Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

Y. Meyer

Chirps n-dimensionnels et analyse 2-microlocale

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A1_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CHIRPS n-DIMENSIONNELS ET ANALYSE 2-MICROLOCALE

Y. MEYER

Exposé n° I

18 octobre 1994

I Introduction

Le mot anglais “chirp” désigne un pépiement, le chant modulé d'un oiseau. Il est utilisé, en traitement du signal, pour parler d'un signal modulé en fréquence, dont l'expression analytique en fonction du temps est $s(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$ où $A(t)$ est une fonction régulière dont les variations sont lentes tandis que les variations de la fonction régulière $\varphi(t)$ sont “très rapides”. Naturellement ces variations rapides de la phase doivent être définies avec précision. Deux voies s'offrent à nous. On peut introduire un “grand paramètre” $\lambda \gg 1$ et considérer les signaux $s_\lambda(t) = A(t)e^{i\lambda\varphi(t)}$ pour lesquels on cherchera des estimations asymptotiques quand λ tend vers l'infini.

La seconde voie (que nous suivrons) consiste à supposer que $\varphi(t)$ est régulière pour $t \neq t_0$ tandis que $\varphi(t)$ ainsi qu'un certain nombre de dérivées de $\varphi(t)$ tendent vers l'infini quand t tend vers t_0. On cherchera alors des estimations asymptotiques quand t tend vers t_0. L'exemple le plus évident d'un tel chirp est donné par $f(t) = t\sin(1/t)$.

Une telle fonction est “de plus en plus oscillante” quand t tend vers 0 et l'objet de cet article est de quantifier ce comportement en 0.

Une manière de le faire est d'estimer les primitives successives de $f(t)$: la primitive de $f(t)$ est $0(t^3)$, la seconde primitive est $0(t^5)$ etc.

La seconde façon de mesurer les oscillations est de calculer les normes C^s de f restreinte à des intervalles $[-\varepsilon, \varepsilon]$ dont la longueur tend vers 0. Si s est positif, on mesure la régularité de f tandis que si s est négatif, le caractère oscillant de f est pris en compte. Nous utiliserons une double asymptotique où $\varepsilon > 0$ tend vers 0 et s tend vers $-\infty$.

La troisième façon de mesurer les oscillations sera d'utiliser les espaces 2-microlocaux $C_0^{s,s'}$ et un “chirp” sera caractérisé par l'appartenance simultanée à une famille à un paramètre de tels espaces.

La dernière façon de procéder sera d'utiliser l'analyse en ondelettes.

La notion de chirp permet de décrire et d'étudier un nouveau type de singularité en 0 (ou en un point x_0 arbitraire). Nous conduirons cette étude pour des fonctions de n variables réelles, ce qui nous amènera à généraliser correctement les approches précédentes.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est un chirp en x_0 si $f(x+x_0)$ est un chirp en 0. Notre but est de déterminer, pour une fonction donnée f, les points x_0 tels que f soit un chirp en x_0. Ces chirps peuvent être des singularités isolées d'une fonction $f(x)$ qui est génériquement beaucoup plus régulière ou bien ils peuvent correspondre à des points de régularité dans un environnement génériquement irrégulier. Un exemple de cette seconde situation nous sera fourni par la somme $f(x_1, \cdots, x_n)$ de la série trigonométrique

$$\Sigma'(m_1^2 + \cdots + m_n^2)^{-\alpha} \exp(i(m_1^2 x_1 + \cdots + m_n^2 x_n)) \ .$$

Si $\alpha > n/2, f(x)$ est continue et appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha - n/2}(\mathbf{R}^n)$. Ce résultat est optimal et la régularité globale de $f(x_1, \cdots, x_n)$ peut être rendue arbitrairement faible. Mais en $x_0 = (\pi, \cdots, \pi), f(x)$ est la somme d'un chirp de type $(2\alpha - n/2, 1)$ et de régularité $\alpha - n/2$ (voir la définition 1). En particulier f vérifie en x_0 une condition de Hölder d'exposant $2\alpha - n/2 > n/2$. Il s'agit bien d'un point de "forte régularité" dans un environnement de "faible" régularité.

Traditionnellement cette recherche de "régularité isolée" dans un "contexte irrégulier" s'effectue en utilisant un théorème dû à S. Jaffard que nous rappellerons. Nous verrons que l'analyse que nous proposons fournit des résultats légèrement meilleurs.

2. Définition et première caractérisation des chirps.

Définition 1.— *Soient $\gamma > -n$ et $\beta > 0$ deux nombres réels. Une fonction $f(x)$ intégrable sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ est un "chirp" de type (γ, β) en 0 s'il existe un $r_0 > 0$ tel que, pour tout entier $N \geq 0$ on puisse écrire sur $|x| < r_0$, au sens des distributions,*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \partial^\alpha \mathcal{U}_{\alpha,N}(x) \tag{2.1}$$

où $\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \cdots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$ et où

$$|\mathcal{U}_{\alpha,N}(x)| \leq C_N |x|^{(\gamma + \beta N + |\alpha|)} . \tag{2.2}$$

Il importe de remarquer que $|f(x)| \leq C|x|^\gamma$ (c'est le cas $N = 0$). Si l'on remplaçait β par 0 dans la définition 1, les autres cas ($N \geq 1$) résulteraient évidemment de la majoration $|f(x)| \leq C|x|^\gamma$.

L'espace vectoriel $\Gamma(\gamma, \beta)$ des chirps de type (γ, β) en 0 devient un espace de Frechet lorsqu'on le munit de la toplogie définie à l'aide des semi-normes $C(N, r_0; f)$ obtenues à partir des constantes C_N. Nous verrons un peu plus loin que les fonctions de test n'appartiennent à $\Gamma(\gamma, \beta)$ que si elles ont un zéro d'ordre infini en 0.

On définit un chirp de type (γ, β) en x_0 en se ramenant par translation au cas $x_0 = 0$ et l'on désigne par $\Gamma_{x_0}(\gamma, \beta)$ l'espace de Fréchet des chirps de type (γ, β) en x_0. On a alors $\Gamma_{x_0}(\gamma', \beta') \subset \Gamma_{x_0}(\gamma, \beta)$ si $\gamma' \geq \gamma$ et $\beta' \geq \beta > 0$.

Notre premier énoncé (théorème 1) nous conduira à une représentation analytique des chirps $f(x)$ généralisent les exemples $|x|^\gamma \sin(1/x)$ où x est une variable réelle.

En dimension n, la fonction $\sin x$ sera remplacée par une "fonction indéfiniment oscillante" (définition 2) tandis que le difféomorphisme $x \to 1/x$ de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ est remplacé par le difféomorphisme $x \to x|x|^{-1-\beta}, \beta > 0$, de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Observons que si $\beta = 1$, il s'agit d'une inversion. Commençons par définir une fonction indéfiniment oscillante sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ de la forme $|x| > R_0$.

Définition 2.— *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ de la forme $|x| > R_0$. Une fonction $g \in L^\infty(\Omega)$ est indéfiniment oscillante si et seulement si, pour tout entier $N \geq 1$, on peut écrire*

$$g(x) = \sum_{|\alpha|=N} \partial^\alpha g_\alpha(x) \quad \text{où} \quad g_\alpha \in L^\infty(\Omega) \ . \tag{2.3}$$

Il est facile de montrer qu'une définition équivalente est la suivante : pour tout entier m, il existe une constante C_m telle que l'on ait

$$|\int_\Omega g(x)u(x)dx| \leq C_m \sup_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_1$$

pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

On a alors

Théorème 1.— *Les trois propriétés suivantes d'une fonction $f(x)$ intégrable au voisinage de l'origine sont équivalentes*

(2.4) $f(x)$ est un chirp de type (γ, β) en 0

(2.5) $f(x) = |x|^\gamma g(x|x|^{-1-\beta})$ où $g(x)$ est indéfiniment oscillante sur $\Omega = \{x; |x| > R_0\}$

(2.6) on a $|f(x)| \leq C_0|x|^\gamma$ et pour tout entier N tel que $\gamma + \beta N > 0$, il existe une constante C_N telle que, pour tout $\varepsilon \in (0, r_0)$ et toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ dont le support est inclus dans $|x| < \varepsilon$, on ait

$$|\int f(x)\varphi(x)dx| \leq C_N \sup_{|\alpha|\leq N} \varepsilon^{\gamma+\beta N+|\alpha|}\|\partial^\alpha\varphi\|_1 \ .$$

Supposons que $f(x)$ soit à la fois un chirp en 0 et une fonction indéfiniment dérivable au voisinage de 0. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. On peut alors évaluer de deux façons différentes $\int f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx$ où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. D'une part on obtient $C_0(\varphi) + \varepsilon C_1(\varphi) + \cdots + \varepsilon^m C_m(\varphi) + \cdots$ et, grâce au théorème 1, on obtient $0(\varepsilon^N)$ pour tout entier N. Il vient donc $C_m(\varphi) = 0$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ ce qui équivaut à $\partial^\alpha f(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$.

Finalement si $f(x)$ est à la fois un chirp et une fonction indéfiniment dérivable, on a $f(x) = 0(|x|^N)$ pour tout N. Réciproquement une telle fonction est évidemment un chirp (dégénéré).

3. Mesure des oscillations à l'aide d'espaces de Hölder d'exposants négatifs.

Nous allons nous resteindre aux chirps ayant une propriété de régularité décrite par un nombre réel $r > 0$ et la condition que la fonction $g(x)$ qui apparaît dans le théorème 1 soit höldérienne d'exposant r. Il y aura alors conflit entre deux régimes de régularité. Pour un chirp de type (γ, β) et de régularité r, les oscillations deviennent de plus en plus violentes lorsqu'on se rapproche de 0 et c'est un obstacle à la régularité (globale). L'autre obstacle est la limitation imposée par $r > 0$.

Nous nous proposons d'analyser précisément ces deux régimes conflictuels en utilisant les normes $C^s(B)$ où B est une boule ouverte et s est un nombre réel (arbitraire). Commençons par rappeler la définition des espaces de Hölder homogènes, notés $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$, qui nous serviront de point de départ pour définir une norme $C^s(B)$ qui ait la covariance attendue vis à vis des translations et des changements d'échelle.

Si $0 < s < 1$, f appartient à $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|^s$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $y \in \mathbf{R}^n$ et la borne inférieure des constantes C apparaissant dans cette définition est la norme de f dans $\dot{C}^s$. Alors $\|f(\lambda(x - x_0)\|_{\dot{C}^s} = \lambda^s \|f(x)\|_{\dot{C}^s}$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ce qu'est la propriété de covariance attendue. Si $s = 1$, on remplace cette condition par la célèbre condition de Zygmund $|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)| \leq C|y|$ (sans imposer à f d'être bornée) et la norme de f est encore la borne inférieure de ces constantes C. Enfin si $m < s \leq m + 1$, $m \in \mathbf{N}$, $f \in \dot{C}^s$ signifie $\partial^\alpha f \in \dot{C}^r(\mathbf{R}^n)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| = m = s - r$. La norme de f dans $\dot{C}^s$ est définie en conséquence et $\dot{C}^s$ est un espace quotient modulo les polynômes de degré ne dépassant pas s. Si $-1 < s < 0$, une distribution f appartient à $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si $f = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(x)$ où $f_1, \cdots, f_n$ appartiennent à $\dot{C}^{s+1}(\mathbf{R}^n)$ etc. On observera que $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$ n'est plus un espace quotient si s est négatif. Si $-n \leq s < 0$, les fonctions de test appartiennent à $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$ tandis que si $s < -n$, les fonctions de test ayant suffisamment de moments nuls appartiennent à $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$. Soit Ω un ouvert arbitraire de $\mathbf{R}^n$.

Si $s < 0$, $C^s(\Omega)$ est simplement l'espace des restrictions à Ω des fonctions ou distributions de $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$, la norme dans $C^s(\Omega)$ étant la norme quotient correspondante.

Un exemple d'utilisation de ces normes $C^s(\Omega)$, $s < 0$, est fourni par la définition des fonctions indéfiniment oscillantes.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ de la forme $|x| > R_0$ et si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors les deux propriétés suivantes de f sont équivalentes

(3.1) f est indéfiniment oscillante

(3.2) f appartient à tous les espaces $C^s(\Omega)$ pour tout $s < 0$.

Cette remarque nous amène tout naturellement à envisager la situation où l'on impose la condition plus précise suivante

(3.3) f appartient à tous les espaces $C^s(\Omega)$ pour tout $s < r$ où $r > 0$ est un nombre réel arbitraire.

Cela nous amène à préciser la définition des espaces $C^s(\Omega)$ si s est positif ou nul. Il s'agit encore des restrictions à Ω des fonctions des espaces homogènes correspondants $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$. Ici nous avons imposé la condition $f \in L^\infty(\Omega)$ si bien que nous aurions pu tout aussi bien utiliser les espaces non homogènes.

Nous arrivons à la définition des chirps de type (β, γ) et de régularité $r > 0$. On désignera systématiquement par Ω un "voisinage de l'infini" de la forme $\{x \in \mathbf{R}^n; |x| > R_0\}$. On a alors

Définition 3.— *Une fonction $f(x)$, intégrable sur un voisinage de 0, est un chirp de type (γ, β) et de régularité r si et seulement si l'on a, au voisinage de 0*

$$f(x) = |x|^\gamma g(x|x|^{-1-\beta}) \tag{3.4}$$

où $g \in C^s(\Omega)$ pour $s \in (-\infty, r]$.

La régularité de f au voisinage de 0 est limitée par deux facteurs, à savoir l'accélération des oscillations (ou fluctuations) qui est imposée par la singularité en 0 et la régularité r de la fonction g. Un calcul simple fournit $f \in C^s \Leftrightarrow s \leq r$ et $s \leq \frac{\gamma}{\beta+1}$.

Ceci étant, retournons à la définition des espaces de Hölder $C^s(\Omega)$ lorsque Ω est maintenant un ouvert borné de diamètre 2ρ et que l'exposant s est positif. Si nous nous contentions de définir la norme dans $C^s(\Omega)$ comme la norme quotient des restrictions à Ω des éléments de $\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$, les polynômes (de degré ne dépassant pas s) auraient une norme nulle. Nous nous proposons d'éviter cela en adoptant le point de vue suivant :

$$\|f\|_{C^s(\Omega)} = \rho^{-s}\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \inf \|g\|_{\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)} \tag{3.5}$$

où $g \in \dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$ est un prolongement de $f + P$ à tout $\mathbf{R}^n$, P étant un polynôme de degré ne dépassant pas s.

On observera que si f est la restriction à Ω d'une (classe de) fonction $g \in \dot{C}^s(\mathbf{R}^n)$, on a, pour un choix approprié du polynôme P, $\|f - P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\rho^s \|g\|_{\dot{C}^s(\mathbf{R}^n)}$ si bien que la normalisation adoptée dans (3.5) est raisonnable. Si $s = 0$, on conserve le point de vue précédent mais $\rho^{-s}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ est remplacé par $| < f, \theta_\Omega > |$ où $\theta_\Omega(x) = \rho^{-n}\theta(\frac{x-x_0}{\rho})$. Ici nous nous restreignons aux deux cas particuliers suivants : Ω est soit une boule de centre x_0 et de rayon ρ, soit une couronne définie par $\rho < |x - x_0| < 2\rho$ et dans chacun des deux cas, θ est une fonction régulière, d'intégrale à 1, portée par la boule unité ou la couronne unité correspondantes. En nous limitant à ces deux cas (boule ou couronne), la définition précise des normes $C^s(\Omega)$ fournit

$$\|f \circ h\|_{C^s(\Omega)} = \lambda^s \|f\|_{C^s(h(\Omega))} \tag{3.6}$$

pour toute transformation affine $h(x) = \lambda x + x_0, \lambda > 0, x_0 \in \mathbf{R}^n$. Une fois définies ces normes de Hölder pour tout s réel, nous pouvons caractériser les chirps de type (γ, β) et de régularité $r > 0$ par l'énoncé suivant

Théorème 2.— *Une fonction $f(x)$ intégrable sur un voisinage de 0 est un chirp de type (γ, β) et de régularité $r > 0$ si et seulement si l'on peut trouver un $\varepsilon_0 > 0$ et pour tout $s \in (-\infty, r]$ une constante C_s tels que l'on ait*

$$\|f\|_{C^s(\Omega_\varepsilon)} \leq C_s \varepsilon^{\gamma - s(\beta+1)}$$

où l'on a posé

$$\Omega_\varepsilon = \{x; |x| < \varepsilon\} \quad \text{si} \quad s \leq r \quad \text{et} \quad s \leq \frac{\gamma}{\beta+1}$$

tandis que si $\frac{\gamma}{\beta+1} < r$ et $\frac{\gamma}{\beta+1} < s \leq r$, on posera

$$\Omega_\varepsilon = \{x; \frac{\varepsilon}{2} < |x| < \varepsilon\} \ .$$

On demande en outre que C_s soit bornée sur tout intervalle $[-s_0, r]$ de valeurs de s.

4. Chirps et espaces 2-microlocaux.

Avant de définir la "version locale" des espaces 2-microlocaux $C_0^{s,s'}$, il convient de présenter la "version globale" correspondante. Pour cela on utilise la décomposition de Littlewood-Paley [3] et l'on définit $C_0^{s,s'}$ par les conditions suivantes, portant sur une distribution tempérée f

$$|S_0 f(x)| \leq C(1+|x|)^{-s'} \ , \ x \in \mathbf{R}^n \tag{4.1}$$

$$|\Delta_j f(x)| \leq C 2^{-js}(1+2^j|x|)^{-s'} \ , \ x \in \mathbf{R}^n, j \geq 0 \ . \tag{4.2}$$

La définition même des blocs dyadiques $\Delta_j f$ suppose que f soit définie sur tout $\mathbf{R}^n$ et on impose (4.1) et (4.2) sur $\mathbf{R}^n$ tout entier.

Pour beaucoup d'applications, ces conditions sont trop restrictives et l'on se contentera d'imposer (4.1) et (4.2) sur un voisinage de 0 (ne dépendant pas de j). Mais on peut alors oublier (4.1) et remplacer f par n'importe quelle distribution $\tilde{f}$ égale à f au voisinage de 0 sans, pour autant violer la condition (4.2). En effet, si $f - \tilde{f} = 0$ au voisinage de 0, on aura $|\Delta_j(f - \tilde{f})(x)| \leq C_m 2^{-jm}$ dès que $|x| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ ne dépend pas de j et $m \geq 1$ est arbitrairement grand).

Finalement la version locale des espaces deux-microlocaux $C_0^{s,s'}$ est composée des (germes de) distributions f qui vérifient (4.2) sur un voisinage (fixe) de 0.

On rappelle qu'une fonction indéfiniment dérivable au voisinage de 0 appartient à tous les espaces $C_0^{s,s'}$ et que l'échelle fournie par les espaces deux-microlocaux mesure le comportement en 0, modulo les fonctions indéfiniment dérivables.

Aussi nous allons désormais considérer les sommes $f(x) = u(x) + v(x)$ où $u(x)$ est un chirp de régularité $r > 0$ et de type (γ, β) et où $v(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable au voisinage de 0. Il convient de rappeler qu'une telle décomposition est unique, modulo les fonctions nulles en 0 à l'ordre infini.

La caractérisation de ces sommes $f(x) = u(x) + v(x)$ est donnée par le théorème suivant

Théorème 3.— *Soient $r > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > -n$ trois nombres réels. Alors les deux propriétés suivantes d'une fonction $f(x)$, définie au voisinage de 0, sont équivalentes*

(4.3) $f(x)$ appartient à tous les espaces 2-microlocaux $C_0^{s,s'}$ tels que s et s' vérifient

$$s + s' \leq r \quad \textit{et} \quad (\beta+1)s + \beta s' \leq \gamma$$

(4.4) $f(x) = u(x) + v(x)$ où $u(x)$ est un chirp de type (γ, β) et de régularité r en 0 et où $v(x)$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0.

5. Le théorème de S. Jaffard.

La recherche de points réguliers dans un environnement irrégulier peut être précisée de la façon suivante. On se donne une fonction $f(x)$ de n variables réelles, appartenant à l'espace de Hölder $C^\beta(\mathbf{R}^n)$ pour un certain $\beta > 0$. Soit α un second nombre réel vérifiant $\alpha > \beta$. Supposons, pour simplifier, que α n'est pas entier et soit m la partie entière de α. On écrit $f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe un polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à m et une constante C tels que l'on ait

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha \ . \tag{5.1}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, désignons par B_ε la boule de centre x_0 et de rayon ε. La norme $C^\beta(B_\varepsilon)$ est alors définie par (3.5).

Dans ces conditions on a

Théorème 4.— *Soit $f(x)$ une fonction définie au voisinage de x_0. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes*

(5.2) il existe un rayon $\varepsilon_0 > 0$, une constante C et un polynôme $P(x)$ de degré ne dépassant pas m tels que l'on ait $\|f(x) - P(x - x_0)\|_{C^\beta(B_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\alpha-\beta}$ pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$f \in C_{x_0}^{\alpha, \beta-\alpha} \ . \tag{5.3}$$

Grâce à la normalisation adoptée pour la norme $C^\beta(B_\varepsilon)$, la propriété (5.2) entraîne $|f(x) - P(x_{x_0})| \leq C|x - x_0|^\alpha$, c'est à dire $f \in C^\alpha(x_0)$.

Il est intéressant de comparer le théorème 4 au théorème 3. Si $f(x)$ appartient à tous les espaces $C_0^{s,s'}$ lorsque $s + s' \le r$ et $(\beta+1)s + \beta s' \le \gamma$, alors le théorème de Jaffard fournira $f \in C^s(x_0)$ si l'on peut trouver s' tel que $s + s' \le r$, $s + s' > 0$ et $(\beta+1)s + \beta s' \le \gamma$. Mais r est positif ce qui nous permet d'oublier la première contrainte en choisissant $s+s'$ suffisamment petit. On voit alors que tout s inférieur à γ est acceptable mais que $s = \gamma$ est exclu. Cependant, si $f(x)$ est un chirp de type (β, γ), alors $f \in C^\gamma(x_0)$. Dans la recherche de la régularité ponctuelle dans un environnement irrégulier, on peut soit utiliser le théorème 3, soit employer le théorème de Jaffard. Or on voit que le théorème 3 est un peu plus précis (il permet d'accéder au cas limite).

Une dernière remarque éclairera la théorème 4. Supposons $0 < \beta < \alpha < 1$. Alors f appartient à $C_{x_0}^{\alpha,\beta-\alpha}$ si et seulement si, au voisinage de x_0, on a

$$|f(y) - f(x)| \le C|y-x|^\beta(|x-x_0| + |y-x_0|)^{\alpha-\beta} .$$

6. Analyse par ondelettes des chirps.

Soit $\psi(x)$ une fonction de n variables réelles, suffisamment régulière, suffisamment localisée autour de 0 et ayant suffisamment de moments nuls (tous ces points seront précisés dans un instant). Les ondelettes engendrées par l'"ondelette-mère" $\psi(x)$ sont, par définition, $a^{-n}\psi(\frac{x-b}{a})a > 0$ étant la variable d'échelle et $b \in \mathbf{R}^n$ la variable de position. On les désigne par $\psi_{(a,b)}$. L'analyse d'une fonction $f(x)$ est alors fournie par ses coefficients d'ondelette

$$W(a,b) = \langle f \ , \psi_{(a,b)} \rangle \tag{6.1}$$

et la synthèse de f s'effectue par

$$f(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} W(a,b)\tilde{\psi}_{(a,b)}(x) \frac{da}{a} db \tag{6.2}$$

lorsque ψ et $\tilde{\psi}$ sont reliées par

$$\int_0^\infty \overline{\hat{\psi}}(t\xi)\hat{\tilde{\psi}}(t\xi)\frac{dt}{t} = 1 \ , \ \xi \neq 0 \ . \tag{6.3}$$

L'identité (6.2) a été découverte et utilisée par A. Calderón à la fin des années cinquante.

Si l'on s'intéresse au comportement local de f au voisinage de x_0 et si l'on raisonne modulo une fonction régulière, on peut remplacer l'intégrale sur $(0,\infty) \times \mathbf{R}^n$ figurant dans le second membre de (6.2) par l'intégrale correspondante sur $(0, a_0) \times \{|b - x_0| < r_0\}$ où $a_0 > 0$ et $r_0 > 0$ peuvent être choisis arbitrairement petits.

On a alors

Théorème 5.— *Soit $\psi(x)$ une fonction appartenant à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ et vérifiant $\int x^\alpha \psi(x)dx = 0$ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq r$. Soit $u(x)$ un chirp de type (γ, β) et de régularité r en 0.*

Posons $W(a,b) = < u, \psi_{(a,b)} >$. Alors on a

(6.4) $$|W(a,b)| \leq C|b|^\gamma (\frac{a}{|b|^{1+\beta}})^r \quad si \quad 0 < a \leq |b|^{1+\beta} \leq 1$$

(6.5) $$|W(a,b)| \leq C_N |b|^\gamma (\frac{|b|^{1+\beta}}{a})^N,$$

pour tout entier N, si $|b|^{1+\beta} < a \leq |b| \leq 1$ et finalement, pour tout entier N,

(6.6) $$|W(a,b)| \leq C_N a^N \quad si \quad |b| < a \leq 1 \ .$$

Réciproquement soit $W(a,b)$ une fonction mesurable au voisinage de $(0,0)$. Supposons que $W(a,b)$ vérifie les estimations (6.4), (6.5) et (6.6). Soit $\tilde{\psi}(x)$ une fonction à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $m > r$. Supposons que tous les moments de $\tilde{\psi}(x)$ soient nuls. Alors pour $a_0 > 0$ et $r_0 > 0$ suffisamment petits,

(6.7) $$f(x) = \int \int_{\substack{0<a<a_0 \\ |b|<r_0}} W(a,b) \tilde{\psi}_{(a,b)}(x) \frac{da}{a} db$$

est la somme d'un chirp de régularité r et de type (γ, β) et d'une fonction de classe C^m.

La signification heuristique du théorème 5 est que, si $0 < a \leq |b|^{1+\beta} \leq 1$ les oscillations de l'ondelette $\psi_{(a,b)}$ sont beaucoup plus violentes que celles du chirp. L'ondelette est alors trop "concentrée" pour analyser les oscillations du chirp et ne peut qu'en analyser la régularité locale (les moments nuls de ψ sont ajustés à cette analyse).

Dans le "régime critique" défini par $a = |b|^{1+\beta}$, les oscillations de l'ondelette entrent en résonance avec celles du chirp et la fonction $a \to |W(a,b)|$ atteint son maximum.

Dès que $a > |b|^{1+\beta}$, les oscillations du chirp l'emportent sur celles de l'ondelette (qui apparaît alors comme une fonction régulière et localisée).

Ces considérations heuristiques ont été inspirées par les remarquables travaux conduits par A. Grossmann et B. Torrésani où les ondelettes sont utilisées pour détecter la fréquence instantanée de signaux modulés en fréquence. La surface de $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$ définie par l'équation $a = |b|^{1+\beta}$ est alors appelée la "ligne de crête" du signal et la restriction à cette "ligne de crête" de $W(a,b)$ est le "squelette" du signal. L'idée sous-jacente est la compression du signal analysé.

7. Action des opérateurs pseudo-différentiels sur les chirps.

Soit $u(x)$ un chirp de type (γ,β) et de régularité $r>0$. Désignons par $\zeta=\sigma+i\tau$ un nombre complexe dont la partie réelle σ vérifie simultanément $\sigma<r$ et $\sigma<\frac{\gamma+n}{\beta+1}$. Considérons alors un opérateur pseudo-différentiel T_ζ dont le symbole $\tau(\xi)$ est indépendant de x et vérifie la condition d'homogénéité $\tau(\lambda\xi)=\lambda^\zeta\tau(\xi)$ pour tout $\lambda>0$ et tout $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$.

Alors on a

Théorème 6.— *Avec les notations précédentes, $T_\zeta u=u_\zeta+v_\zeta$ où u_ζ est un chirp de régularité $r-\sigma$ et de type $(\gamma-\sigma(\beta+1),\beta)$ et où v_γ est une fonction indéfiniment dérivable.*

Nous appliquons ce théorème à l'étude des fonctions continues et 2π-périodiques en chaque variable $x_1,\cdots,x_n$ définies par $f_\alpha(x_1,\cdots,x_n)=\Sigma'(m_1^2+\cdots+m_n^2)^{-\alpha}\exp(i(m_1^2x_1+\cdots+m_n^2x_n))$ où Σ' signifie que la somme porte sur $\mathbf{Z}^n$ privé de 0. On suppose $\alpha>n/2$ et l'on commence par considérer le cas $\alpha=n$. En utilisant le théorème 5, on obtient que, si $\alpha=n$, $f_\alpha(x)$ est un chirp de type $(\frac{3n}{2},1)$ et de régularité $\frac{n}{2}$ en $(\pi,\cdots,\pi)$. Dès lors $f_\alpha(x)$ est en $(\pi,\cdots,\pi)$ un chirp de type $(2\alpha-n/2,1)$ et de régularité $\alpha-n/2$.

Puisque $\alpha>n/2$, on a aussi $2\alpha-n/2>n/2$ et l'on observe une loi du tout ou rien : si $\alpha=n/2$, $f_\alpha(x)$ n'est pas bornée au voisinage de $(\pi,\cdots,\pi)$ tandis que si $\alpha>n/2$ f_α vérifie en $(\pi,\cdots,\pi)$ une condition de Hölder d'exposant $2\alpha-n/2$ en ce même point $(\pi,\cdots,\pi)$. En particulier f_α est, si $n\geq 2$, différentiable en $(\pi,\cdots,\pi)$.

Bibliographie :

[1] R. Rochberg, Toeplitz and Hankel operators, wavelets, NWO sequences and almost diagonalization of operators, Proc. Symp. Pure Math., **51** (1990) 425-444.

[2] Ph. Tchamitchian and B. Torrésani, Ridge and Skeleton extraction from the wavelet transform, *Wavelets and their applications*, Mary B. Ruskai ed. Jones & Bartlett (1992), 123-152.

[3] Y. Meyer, Ondelettes et Opérateurs, tomes I, II, III, Hermann (1991).

CEREMADE

Université Paris-Dauphine

75775 Paris cedex 16