

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C.-J. XU

Application équilibre d'un espace homogène dans une variété riemannienne

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 14,
p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995__A14_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

APPLICATION EQUILIBRE D'UN ESPACE HOMOGENE DANS UNE VARIETE RIEMANNIENNE

C.-J. XU

Application Equilibre D'un Espace Homogène Dans Une Variété Riemannienne

Chao-Jiang XU

1 Position du problème

Cet exposé est un travail réalisé en collaboration avec Jürgen JOST, pour le détail on renvoie le lecteur à [9].

Soit $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ un système de champs de vecteurs réels C^∞ défini sur $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Supposons que X_1, \dots, X_m satisfont la condition de Hörmander (H):

X_1, \dots, X_m et leurs commutateurs de longueur inférieure à r engendrent l'espace tangent de $\tilde{\Omega}$.

Comme dans [10], on peut définir sur $\tilde{\Omega}$ une structure homogène associée au système de champs de vecteurs X_1, \dots, X_m , c'est-à-dire une distance $\rho(\cdot, \cdot)$ et une famille de boules $B(x, \delta) = \{y \in \tilde{\Omega}; \rho(x, y) < \delta\}$. Pour cette géométrie, l'opérateur de Hörmander $H = \sum_{j=1}^m X_j^* X_j$ va jouer le rôle de Laplacien. On a en effet, $H = -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} a^{ij}(x) \partial_{x_j}$, où $(a^{ij}(x))$ est une matrice semi-définie positive. Pour $\varepsilon > 0$, pose $(a_{ij}^\varepsilon(x)) = (a^{ij}(x) + \varepsilon \delta_{ij})^{-1}$; cette matrice peut être considérée comme un tenseur de métrique riemannienne sur $\tilde{\Omega}$. Si $d_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est la distance géodésique de cette métrique, on a $\rho(\cdot, \cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ (voir [3]). Donc l'espace homogène $(\tilde{\Omega}, \rho)$ est la limite d'une famille de variétés riemanniennes $(\tilde{\Omega}, d_\varepsilon)$.

Soit Y une variété riemannienne complète de dimension $N \geq 2$; bien que ce ne soit pas nécessaire, on supposera ici, pour simplifier que Y peut être recouverte par une seule carte. on notera le tenseur de métrique par $(g_{\alpha\beta}(u))$. Pour $\Omega \subset \subset \tilde{\Omega}$, on considère $u : (\Omega, d_\varepsilon) \rightarrow Y$. La densité d'énergie de u est

$$e_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \sum_{ij\alpha\beta} (a^{ij}(x) + \varepsilon \delta_{ij}) g_{\alpha\beta}(u) \partial_{x_i} u^\alpha \partial_{x_j} u^\beta,$$

et l'énergie $E_\varepsilon(u) = \int_\Omega e_\varepsilon(u) dx$. Comme $E_{\varepsilon_1}(u) \leq E_{\varepsilon_2}(u)$, $\forall \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, on peut faire tendre ε vers 0 pour de "bonnes" applications u , et définir raisonnablement l'énergie de l'application $u : (\Omega, \rho) \rightarrow Y$ par

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha\beta=1}^N g_{\alpha\beta}(u) X_j u^\alpha X_j u^\beta. \quad (1)$$

Une solution du problème variationnel pour la fonctionnelle (1) est appelée application équilibre de l'espace homogène (Ω, ρ) dans la variété riemannienne Y . Le système d'Euler-Lagrange de (1) est un système semilinéaire elliptique dégénéré du second ordre:

$$H u^\alpha + \sum_{j=1}^m \sum_{\beta\gamma=1}^N \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u) X_j u^\beta X_j u^\gamma = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (2)$$

où $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u)$ est le symbole de Christoffel de Y , H l'opérateur de Hörmander.

Nous allons étudier l'existence de solution faible et la C^α régularité des solutions du problème variationnel associé à (1) pour un $\alpha > 0$. La régularité d'ordre supérieur fera l'objet d'un travail ultérieur.

2 Notations et résultats préliminaires

On rappelle ici quelques propriétés de la géométrie associée au système de champs de vecteurs X_1, \dots, X_m . La condition de Hörmander implique que, la distance $\rho(\cdot, \cdot)$ définie par le système X_1, \dots, X_m satisfait les propriétés suivantes:

$$C_1|x - y| \leq \rho(x, y) \leq C_2|x - y|^{1/r}; \quad (3)$$

$$|B(x, 2\delta)| \leq C|B(x, \delta)|, \quad (4)$$

pour $|x - y| \ll 1$, et $\delta > 0$ petit. On définit maintenant un espace de Sobolev associé au système de champs de vecteurs X_1, \dots, X_m , pour $k \geq 1$,

$$M^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); X^J f \in L^2(\Omega), \forall |J| \leq k\}, \quad (5)$$

où $J = (j_1, \dots, j_s)$, $1 \leq j_l \leq m$, $|J| = s$, $X^J f = X_{j_1} \dots X_{j_s} f$. $M^k(\Omega)$ est un espace hilbertien et on note $M_0^k(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $M^k(\Omega)$. On a les inégalités de Poincaré pour le système de champs de vecteurs de Hörmander.

Lemme 1 *Supposons que $\partial\Omega$ est C^∞ et non caractéristique par rapport au système de champs de vecteurs X_1, \dots, X_m , on a les résultats suivants:*

i) Il existe une constante C telle que, pour tout $\varphi \in M_0^1(\Omega)$, on a

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|X\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (6)$$

où on a noté $\|X\varphi\|_{L^2(\Omega)} = [\sum_{j=1}^m \|X_j\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2]^{1/2}$.

ii) Il existe $R_0 > 0, C(R_0) > 0$, tels que pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}, 0 < R \leq R_0$, et tout $\varphi \in M_0^1(B(x_0, R))$, on a

$$\|\varphi\|_{L^2(B(x_0, R))} \leq C(R_0)R\|X\varphi\|_{L^2(B(x_0, R))}. \quad (7)$$

iii) Il existe $R_0 > 0, C(R_0) > 0$, tels que pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}, 0 < R \leq R_0$, et tout $u \in M^1(B(x_0, R))$, on a

$$\|u - \bar{u}_R\|_{L^2(B(x_0, R))} \leq C(R_0)R\|Xu\|_{L^2(B(x_0, R))}, \quad (8)$$

où $\bar{u}_R = |B(x_0, R)|^{-1} \int_{B(x_0, R)} u(x) dx = \int_{B(x_0, R)} u(x) dx$.

i) est une conséquence immédiate du principe du maximum de Bony [1]. ii) est donné par l'inégalité classique de Poincaré, parce que quel que soit $x_0 \in \bar{\Omega}$, il existe au moins un champ de vecteurs qui est non nul en x_0 , et par un changement de variable, on peut supposer que ce champ est ∂_{x_j} , ce qui donne immédiatement (7). iii) est le Théorème de D. Jerison [6], avec la même démonstration, on obtient aussi l'inégalité suivante:

$$\|u - \tilde{u}_R\|_{L^2(T_R)} \leq C(R_0)R\|Xu\|_{L^2(T_R)}, \quad (9)$$

où $\tilde{u}_R = \int_{T_R} u(x) dx$, $T_R = B(x_0, 2R) \setminus B(x_0, R)$.

Pour la fonction de Green de l'opérateur de Hörmander sur le domaine Ω , on a les estimations suivantes (voir [10, 12]): pour tout $x, y \in \Omega' \subset\subset \Omega$, il existe $c_1(\Omega'), c_2(\Omega') > 0$ tels que

$$G(x, y) \leq c_1 \rho(x, y)^2 |B(x, \rho(x, y))|^{-1}; \quad (10)$$

$$G(x, y) \geq c_2 \rho(x, y)^2 |B(x, \rho(x, y))|^{-1}. \quad (11)$$

On peut aussi disposer de fonctions de troncature bien adaptées aux champs de vecteurs et à la distance $\rho(\cdot, \cdot)$ (voir [14]): il existe $R_0 > 0$, tel que pour tout $0 < R \leq R_0$, tout $K \subset \Omega$, $K_R = \{y \in \bar{\Omega}, \rho(x, y) < R, x \in K\} \subset \Omega$, il existe alors des fonctions $\varphi_R \in C_0^\infty(K_R)$, $\varphi_R(x) = 1$, si $x \in K$, et $|X^J \varphi_R| \leq C_J R^{-|J|}$. On a aussi, pour $0 < R \leq R_0$, $\alpha > 0$,

$$\int_{B(x_0, R)} \rho(x_0, y)^\alpha |B(x_0, \rho(x_0, y))|^{-1} dy \leq C R^\alpha. \quad (12)$$

On peut dire que qu'en substituant les champs de vecteurs aux dérivées, la distance $\rho(\cdot, \cdot)$ à la distance euclidienne, les propriétés de l'espace homogène (Ω, ρ) sont analogues à celles d'une variété riemannienne.

3 Existence d'applications équilibre faibles

Comme la variété riemannienne Y est recouverte par une seule carte, on peut identifier l'espace $M^1(\Omega; Y)$ à $M^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. On suppose que Y satisfait l'hypothèse suivante: Pour $P \in Y$, et tout $M > 0$, $u \in B_Y(P, M)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, (quand on identifie $M^1(\Omega; Y)$ à $M^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on prend $P = 0$),

$$\lambda(M) |\xi|^2 \leq g_{\alpha\beta}(u) \xi^\alpha \xi^\beta \leq \Lambda(M) |\xi|^2, \quad (13)$$

$$\left\{ \sum |\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u) \xi^\beta \xi^\gamma|^2 \right\}^{1/2} \leq C_\Gamma(M) |\xi|^2. \quad (14)$$

On note χ un majorant de la courbure sectionnelle de Y . On a alors le résultat suivant.

Théorème 2 Soient $M' < \pi/(2\sqrt{\chi})$, $\Phi \in C^1(\bar{\Omega}; Y)$, avec $\Phi(\partial\Omega) \subset B_Y(P, M')$. Alors, il existe $u \in M^1 \cap L^\infty(\Omega; Y)$ minimisant la fonctionnelle $E(v)$ dans $K \cap B_Y(P, M')$, où

$$K = \{f \in M^1 \cap L^\infty(\Omega; Y); f - \Phi \in M_0^1(\Omega; Y)\}. \quad (15)$$

Démonstration: Comme $E(\cdot)$ est une intégrale de Dirichlet positive sur $B_Y(P, M') \cap K$, alors $E(\cdot)$ est semi-continue inférieurement. Par définition de la norme dans $M^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a pour $u \in K \cap B_Y(P, M')$,

$$\|u\|_{M^1}^2 \leq |\Omega|(M')^2 + \lambda^{-1} E(u).$$

Donc la suite minimisante de $E(v)$ reste bornée dans $M^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Il existe alors une sous-suite qui converge faiblement vers un élément $u \in B_Y(P, M') \cap K$. La semi-continuité de $E(\cdot)$ entraîne que u minimise $E(\cdot)$ dans $B_Y(P, M') \cap K$.

Lemme 3 Supposons que $\Phi(\partial\Omega) \subset B_Y(P, M)$ pour un $M < M'$, alors la solution faible du théorème 2 vérifié $u(\bar{\Omega}) \subset B_Y(P, M)$, et satisfait,

$$\int_\Omega \sum X_j u^\alpha X_j \psi^\alpha + \int_\Omega \sum \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u) X_j u^\beta X_j u^\gamma \psi^\alpha = 0, \quad (16)$$

pour tout $\psi \in M_0^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$

Démonstration: Soit $\eta \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, $\eta \geq 0$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a $|u - \varepsilon\eta u| = |1 - \varepsilon\eta||u| \leq M'$, donc $u - \varepsilon\eta u \in K \cap B_Y(P, M')$ peut être considéré comme une variation de u dans $K \cap B_Y(P, M')$. Des calculs standard montrent qu'on a

$$\int_{\Omega} g_{\alpha\beta}(u) \left[X_j u^\alpha X_j(\eta u^\beta) + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha(u) X_j u^\beta X_j u^\delta(\eta u^\gamma) \right] \leq 0. \quad (17)$$

En utilisant Lemme de Gauss, $g_{\alpha\beta}(u)u^\beta = u^\alpha$, et la propriété des symboles de Christoffel de Y , (17) entraîne:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^m X_j |u|^2 X_j \eta dx \leq 0, \quad (18)$$

c'est-à-dire que $|u|^2 \in M^1 \cap L^\infty(\Omega)$ est une sous-solution de l'équation $Hv = 0$ sur Ω . Le principe du maximum donne (voir [2]),

$$\sup_{\Omega} |u|^2 \leq \sup_{\partial\Omega} |u|^2 = \sup_{\partial\Omega} |\Phi|^2 \leq M^2.$$

On a donc démontré $u(\bar{\Omega}) \subset B_Y(P, M)$. Maintenant, pour tout $\psi \in M_0^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $u \pm \varepsilon\psi \in B_Y(P, M')$ peut être considéré comme variation de u , des calculs comme ceux de (17) donnera (16). Ce qui termine la démonstration du lemme.

4 Régularité des solutions faibles

Nous démontrons maintenant la régularité de solutions faibles. On va utiliser la fonction de Green modifiée, pour $y \in \Omega$, $\sigma > 0$ suffisamment petit, on pose

$$G_y^\sigma(x) = \int_{B(y,\sigma)} G(x, z) dz, \quad (19)$$

où $G(x, z)$ est la fonction de Green de l'opérateur H sur Ω (voir [1, 2]). Alors $G_y^\sigma \in M_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} G_y^\sigma(x) = G(x, y)$, et pour $\zeta \in M_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^m X_j G_y^\sigma(x) X_j \zeta(x) dx = \int_{B(y,\sigma)} \zeta(x) dx. \quad (20)$$

Si \tilde{G} est la fonction de Green de H sur $\tilde{\Omega} \supset \supset \Omega$, on a, en utilisant le principe du maximum, que $G_y^\sigma \leq \tilde{G}_y^\sigma$ sur Ω . Il s'ensuit une estimation pour $G(x, y)$ du type de (10) sur $\bar{\Omega}$.

Pour une sur-solution non négative de l'équation $Hv = 0$ sur $B(x_0, 2R)$, on a aussi l'inégalité de Harnack suivante:

$$\int_{B(x_0, 2R)} v(x) dx \leq C \inf_{B(x_0, R)} v. \quad (21)$$

où la constante C ne dépend pas de R (voir [13]). En utilisant les estimations (10), (11) et (12), pour $w \in M_0^1(B(x_0, 2R))$ solution de l'équation $Hw = R^{-2}$ sur $B(x_0, 2R)$, on a alors

$$0 < a_1 \leq \min_{B(x_0, R)} w \leq \max_{B(x_0, 2R)} w \leq a_2, \quad (22)$$

où a_1, a_2 ne dépendent pas de R .

Pour simplifier les notations, on suppose de plus que le symbole de Christoffel de Y satisfait l'hypothèse suivante:

$$2C_\Gamma(M)M < 1. \quad (23)$$

Lemme 4 Soient $u \in M^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ une solution faible de (16). $B(x_0, 2R) \subset \Omega$, supposons qu'on a (23), il existe alors une constante C qui ne dépend pas de R , telle que

$$R^2 \int_{B(x_0, R)} |Xu|^2 dx \leq C. \quad (24)$$

De plus, quels que soient $\varepsilon > 0, R_1 > 0$, il existe $0 < R_2 \leq R_1$. tel que

$$R_2^2 \int_{B(x_0, R_2)} |Xu|^2 dx \leq \varepsilon. \quad (25)$$

Donc $u \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Démonstration: Le point essentiel est de bien choisir la fonction-test dans (16). On prend $\zeta \in C_0^\infty(B(x_0, 2R)), \zeta \geq 0$, alors $\eta = \zeta u \in M_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ peut être choisie comme fonction-test dans (16). En utilisant (14) et (23), on a

$$(1 - C_\Gamma(M)M) \int_{B_{2R}} \zeta |Xu|^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j |u|^2 X_j \zeta dx. \quad (26)$$

Posons $M(t) = \sup_{B_t(x_0)} |u|$, et $z(x) = M^2(2R) - |u(x)|^2$, alors z est une sur-solution non négative de l'équation $Hv = 0$ sur $B(x_0, 2R)$, (21) entraîne

$$\int_{B_{2R}} z(x) dx \leq C \inf_{B_R} z. \quad (27)$$

Maintenant, pour $w \in M_0^1(B(x_0, 2R))$, solution de $Hw = R^{-2}$ sur $B(x_0, 2R)$, on a $\varphi = wz \in M_0^1(B(x_0, 2R))$, donc

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j w X_j \varphi dx &= R^{-2} \int_{B_{2R}} wz dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j w^2 X_j z dx + \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m |X_j w|^2 z dx. \end{aligned}$$

Utilisons (22), on obtient alors

$$\frac{1}{2} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j w^2 X_j z dx \leq \frac{a_2}{R^2} \int_{B_{2R}} z dx.$$

Choisissons $\zeta = w^2$ dans (26), les inégalités (22) et (27) donnent

$$R^2 \int_{B_R} |Xu|^2 dx \leq C[M^2(2R) - M^2(R)]. \quad (28)$$

Comme $0 \leq M^2(2R) \leq \sup_\Omega |u|^2 \leq M^2$, on a donc démontré (24). Pour (25), on remarque que

$$\sum_{k=0}^{\infty} [M^2(2^{1-k}R) - M^2(2^{-k}R)] \leq M^2(2R) \leq M^2.$$

Donc quel que soit $\varepsilon > 0, R_1$, il existe k_0 tel que $[M^2(2^{1-k_0}R_1) - M^2(2^{-k_0}R_1)] \leq \varepsilon$. On obtient (25) pour $R_2 = 2^{-k_0}R_1$.

Théorème 5 Soit $u \in M^1 \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ une solution faible de (16). Sous les hypothèses du théorème 2 et (23), on suppose de plus qu'il existe $R_0 > 0, C(R_0) > 0$, tels que pour tout $x_0 \in \partial\Omega, 0 < R \leq R_0$, on ait:

$$|\Omega \cap B(x_0, R)| \geq C|B(x_0, R)|.$$

Alors pour un $\nu > 0$, l'on a $u \in C^\nu(\bar{\Omega})$.

Démonstration: Pour $x_0 \in \Omega, R_0 > 0, B(x_0, 2R_0) \subset \Omega, 0 < R \leq R_0$, on note $T_R = B(x_0, 2R) \setminus B(x_0, R), \zeta \in C_0^\infty(B(x_0, 2R)), \zeta(x) = 1$ sur $B(x_0, R), |X\zeta| \leq CR^{-1}$. Posons $v_R(x) = u(x) - \tilde{u}_R$, en choisissant $\eta = v_R G_y^\sigma \zeta^2$ comme fonction-test dans (16), et en faisant tendre σ vers 0, (14), (23) et (20), entraîne pour tout $y \in B(x_0, R/2)$,

$$\begin{aligned} |u(y) - \tilde{u}_R| + c_1 \int_{B(x_0, 2R)} |Xu|^2 G(x, y) \zeta^2(x) dx \\ \leq CR^2 |B(x_0, R)|^{-1} \int_{T_R} |Xu|^2 dx. \end{aligned} \quad (29)$$

En utilisant (11) et (29), on a

$$\int_{B(x_0, R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx \leq C_0 \int_{T_R} |Xu|^2 G(x_0, x) dx,$$

ce qui donne

$$\int_{B(x_0, R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx \leq \frac{C_0}{1 + C_0} \int_{B(x_0, 2R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx.$$

On a donc pour $\mu = \log_2 \left[\frac{1+C_0}{C_0} \right] > 0, 0 < \delta < R \leq R_0$,

$$\int_{B(x_0, \delta)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx \leq (\delta/R)^\mu \int_{B(x_0, 2R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx.$$

Donc (11), (24) et (29) entraînent

$$\sup_{B(x_0, \delta/2)} |u(x) - u(y)| \leq C\delta^{\mu/2}.$$

On a donc démontré que $u \in C^\nu(B(x_0, R_0/2))$ pour $\nu = \mu/(2r)$.

La régularité jusqu'au bord peut être obtenir de même manière.

Remerciement: Une partie de ce travail a été réalisé à l'IRMAR de l'Université de Rennes 1. L'auteur tient à remercier le Professeur N. Lerner de l'y avoir invité. Ce travail est partiellement financé par la NSF de Chine

References

- [1] Bony J. M., Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés , *Ann. Inst. Fourier* 19 (1969), 227–304.
- [2] Cancelier C. E., Xu C. J., Fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques dégénérés à coefficients non réguliers, Preprint.
- [3] Fefferman C., and Phong D. H., Subelliptic eigenvalue problems. *Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis, in honor of A. Zygmund, Wadsworth Math. Series.* 1981, 590–606.
- [4] Giaquinta M., Giusti E., Nonlinear elliptic systems with quadratic growth, *Manuscripta Math.* 24 (1978) 323–349
- [5] Hildebrandt S., Kaul H., Widman K., An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Acta Math.* 138 (1977), 1–16.
- [6] Jerison D., The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition. *Duke Math. J.* 53 (1986) 503–523.
- [7] Jerison D., Sánchez-Calle A., Subelliptic second order differential operators, *Lecture Notes in Math.* V. 1277, PP46–77.
- [8] Jost J., Equilibrium maps between metric spaces, Preprint.
- [9] Jost. J., Xu C. J., subelliptic harmonic maps, Preprint.
- [10] Nagel A., Stein E. M., and Wainger S., Balls and metrics defined by vector fields I. basic properties, *Acta Math.*, 155 (1985), 103–147.
- [11] Rothschild L., Stein E-M., Hypoelliptic operators and nilpotent Lie Groups, *Acta Math.* 137 (1977), 247-320.
- [12] Sánchez-Calle A., Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields, *Invent. Math.*, 78 (1984), 143–160.
- [13] Xu C. J., Subelliptic variational problems, *Bull. Soc. Math. France*, 118 (1990), 147-169.
- [14] Xu C. J., Regularity for quasilinear second order subelliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, (1992), 77–96.

Chao-Jiang XU
Institut de Mathématiques
Université de Wuhan
430072, Wuhan, R. P. Chine