisme canonique*

$$\Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_* L, \Omega_{Y/X})) \otimes \Gamma(X; H^d(Rf_* \mathbb{C}_U)) \longrightarrow \Gamma(X; \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)),$$

noté  $\omega \otimes \gamma \mapsto \text{Int}_\gamma(\omega)$ .

(ii)  *$\text{Int}_\gamma(\omega)$  est indépendant de l'ouvert  $U$  dans lequel  $\gamma$  est traçable et se calcule fibre à fibre.*

(iii) *Si  $L = \mathbb{C}_U$  (i.e.  $\omega$  est uniforme sur  $U$ ) alors  $\iota \text{Int}_\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega$ .*

On a désigné par  $\iota : \Gamma(X; \mathcal{H}om(\tilde{f}_* \mathbb{C}_U, \mathcal{O}_X)) \rightarrow \Gamma(X; \mathcal{O}_X)$  le morphisme induit par  $\mathbb{C}_X \rightarrow \tilde{f}_* \mathbb{C}_U$ .

La proposition se déduit d'opérations standard sur les faisceaux en utilisant le morphisme résidu de Leray-Grothendieck

$$Rf_* \Omega_{Y/X}[d] \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Dans la situation du théorème 0 on se fixe une forme  $\omega \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_!L, \Omega_{Y/X}))$  et on veut prolonger  $\int_\gamma \omega$  à partir d'un germe de  $d$ -cycle : le prolongement analytique le long des cycles relatifs va être le morphisme de faisceaux  $\text{Int}(\omega)$  sur  $X$  défini de la manière suivante :

pour tout ouvert  $V$  de  $X$ , appliquant la proposition précédente à  $f^{-1}(V)$  au lieu de  $Y$  on obtient un morphisme

$$\Gamma(V; H^d(Rf_! \mathbb{C}_U)) \rightarrow \Gamma(V; \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)),$$

et ce morphisme est compatible aux restrictions, i.e. on a un morphisme de faisceaux sur  $X$

$$(2.1) \quad \text{Int}(\omega) : H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \rightarrow \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X),$$

et on identifie  $\text{Int}(\omega)$  à un élément de

$$(2.2) \quad \text{Hom}(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U), \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)) \simeq \Gamma(X; \mathcal{H}om(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)).$$

Remarquons que ce morphisme est défini indépendamment de toute hypothèse de propreté et que de la proposition on tire la conclusion suivante :

soit  $V$  un ouvert de  $X$  tel que

$$\begin{cases} 1) & H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L \text{ est un faisceau localement constant sur } V, \\ 2) & x_0 \in V, \quad \gamma_{x_0} \text{ est traçable dans } U \text{ et } \omega \text{ est uniforme au voisinage de } \gamma_{x_0}, \end{cases}$$

alors  $h := \int_\gamma \omega$  se prolonge en la fonction holomorphe multiforme sur  $V$  donnée par la restriction de  $\text{Int}(\omega)$  à  $V$ .

La géométrie microlocale assurera l'existence et le contrôle de tels ouverts dans le cas propre sur  $\bar{U}$ , mais auparavant on construit un formalisme qui rend compte des conditions de croissance.

### 3 - Fonctions holomorphes à croissance et foncteur RH de Kashiwara

Soit  $M$  une variété analytique réelle (paracompacte),  $\mathcal{D}b_M$  le faisceau des distributions sur  $M$ . Pour tout faisceau  $\mathbf{R}$ -constructible  $F$  sur  $M$ , Kashiwara ([K1], [K2]) a défini le sous faisceau  $T\text{-}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$  des sections modérées de  $\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$ , noté également  $TH_M(F)$ , qui est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} TH_M(\mathbb{C}_M) = \mathcal{D}b_M, \\ \forall Z \text{ fermé sous-analytique } TH_M(F_Z) = \Gamma_Z TH_M(F), \\ TH_M(\bullet) : \mathbf{R}\text{-}c(M) \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{D}_M) \text{ est un foncteur exact,} \end{cases}$$

où  $\mathcal{D}_M$  désigne le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur  $M$ . En particulier, pour tout ouvert sous-analytique  $U \subset M$  et tout ouvert  $\Omega \subset M$  on a  $\Gamma(\Omega; TH_M(\mathbb{C}_U)) = S'_\Omega(\Omega \cap U)$ , où  $S'_\Omega(\Omega \cap U)$  désigne le sous espace de  $\mathcal{D}b_M(\Omega \cap U)$  des distributions prolongeables à  $\Omega$ .

On note encore  $TH_M(\bullet) : D_{\mathbf{R}\text{-}c}^b(M) \simeq D^b(\mathbf{R}\text{-}c(M)) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_M)$  le foncteur dérivé du

précédent, où  $D^b(\mathcal{D}_M)$  désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de  $\mathcal{D}_M$ -Modules.

Soit maintenant  $X$  une variété analytique complexe,  $\mathcal{D}_X$  le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. On pose (Kashiwara, loc. cit.), pour  $F \in \text{Ob}(D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}}))$ ,

$$RH_X(F) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)).$$

D'où un foncteur (contravariant) de catégories triangulées

$$RH_X(\cdot) : D_{\mathbb{R}-c}^b(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$$

où  $D^b(\mathcal{D}_X)$  désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de  $\mathcal{D}_X$ -modules. Alors, si  $Y$  est un sous-ensemble analytique complexe fermé de  $X$ , on a

$$RH_X(\mathbf{C}_Y) = R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X$$

où  $R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X = R\varinjlim^k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{O}_X)$ ,  $\mathcal{I}_Y$  étant un idéal de définition de  $Y$  dans  $X$ . En particulier si  $Y$  est une hypersurface de complémentaire  $U = X \setminus Y$  on a

$$RH_X(\mathbf{C}_U) \simeq \mathcal{O}_X[*Y],$$

le faisceau des fonctions méromorphes à pôles sur  $Y$  (cf. [K2]).

On aura besoin de caractériser la croissance au bord d'ouverts sous-analytiques. Rappelons qu'une fonction continue  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $X$  est dite à croissance lente (ou modérée) en  $x_0 \in \partial U$  s'il existe  $\nu > 0$  t.q.  $d(x, \partial U)^\nu f(x)$  reste borné quand  $x \rightarrow x_0$  dans  $U$ ,  $d$  étant la distance euclidienne lue dans une carte en  $x_0$ . L'énoncé suivant généralise une proposition de Martineau [M].

**PROPOSITION 3.1.** — *Soit  $U$  un ouvert sous-analytique de  $X$ . Pour tout ouvert  $\Omega \subset X$  on a :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\Omega; H^0 RH_X(\mathbf{C}_U)) = \\ \{f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{O}_X); f \text{ est à croissance lente en tout point de } \partial U \cap \Omega\} = \\ \{f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{O}_X); f \text{ est prolongeable en distribution à } \Omega \cap U\}. \end{array} \right.$$

Signalons que les foncteurs  $TH$  et  $RH$  ont été micolocalisés dans [A2].



#### 4 - Intégration des fonctions de classe de Nilsson et prolongement analytique

Notons comme plus haut  $Y$  une variété analytique complexe et  $j : U \hookrightarrow Y$  l'immersion d'un ouvert sous-analytique,  $U$  connexe. Soit  $p : U^* \rightarrow U$  un revêtement universel de  $U$ . Paraphrasant Deligne (loc. cit.) dans le cadre sous-analytique, on dira qu'une fonction holomorphe multiforme  $f$  sur  $U$  est de classe de Nilsson ssi

$$\begin{cases} f \text{ est de détermination finie et} \\ \text{pour toute partie d'argument borné } P \subset U^* \text{ il existe } \nu > 0 \text{ t.q.} \\ f(x) = O(\varphi(p(x))^\nu) \text{ sur } P, \text{ où } \varphi \text{ est une norme adaptée à } \partial U. \end{cases}$$

Une partie d'argument borné étant ici par définition l'analogue de ce que Deligne appelle "partie verticale" (loc. cit.). Rappelons qu'il suffit dans la définition précédente de se borner aux  $P$  qui sont des relèvements des simplexes d'une triangulation sous-analytique de  $\bar{U}$  qui induit une triangulation sous-analytique de  $\partial U$ . Une norme adaptée à  $\partial U$  est une fonction continue  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  astreinte à vérifier localement sur  $\partial U$  une inégalité de la forme

$$c_1 d(x, \partial U)^{\alpha_1} \leq (1 + \varphi(x))^{-1} \leq c_2 d(x, \partial U)^{\alpha_2} \quad (c_j, \alpha_j > 0).$$

De la proposition 3.1 et du théorème de rectilinéarisation de Hironaka on déduit la

**PROPOSITION 4.2.** — *Soit  $L$  un système local sur  $U$  et  $f \in \Gamma(Y; \text{Hom}(j_! L, \mathcal{O}_Y))$  une fonction holomorphe multiforme de détermination finie sur  $U$ . Alors  $f$  est de classe de Nilsson si et seulement si  $f \in \Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_! L))$ .*

On a alors

**PROPOSITION 4.3.** — *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2 où l'on suppose de plus que*

$$\begin{cases} U \text{ est sous-analytique} \\ f \text{ est propre sur } \bar{U} \end{cases}$$

*Alors le morphisme donné par (i), Proposition 2.2 induit le morphisme*

$$\Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}) \otimes \Gamma(X; H^d(Rf_! \mathbb{C}_U)) \rightarrow \Gamma(X; H^0 RH_X(\tilde{f}_* L)).$$

La proposition résulte du théorème d'intégration de Kashiwara :

**THÉORÈME** (Kashiwara, loc. cit.). — *Soit  $F \in \text{Ob}(D_{\mathbb{R}-c}^b(Y_{\mathbb{R}}))$  telle que  $f$  soit propre sur  $\text{supp}(F)$ . On a un isomorphisme canonique :*

$$Rf_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y}^L RH_Y(F))[\dim_{\mathbb{C}} Y] \xrightarrow{\sim} RH_X(Rf_* F)[\dim_{\mathbb{C}} X]$$

Du même théorème on tire que si  $\omega \in \Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_!L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X})$  est de classe de Nilsson alors le morphisme de prolongement analytique le long des cycles (2.1) qui, vu la proposition 4.3, induit le morphisme

$$\text{Int}(\omega) : H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \rightarrow H^0 RH_X(\tilde{f}_* L),$$

définit en fait un élément

$$(4.1) \quad \text{Int}(\omega) \in \Gamma(X; H^0 RH_X(H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L)).$$

## 5 - Utilisation de la géométrie microlocale

On rappelle ci-dessous quelques définitions et résultats de [K-S] que la démonstration du théorème 0 va utiliser.

Soit  $X$  une variété complexe,  $\pi : T^*X \rightarrow X$  le fibré cotangent et  $\overset{\circ}{\pi}$  la restriction de  $\pi$  à  $T^*X \setminus T_X^*X$ . On identifie comme d'habitude  $(T^*X)_{\mathbf{R}}$  à  $T^*(X_{\mathbf{R}})$  en identifiant la 1-forme canonique de  $T^*(X_{\mathbf{R}})$  à la partie réelle de la 1-forme canonique de  $T^*X$ .

Rappelons que si  $F$  est un (complexe de) faisceau(x) sur  $X$ , le micro-suppport  $SS(F)$  de  $F$  est un ensemble conique fermé involutif dans  $T^*X_{\mathbf{R}}$  et que l'on a

$$\left\{ \begin{array}{l} (F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{w}-\mathbf{R}-c}^b(X))) \iff \\ (SS(F) \text{ est inclus dans un ensemble conique fermé sous-analytique} \\ \mathbf{R} - \text{isotrope de } T^*X), \\ (F \in \text{Ob}(D_{\mathbf{w}-\mathbf{C}-c}^b(X))) \iff \\ (SS(F) \text{ est inclus dans un ensemble conique fermé analytique} \\ \mathbf{C} - \text{isotrope de } T^*X) \\ F \text{ est un faisceau localement constant} \iff (SS(F) \subset T_X^*X). \end{array} \right.$$

Soit  $Y$  une autre variété complexe et  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme lisse.

On désigne par  $\rho$  et  $\tilde{\omega}$  les applications canoniques associées

$$T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \times_X T^*X \xrightarrow{\tilde{\omega}} T^*X,$$

(ici  $\rho$  est une immersion fermée).

Soit  $j : U \hookrightarrow Y$  l'immersion d'un ouvert sous-analytique connexe de  $Y$ ,  $S = \partial U$  et  $\tilde{f} = f \circ j$ . On fait l'hypothèse que  $f$  est propre sur  $\overline{U}$ . Soit  $L$  un faisceau localement constant sur  $U$ . Comme  $\tilde{\omega}$  est propre sur  $\overline{U} \times_X T^*X$ , on a par [K-S] :

$$SS(R\tilde{f}_* L) \subset \tilde{\omega}\rho^{-1}(SS(Rj_* L)).$$

Soit d'autre part  $\mathcal{S}$  une  $\mu$ -stratification (sous-analytique) de  $\overline{U}$  ([K-S]) qui induise une stratification de  $\partial U$  et désignons par  $\Lambda(\mathcal{S})$  la réunion des conormaux aux strates. On sait alors ([K-S]) que  $\Lambda(\mathcal{S})$  est fermé conique et  $\mathbf{R}$ -isotrope (resp.  $\mathbf{C}$ -isotrope si les strates sont des ensembles analytiques complexes), et on a

$$SS(Rj_* L) \subset \Lambda(\mathcal{S}).$$

Enfin rappelons que pour tout ensemble  $\Lambda \subset T^*Y$  qui est conique et  $\mathbf{R}$ -isotrope (resp.  $\mathbf{C}$ -isotrope) tel que  $\tilde{\omega}$  est propre sur  $\rho^{-1}(\Lambda)$ , on a

$$\tilde{\omega}\rho^{-1}(\Lambda) \text{ est conique et } \mathbf{R} - \text{isotrope (resp. } \mathbf{C} - \text{isotrope)}.$$

## 6 - Démonstration du théorème 0

Soit  $L$  un faisceau localement constant sur  $U \setminus S$  tel que  $\omega \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_!L, \Omega_{Y/X}))$  où  $j : U \setminus S \hookrightarrow Y$ . Choisissons une  $\mu$ -stratification à strates complexes  $\mathcal{S}_0$  de  $S$  (e.g. une stratification de Whitney complexe) et posons

$$Z = \overset{\circ}{\pi} \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_0)).$$

C'est un sous-ensemble analytique complexe de codimension  $\geq 1$  de  $X$ .

Par hypothèse il existe une  $\mu$ -stratification (à strates sous-analytiques)  $\mathcal{S}_\infty$  de  $\partial U$  telle que

$$\overset{\circ}{\pi} \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_\infty)) \subset T_X^* X.$$

Posons  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{U \setminus S\} \cup \mathcal{S}_\infty$ . Alors  $\mathcal{S}$  est une  $\mu$ -stratification de  $U \setminus S$  qui induit une stratification de  $\partial(U \setminus S) = (\partial U) \cup S$  et, comme

$$\tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S})) \subset T_X^* X \cup \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_0)),$$

il résulte du paragraphe 5 que l'on a

$$SS(H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L) \subset T_X^* X \cup \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_0)),$$

en particulier on a

$$SS(H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L) \cap \pi^{-1}(X \setminus Z) \subset T_X^* X.$$

On en tire :

$$\begin{cases} H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L \in w - \mathbf{C} - c(X) & \text{et} \\ H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L|_{X \setminus Z} & \text{est un faisceau localement constant.} \end{cases}$$

La restriction de  $\text{Int}(\omega) \in \Gamma(X; \mathcal{H}om(H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X))$  à  $X \setminus Z$  est donc une fonction holomorphe multiforme.

D'autre part on a  $h = \int_\gamma \omega = \text{Int}(\omega)$  au voisinage de  $x_0$ , et, comme  $Z$  est de codimension  $\geq 1$ , on peut supposer que  $x_0 \notin Z$ . On en déduit que  $h$  est holomorphe (uniforme) au voisinage de  $x_0$  et coïncide avec une détermination de  $\text{Int}(\omega)|_{X \setminus Z}$ .

Ce qui achève de prouver (i).

Si  $L$  est un système local on a aussitôt

$$\begin{cases} H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L \in \mathbf{C} - c(X) & \text{et} \\ (H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L)|_{X \setminus Z} & \text{est un système local,} \end{cases}$$

d'où (ii).

Si de plus  $\omega \in \Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_!L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X})$  est de classe de Nilsson, (iii) résulte de ce qui précède et de (4.1).

### Remarque :

(i) Si  $\omega$  est de classe de Nilsson, ce qui précède a exhibé le module holonôme régulier  $\mathcal{M} := H^0 RH_X(H^d(Rf_! \mathbf{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L)$  qui est une connexion sur  $X \setminus Z$  et  $h$  se prolonge en section globale sur  $X$  de  $\mathcal{M}$ .

(ii) Dans [A1] on traite des situations plus générales : hypothèses plus locales sur  $S$  et généralisation à des cycles qui sont eux-mêmes multiformes.

## Bibliographie

- [A1] Andronikof, E. : *Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles*. Article à paraître.
- [A2] Andronikof, E. : *Microlocalisation tempérée. Application aux distributions holonomes sur une variété complexe*. Ce Séminaire, 1987-88, exposé II.
- [A-V-G] Arnold, V., Varchenko, A., Goussein-Zadé, S. : *Singularités des applications différentiables. Tome 2 : Monodromie et comportement asymptotiques des intégrales*. Ed. Mir. Moscou (1984).
- [D] Deligne, P. : *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lect. Notes in Math. 163, Springer (1970).
- [K1] Kashiwara, M. : *Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations différentielles à points singuliers réguliers*. Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-80, exposé XIX.
- [K2] Kashiwara, M. : *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*. Publ. R.I.M.S. 20, 319-365 (1984).
- [K-S] Kashiwara, M., Schapira, P. : *Sheaves on Manifolds*. Grund. der Math. Wiss., 292, Springer (1990).
- [L] Leray, J. : *Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique*. Bull. Soc. Math. France, 95, 313-374 (1967).
- [M] Martineau, A. : *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, in Proc. Int. Summer Inst. Lisbon (1964).
- [N1] Nilsson, N. : *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds*. Ark. for Math., 5, 463-476 (1965).
- [N2] Nilsson, N. : *Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals*. Ark. for Math. 18, 181-198 (1980).
- [P] Pham, F. : *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*. Birkhäuser (1981).

E. ANDRONIKOF  
Université Paris-Nord  
Département de Mathématiques  
F - 93430 VILLETANEUSE



## ERRATUM EXPOSÉ III

### INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

Paragraphe 0 (Notations), ligne 12,  
au lieu de :

$$(resp. D_{w-\mathbf{R}-c}^b(M))$$

lire :

$$(resp. D_{\mathbf{R}-c}^b(M))$$

Paragraphe 6 (Démonstration du théorème 0), ligne 9,  
au lieu de :

$$\overset{\circ}{\pi} \tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_{\infty})) \subset T_X^* X$$

lire :

$$\tilde{\omega} \rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}_{\infty})) \subset T_X^* X$$